KRZYWE PRZEJŚCIOWE
NA DROGACH ŻELAZNYCH,
Z PRZYKŁADAMI RACHUNKOWYMI
I TABLICAMI DO UŻYTKU PRAKTYCZNEGO,

przez F. R. HELMERT'A,

Dr. fil., profesora zwyczajnego geodezyi i astronomii sferycznej przy królewskiej szkole politechnicznej w Akwizgranie.

Przekład dokonany z upoważnienia autora

przez **Wacława Rzepeckiego,**

Inżyniera.

(Dokończenie.) [1]

---

§. 26. **Połączenie koła z jego styczną, jeżeli ani stycznej nie można przesunąć, ani koło nie może otrzymać skróconego promienia.**
W poprzednich wzorach będzie $r' = R$, $r = \infty$, $e = 0$.

Trzeba obliczyć:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}M = 1{,}234\ L \\ \mathfrak{E}M = 0{,}234\ L \\ AM = 0{,}789\ L \end{array}\right\} L = \frac{q}{R}\ ^{2)} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

a stąd wynika dla wytknięcia $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{E}$ (Fig. 22).

$$\begin{array}{l} A\mathfrak{A} = 0{,}445\ L \\ A\mathfrak{E} = 1{,}023\ L \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Wszystkie punkty między $\mathfrak{A}$ i A posuwa się na wewnętrz o

$$\frac{\overline{\mathfrak{A}P}^3}{6\,q}$$

---

[1] Tabl. IX, dołączona do zeszytu XI r. z., obejmuje wszystkie figury, odnoszące się do niniejszego artykułu. (*P. R.*)

[2]
$$\mathfrak{A}M = {}^1/_2 \cdot \frac{q}{R}\left\{1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{{}^1/_3}}\right\}$$
$$\mathfrak{E}M = {}^1/_2 \cdot \frac{q}{R}\left\{-1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{{}^1/_3}}\right\}$$
$$AM = {}^1/_2 \cdot \frac{q}{R}\left\{1 + \sqrt{{}^1/_3}\right\}.$$

a punkty między A i M o

$$\frac{\mathfrak{A}P^3}{6q} - \frac{\overline{AP}^2}{2R};$$

Punkt M wreszcie przesuwa się o $\frac{\overline{\mathfrak{C}M}^3}{6q}$; punkty P między M i $\mathfrak{C}$ przesuwa się również o $\frac{\overline{\mathfrak{C}P}^3}{6q}$. Dla *najmniejszego promienia* w $\mathfrak{M}$ będzie podług (24):

$$\frac{1}{\rho_{\min}} = \frac{1{,}234}{R} \text{ [1]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Podwyższenie szyny zewnętrznej, które się rozpoczyna zerem w $\mathfrak{A}$ rośnie ciągle do $\mathfrak{M}$, tam jest największe i ku $\mathfrak{C}$ znów ciągle się zmniejsza, dla tego będzie ono w $\mathfrak{M}$ tylko o 0,234 ^{m} (t. j. o mniej więcej o $^1/_4$) większe niż w $\mathfrak{C}$. Jeżeli więc z tego powodu podwyższenie szyny *punktu* $\mathfrak{N}$, w którym (od $\mathfrak{A}$ rosnąc) takowe jest równe podwyższeniu w punkcie $\mathfrak{C}$, zatrzyma się stale aż do $\mathfrak{C}$, wtedy prawdopodobnie nie okaże się w ruchu żadna większa niedogodność. Ten *punkt* $\mathfrak{N}$ zaś leży widocznie w odległości L od $\mathfrak{A}$, ponieważ $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ staje się równe $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$.

