DIAGRAM GONIOMETRYCZNY [1]

UŁOŻONY NA PODSTAWIE

LINIJ BIEGUNOWYCH FUNKCYJ GONIOMETRYCZNYCH [2]

PRZEZ

Wiktora Fronia

Inżyniera, Professora c. k. Instytutu Techniczno-Przemysłowego w Krakowie.

(Tabl. V.)

§. 1. **Linie biegunowe funkcyj goniometrycznych** [Fig. 1 – 9]
Wzory:

$$(1).\ \rho = r \sin \varphi,$$
$$(2).\ \rho = r \cos \varphi,$$
$$(3).\ \rho = r \sec \varphi,$$
$$(4).\ \rho = r \operatorname{cosec} \varphi,$$
$$(5).\ \rho = r \operatorname{tang} \varphi,$$
$$(6).\ \rho = r \operatorname{cotang} \varphi,$$

odniesione do układu spółrzędnych biegunowych, uważając ρ jako promień wodzący, φ jako kąt biegunowy, zaś r jako ilość stałą, oznaczają linie płaskie, które nazwiemy w ogólności: *liniami biegunowemi funkcyj goniometrycznych* (gdyż każdy ich promień wodzący ρ, przyjąwszy stałą r za jednostkę, przedstawia funkcyą goniometryczną odpowiedniego kąta biegunowego φ), w szczególności zaś: *linią biegunową wstaw, dostaw, siecznych, dosiecznych,*

[1]) Diagram ten, w układzie zastosowanym do praktycznego użytku, podany został w „Kalendarzu technicznym“ na rok 1879, wydanym staraniem „Towarzystwa Politechnicznego“ we Lwowie.

[2]) Odniósłszy równania: $y = \sin x$, $y = \operatorname{tang} x$, ... do układu osi spółrzędnych prostokątnych (OX, OY), otrzymamy *krzywe funkcyj goniometrycznych*, mianowicie: Sinusoidę, Tangentoidę . . . ., których rzędne y przedstawiają odpowiednie funkcye goniometryczne łuków wyprostowanych x, odciętych od O na osi OX. Innego kształtu krzywe otrzymamy, gdy te same równania odniesiemy do układu spółrzędnych biegunowych — i te dla odróżnienia nazywamy krzywemi (lub ogólniej: *liniami*) *biegunowemi funkcyj goniometrycznych.*

stycznych lub *dotycznych* [1]), według tego czy jej analitycznem równaniem biegunowem jest (1), (2), (3) . . lub (6).

Odnosząc powyższe równania (każde z osobna) do układu osi spółrzędnych prostokątnych, którego początek schodzi się z biegunem a oś odciętych z osią biegunową, otrzymamy:

$(1)_a$ α) $x^2 + y^2 - ry = 0$, lub β) $x = \pm\sqrt{y(r-y)}$;

$(2)_a$ α) $x^2 + y^2 - rx = 0$, lub β) $y = \pm\sqrt{y(r-y)}$;

$(3)_a$ $x = r$

$(4)_a$ $y = r$

$(5)_a$ α) $x^4 + x^2y^2 - r^2y^2 = 0$, lub β) $y = \dfrac{x^2}{\pm\sqrt{r^2-x^2}}$

$(6)_a$ α) $y^4 + x^2y^2 - r^2x^2 = 0$, lub β) $x = \dfrac{y^2}{\pm\sqrt{r^2-y^2}}$

Równania te wskazują, że:

1. *Linia biegunowa wstaw* (Fig. 1) jest kołem, którego środek leży na osi rzędnych w odległości $+\frac{r}{2}$ od początku i które jest stycznem do osi odciętych,

2. *Linia biegunowa dostaw* (Fig. 2) jest kołem stycznem do osi rzędnych, którego środek leży na osi odciętych w odległości $+\frac{r}{2}$ od początku,

3. *Linia biegunowa siecznych* (Fig. 3) jest prostą, równoległą do osi rzędnych położoną w odległości $+r$,

4. *Linia biegunowa dosiecznych* (Fig. 4) jest prostą, równoległą do osi odciętych, położoną w odległości $+r$,

5. *Linia biegunowa stycznych* (Fig. 5) jest krzywą 4go stopnia [2]),

---

[1]) Czyli: biegunową Sinusoidą, Sekantoidą, Tangentoidą . . . .