Przykład 15.

$$R = 400^{\,m},\quad q = 12000,$$

w takim razie: $L = 30^{\,m}$ i $A\mathfrak{A} = 13{,}35^{\,m}$,

$$A\mathfrak{C} = 30{,}69^{\,m},\quad AM = 23{,}67^{\,m},$$

zatem długa parabola czyli linia:

$$\mathfrak{A}M = 37{,}02^{\,m},$$

natomiast krótka parabola czyli linia:

$$M\mathfrak{C} = 7{,}02^{\,m}.$$

Normalne przesunięcie punktu M wynosi:

$$M\mathfrak{M} = \frac{7{,}02^3}{6\,.\,12000} \text{ t. j. } 0{,}005^{\,m}.$$

Normalne przesunięcie punktu A wynosi $\frac{13{,}35^3}{6.12000}$, to jest 0,033 ^{m}. Dla punktu $\mathfrak{N}$ mamy $\mathfrak{A}N = L = 30{,}00$, a normalne przesunięcie $N\mathfrak{N}$ wynosi:

$$\frac{30{,}00^3}{6\,.\,12000} - \frac{(30-13{,}35)^2}{2\,.\,400} = 0{,}028^{\,m}.$$

Podwyższenie szyny w $\mathfrak{A}$ jest równe zeru, rośnie ciągle do $\mathfrak{N}$, od którego to punktu zatrzymuje tę samą wielkość, jak na łuku kołowym t. j. jeżeli $c = 40 : 0{,}100^{\,m}$. Najmniejszym promieniem krzywizny w $\mathfrak{M}$ jest $\frac{400}{1{,}234}$ t. j. 324 ^{m}, a ponieważ $\frac{324^2}{5} > 12000$, to dane rozwiązanie daje nam wystarczające przybliżenie.

---

[1] $$\frac{1}{R}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2\sqrt{1/_3}}\right).$$

Jeżeli łuk koła nie daje wystarczającego miejsca, wtedy trzeba postępować podług § 18. [1])

Uwaga 6. Noerdling rozwiązuje to zadanie za pomocą jednej paraboli sześciennej (Fig. 23), która jednakże łączy się w $\mathfrak{C}$ tylko stycznie, lecz nie przy jednakowej krzywiźnie, tylko z promieniem $^3/_4$ R. Zatem podwyższenie szyny w $\mathfrak{C}$ jako w punkcie końcowym linii $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, musiałoby wynosić 1,333 podwyższenia w kole, co przy zaniedbaniu daje większe błędy, niż nasze rozwiązanie.

Chavès używa również tylko jednej paraboli (Fig. 24) która ma wprawdzie równą krzywiznę, ale zamiast stycznie przechodzi w łuk koła pod kątem $\alpha = 0{,}077\ \frac{L}{\mathrm{R}}$ w pomiarze łukowym t. j. $4{,}4\ \frac{L}{\mathrm{R}}$ w stopniach. Ponieważ L w maximum [§ 12 (13)] może tylko wynosić $^1/_5$ R, będzie przeto $\alpha \leqq 0{,}9^0$, a zgięcie to trzeba wyrównać łukiem koła o mniejszym promieniu niż R. Z tego powodu *Noerdling* odrzuca to rozwiązanie.

Nasze rozwiązanie jest w każdym razie ściśle i unika wszelkich nieciągłości; oczywiście rzeczy niemożliwej (od $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{C}$ dać tylko rosnącą krzywiznę) możliwą zrobić nie może, tak jak i każde inne rozwiązanie (§ 11).

§ 27. **Między dane dwa łuki koła, schodzące się stycznie w punkcie A, wstawić krzywą przejściową nie skrócając promieni.**

To zadanie rozwiązaliśmy już w § 21. Z § 26 wyprowadzamy łatwo następujące, znacznie odmienne rozwiązanie (Fig. 25). W figurze tej będzie:

$$r = R, \quad r' = R', \quad e = 0.$$

Obrachować trzeba :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}M &= 1{,}234\ (L' - L)\ ^{2)} \\ \mathfrak{C}M &= 0{,}234\ (L' - L)\ \ldots\ldots \\ AM &= 0{,}789\ (L' - L) \end{aligned} \qquad (28)$$

[1]) Rozwinięcie § 17 i 18 przeprowadzić można w ten sposób, że takowe zachowuje swą wartość dla dowolnie wielkich λ i wtenczas otrzymujemy połączenie prostych w ten sposób, że zatrzymujemy wierzchołek $\mathfrak{S}$ danego łuku koła, ale natomiast zmieniamy promień, przez co osiągamy odstęp m pomiędzy łukiem i prostą, potrzebny podług § 13 do wsunięcia krzywej przejściowej. To rozwiązanie jednakże nie zdaje się nam bardzo praktycznem w stosunku do powyższych, bo: 1⁰ wzory nie są bardzo dogodne, 2⁰ wytykanie nowego łuku koła jest trochę uciążliwe, jeżeli takowy jest długim.