[2]) Niektóre wzory dotyczące *linii biegunowej stycznych*:

1. Równanie linii b. stycznych (jak wyżej):

$$x^4 + x^2y^2 - r^2y^2 = 0;$$

2. Równanie biegunowe (jak wyżej): $\rho = r \operatorname{tang} \varphi$;

3. Względności między x, y a ρ, φ:

$$x = \rho\cos\varphi = r\sin\varphi \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\rho}{r} = \frac{y}{x}$$

$$y = \rho\sin\varphi = y\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \qquad \rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

4. Kąt α, który styczna AT (Fig. 8) linii biegunowej stycznych z osią odciętych zawiera, oznaczyć się daje z wzorów:

$$\pm\operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{dy}{dx} = \frac{(2r^2-x^2)x}{(r^2-x^2)^{3/2}} = \frac{(1+\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos^3\varphi};$$

5. Równanie stycznej w punkcie (x, y) linii biegunowej stycznych, gdy (ζ, η) są jej współrzędnemi bieżącemi:

$$\eta - y = \frac{(2r^2-x^2)x}{(r^2-x^2)^{3/2}}(\zeta - x);$$

symetryczną do osi odciętych i do osi rzędnych; składa się ona z dwóch do siebie przystających ramion ciągłych, idących do nieskończoności, a stykających się ze sobą i z osią odciętych w początku układu spółrzędnych. Ku osi rzędnych, która jest osią podłużną tej krzywej, ramiona jej zwrócone są swą wklęsłością. Krzywa ta posiada dwie asymptoty, w odstępach $+r$ i $-r$, równoległe do osi rzędnych. Między innemi charakteryzuje takową własność, dotycząca jej powierzchni, mianowicie: Powierzchnia $P\gamma$ (Fig. 7) ograniczona tą krzywą, jej asymptotą i przedłużeniami dwóch promieni wodzących, nachylonych do siebie pod dowolnym kątem γ jest równą powierzchni odpowiadającego temuż kątowi γ wycinka koła, zakreślonego promieniem równym odległości r, asymptoty od osi podłużnej; podział więc tej powierzchni odbywa się promieniami wodzącymi w tenże sam sposób, jak koła jego pro-

---

6. Podstyczna $\overline{BC} = \frac{(r^2 - x^2)\, x}{2\, r^2 - x^2} = \frac{r \sin \varphi \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}$,

7. Styczna $\overline{AC} = \frac{(2\, r^2 - x^2)\, x^3}{r \sqrt{r^6 - 2\, r^2\, x^4 + x^6}} = \frac{r\,(1 + \cos^2 \varphi) \sin^3 \varphi}{\sqrt{1 - 2 \sin^4 \varphi + \sin^6 \varphi}}$'

8. Równanie normalnej w punkcie (x, y) linii biegunowej stycznych:

$$\eta - y = - \frac{(r^2 - x^2)^{3/2}}{(2\, r^2 - x^2\, x} (\zeta - x),$$

9. Normalna $\overline{AD} = AC.\ \text{tang}\ \alpha = \ldots\ldots,$

10. Podnormalna $\overline{BD} = \frac{x^3\, (2\, r^2 - x^2)}{(r^2 - x^2)^2} = \frac{r \sin^3\varphi\, (1 + \cos^2\varphi)}{\cos^4\varphi}$,

11. Kąt μ, jaki czyni styczna z promieniem wodzącym, oznaczymy według wzoru:

$$\text{tang}\ \mu = \sin \varphi \cos \varphi,$$

12. Równanie biegunowe stycznej w punkcie (ρ, φ) linii biegunowej stycznych, gdy $((\rho), (\varphi))$ są bieżącemi spółrzędnemi:

$$(\rho) = \frac{r \sin^2\varphi}{\sin \varphi\, (1 + \cos^2\varphi) \cos (\varphi) - \cos^3\varphi \sin (\varphi)}\text{'}$$

13. Biegunowa styczna $\overline{AT_1} = r\ \text{tang}\ \varphi \sqrt{1 + \sin^2\varphi \cos^2\varphi}$;

14. Biegunowa podstyczna $\overline{OT_1} = r \sin^2\varphi$,

15. Biegunowa normalna $\overline{AN} = \frac{r}{\cos^2\varphi} \sqrt{1 + \sin^2\varphi.\ \cos^2\varphi}$;

16. Biegunowa podnormalna $\overline{ON} = r \sec^2\varphi$,

17. Powierzchnia (Fig. 9):

$$P_\varphi = \frac{1}{2} \int_o^\varphi \rho^2.\ d\ \varphi = \frac{r^2}{2} \int_o^\varphi \text{tang}^2\varphi.\ d\varphi = \frac{r^2}{2} \left(\text{tang}\ \varphi - \varphi\right)$$

$$= \frac{r^2}{2} \left[\frac{\rho}{r} - \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{\rho}{r}\right) \right];$$

18. Powierzchnia (Fig. 7) .... $P_\gamma = \frac{r^6.\ \widehat{\gamma}}{2}$.

mieniami; cała zaś powierzchnia zawarta między linią biegunową stycznych a jej asymptotami, jest równą powierzchni πr^2 wzmiankowanego koła;

6. *Linia biegunowa dotycznych* (Fig. 6.) różni się od linii biegunowej stycznych tylko położeniem.

§. 2. **Wykreślenie i przyrząd do wykreślania linij biegunowych stycznych i dotycznych** [Fig. 10—14]. Ponieważ linia biegunowa dotycznych różni się tylko położeniem od takiejże linii stycznych a zaś kształtem i innemi własnościami zbiega się z tą ostatnią, przeto uwzględnimy tu tylko linią biegunową stycznych, łatwo bowiem zdania tyczące się takowej odnieść do pierwszej.

Z możebnych wykreśleń linii biegunowej stycznych podajemy dwa najprostsze, z których pierwsze wypływa bezpośrednio z pojęcia stycznej goniometrycznej, na drugiem zaś polega urządzenie przyrządu do wykreślania tej krzywej.

Wykreślenie 1sze. (Fig. 10.) Asymptota MN, przedłużony do takowej promień wodzący ON i oś biegunowa OX tworzą trójkąt prostokątny, w którym bok $\overline{MN}$, przeciwległy kątowi biegunowemu φ, jest równy długości promienia wodzącego ρ, gdyż $\overline{MN} = r \operatorname{tang} \varphi = \rho = \overline{OA}$; odcinek więc asymptoty, zawarty między osią biegunową a promieniem wodzącym, przeniesiony od bieguna na promień wodzący, wykreśla punkt A linii biegunowej stycznych.

Wykreślenie 2gie. (Fig. 11.) Wierzchołek A kąta prostego BAC opisze linią biegunową stycznych, gdy punkt B, znajdujący się na ramieniu tegoż kąta, w odległości stałej r od wierzchołka, tak prowadzimy wzdłuż prostej OY, aby ramię drugie przechodziło przez stały punkt O tejże prostej. Z Fig. 11 mamy bowiem $\sphericalangle ABO = \sphericalangle AOX = \varphi$, skąd w trójkącie prostokątnym ABO $AO = r \operatorname{tang} \varphi = \rho$, punkt więc A należy do linii biegunowej stycznych. To wykreślenie linii biegunowej stycznych łatwo daje się wykonać wykrawkiem papieru ABT lub trójkątem (ekierką), przyczem można oznaczyć dowolną ilość punktów tej krzywej.

Przyrząd do wykreślania linii biegunowej stycznych. Wykreślenie 2gie stanowi zasadę urządzenia przyrządu do wykreślania linii biegunowej stycznych, którego szkice podajemy na Fig. 12, 13, i 14.

Rylcem a tegoż przyrządu daje się, w granicach skończoności, nakreślić jednem pociągnięciem ramię SOS linii biegunowej stycznych, dla dowolnej stałej r.

Przyrząd składa się z dwóch głównych części: 1) *nieruchomej*, którą jest *trzon osiowy* AA_1 wsparty na dwóch słupkach B i B_1 2) *ruchomej*, którą stanowi *krzyż*, utworzony połączeniem nieruchomem i nieodłącznem, pod kątem prostym, *trzonu wodzącego* E_1 E_2 *z trzonem porównawczym* DD_1. W połączeniu trzonów krzyża znajduje się rylec a, odpowiednią sprężynką podczas wykreślania, przyciskać się dający do tablicy rysunkowej T. Końce trzonów krzyża spoczywają na kółkach k k_1 k_2.

Krzyż łączy się z trzonem osiowym ruchomo i odłącznie za pośrednictwem *węzła osiowego* pp_1 i *węzła biegunowego* p_2.

Węzeł osiowy składa się z dwóch obrączek kulistych (spodniej p_1 i wierzchniej p), połączonych ze sobą ruchomo i odłącznie czopkiem, osadzonym pionowo w spodniej obrączce a wchodzącym w łoże wierzchniej obrączki. Obrączka wierzchnia obejmuje trzon osiowy tak, że tenże w niej wolno może się przesuwać, zaś obrączka spodnia, obejmując trzon porównawczy, może być śrubką s przymocowaną do takowego, a to w jego dowolnym punkcie b. Odstęp punktu b od rylca a, przedstawia stałą r linii biegunowej stycznych, od takowej zaś zawisłe są wymiary tejże krzywej (różnym r odpowiadają *podobne* linie biegunowe stycznych). Dla oznaczenia wzmiankowanego odstępu umieszczoną jest na trzonie porównawczym podziałka milimetrowa.

Węzeł biegunowy *połączony* jest ruchomo za pomocą przymocowanego doń czopka pionowego O z trzonem osiowym, w którym znajduje się łoże tegoż czopka. Węzeł ten, kształtu kulistego, posiada u spodu żłobek o przekroju w kształcie jaskółczego ogona; w ten żłobek wchodzi odpowiedniego kształtu trzon wodzący, łączący się poniżej węzła z trzonem porównawczym.

W skutku takiego urządzenia, przesuwa się trzon wodzący przez stały punkt nieruchomego trzona osiowego i obraca jednocześnie około takowego, — zaś trzon porównawczy, prowadzony swym punktem dowolnym wzdłuż trzona osiowego, podczas ruchu, obraca się około tegoż punktu tak, jak tego wykreślenie 2gie wymaga. Wszystkie trzony opatrzone są przedłużnikami, które po założeniu przymocowywa się ukrytemi śrubkami. Po odjęciu takowych łatwo rozebrać można cały przyrząd. Połączenie trzona osiowego A_1 A ze słupkami B i B_1 i ukształtowanie tychże słupków można wykonać w sposób uwidoczniony na Fig. 12 *a*.

Bliższe szczegóły jakoteż sposoby postępowania przy wykreślaniu, jako łatwe do uzupełnienia, pomijamy.

§. 3. **Diagram goniometryczny.** [Fig. 15—16]. Przyjąwszy według §. 1 stałą $r = 1$, to promienie wodzące ρ linij biegunowych funkcyj goniometrycznych, przedstawią funkcye goniometryczne (wstawę, dostawę itd.) odpowiadających im kątów biegunowych φ, gdyż wzory (1), (2) . . . . (6) przybierają przy $r = 1$, kształt: 1) $\rho = \sin\ \varphi$, 2) $\rho = \cos \varphi$, 3) $\rho = \sec \varphi$, ...

Zestawiwszy wszystkie linie biegunowe funkcyj goniometrycznych dla spólnego bieguna O i spólnej osi biegunowej OX, jak na Fig. 15, otrzymamy *diagram goniometryczny*, który opatrzony podziałką kątową i podziałką linijną, użyć możemy w zastępstwie lub w braku tablic goniometrycznych, szczególnie w tym razie, kiedy wystarcza nam dokładność, jaką diagram w ogólności może przedstawić. W szczególności przyjąwszy np. jak na Fig. 16, jednostkę $r = 100^{mm}$, dokładność funkcyj goniometrycznych, oznaczyć się dających z diagramu, sięga do trzeciej dziesiętnej, gdy wolnem okiem odczytując, zwykłą podziałką milimetrową te funcye wymierzamy, — co wystarcza w wielu wypadkach, a zwłaszcza w rachunkach przybliżonych; przytem kąty mogą być na 10 a nawet mniej minut dokładnie odczytane, obrawszy za koło podziałowe, koło zakreślone z bieguna promieniem równym jedności. Że dokładnością wykreślenia, delikatnością linij konstrukcyjnych, powiększeniem jednostki a szczególnie środkami optycznymi, granice dokładności w odczytaniu diagramu powiększyć możemy, nie potrzeba zdaje się tłumaczyć.

Dla uzupełnienia diagramu, li tylko ze względu na dogodne jego użycie, możemy także wykreślić, na Fig. 15. wykropkowane koła i proste, dla ujemnych wstaw, dostaw, siecznych i dosiecznych, chociaż ściśle rzecz biorąc jest to zbytecznem, zwłaszcza, że zwrot kierunku promienia wodzącego odpowiadającego pewnemu kątowi, jest znamieniem ujemności jego funkcyi goniometrycznej.

Na Fig. 16. przedstawionym jest diagram goniometryczny dla kątów od *0* do 90 stopni. Jego dokładność łatwo skontrolować i ocenić na podstawie wyrytych podziałek. Dla dokładności i ułatwienia w odczytaniu, urządzamy podziałkę stopni na minuty poprzecznie. Załączoną poprzeczną podziałkę linijną stosujemy, posługując się zwykłym liniałem (bez podziałki) i cyrklem. Jednostka diagramu jest zarazem jednostką tejże podziałki.

Gdy używamy liniału przenośnego, na którego krawędzi nakreśloną jest podziałka diagramu, to po przyłożeniu takowej (*AB* na Fig. 15 i 16), jej punktem zerowym do bieguna *O*, zaś względem osi biegunowej *OX* pod kątem danym φ, możemy w punktach przecięcia krawędzi liniału z liniami biegunowemi funkcyj goniometrycznych, odczytać odrazu (na tejże podziałce) wielkości liczebne wszystkich funkcyj goniometrycznych danego kąta φ. Odwrotne działanie odbywa się, w również prosty a zrozumiały sposób.

Zestawienie wszystkich linij biegunowych funkcyj goniometrycznych w jeden diagram, dozwala porównać, wybrać i wprowadzić w rachunek tę właśnie funkcyą goniometryczną, która dany kąt najdokładniej oznaczyć jest w stanie, a która także z diagramu stosunkowo najdokładniej oznaczyć się daje. Po przyłożeniu bowiem liniału pod kątem danym względem osi biegunowej, na pierwszy rzut oka można spostrzedz, które z linij biegunowych funkcyj goniometrycznych więcej lub mniej skośnie z krawędzią liniału się przecinają, jakoteż o ile małej zmianie danego kąta, odpowiada mała lub większa zmiana tej lub owej funkcyi goniometrycznej. Uwidocznione na Fig. 15 i 16 linie konstrukcyjne i oznaczenia liczebne dotyczące punktów przecięcia poszczególnych biegunowych funkcyj goniometrycznych, oznaczonych wyrazami: *sinus*, *cosinus*, itd., są łatwo zrozumiałe.

Możemy na podstawie Fig. 16 oznaczyć odpowiadające np. kątowi 35^0 funkcye goniometryczne, mianowicie:

$$
\begin{aligned}
Oa &= \sin \ (35^0) = 0{,}574,\\
Ob &= \mathrm{tang} \ (35^0) = 0{,}700,\\
Oc &= \cos \ (35^0) = 0{,}819,\\
Od &= \sec \ (35^0) = 1{,}221,\\
Oe &= \mathrm{cotang}(35^0) = 1{,}428,\\
Of &= \mathrm{cosec} \ (35^0) = 1{,}743,
\end{aligned}
$$

Łatwość środków wykreślających, prostota w układzie a szczególniej w użyciu stanowią główne zalety opisanego diagramu; należy on do kategoryi tablic wykreślnych, które wyryte na płytach metalowych lub szklannych, każdemu praktycznemu technikowi przydać się mogą.