[2])
$$\mathfrak{A}M = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{R'} - \frac{q}{R}\right)\left[1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{^1/_3}}\right]$$
$$\mathfrak{C}M = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{R'} - \frac{q}{R}\right)\left[-1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{^1/_3}}\right]$$
$$AM = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{R'} - \frac{q}{R}\right)\left(1 + \sqrt{^1/_3}\right)$$

a z tego wynika dla wytknięcia z punktów $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{E}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}A &= 0{,}445\,(L' - L)\\ A\mathfrak{E} &= 1{,}023\,(L' - L)\end{aligned} \quad \ldots\ldots\ (29)$$

Wszystkie punkty P między $\mathfrak{A}$ i A przesuwa się na wewnątrz o $\frac{\overline{\mathfrak{A}P}^3}{6q}$, punkty zaś P między A i M o:

$$\frac{\overline{\mathfrak{A}P}^3}{6q} + \frac{\overline{AP}^2}{2R} - \frac{\overline{AP}^2}{2R'};$$

Punkt M przesuwa się na wewnątrz o $\frac{\overline{\mathfrak{E}M}^3}{6q}$ i odpowiednio punkty P między M i $\mathfrak{E}$.

Dla *najmniejszego promienia* w $\mathfrak{M}$ będzie podług (24).

$$\frac{1}{\rho\,\text{min}} = \frac{1{,}234}{R'} - \frac{0{,}234}{R} \ ^{1)}$$

Podwyższenie szyny zewnętrznej rośnie ciągle od $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{M}$, i zmniejsza się stąd do $\mathfrak{E}$, lecz już w *punkcie* $\mathfrak{N}$, który jest oddalonym od $\mathfrak{A}$ o $(L' - L)$ jest tak wielkie, jak w $\mathfrak{E}$, a jeżeli przyjmiemy od $\mathfrak{N}$ do $\mathfrak{E}$ to samo stałe podwyższenie, co w $\mathfrak{E}$, to największy błąd w $\mathfrak{M}$ będzie wynosił tylko $0{,}234\left(1 + \frac{R'}{R}\right)$ podwyższenia w $\mathfrak{E}$.

Rozwiązania podług §§ 21 i niniejszego tem różnią się od siebie, że w § 21 krzywa przejściowa leży cała zewnątrz, tu zaś cała wewnątrz danego toru. Tamta nie może być użytą jeżeli $R = \infty$, co przy tej (§ 26) bardzo wygodnie może mieć miejsce. Przy tamtej leży największa długość krzywej przejściowej nad wielkiem, tutaj nad małem kołem. Przy tamtej krzywej uskutecznia się przeprowadzenie za pomocą większego, tu zaś za pomocą mniejszego promienia krzywizny.

Zostawiamy praktyce wolny wybór pomiędzy dwiema metodami.

Przykład 16.

$$R = 600^{m},\quad R' = 180^{m},\quad q = 6000,$$

zatem:

$$\begin{gathered} L = 10^{m}, \qquad L' = 33{,}33^{m},\\ L' - L = 23{,}33^{m} = \mathfrak{A}N \text{ dla } N.\\ \mathfrak{A}M = 28{,}79^{m},\quad \mathfrak{E}M = 5{,}46^{m}\\ AM = 18{,}41^{m} \text{ dla } M\\ \left.\begin{aligned} A\mathfrak{A} &= 10{,}38^{m}\\ A\mathfrak{E} &= 23{,}87^{m}\end{aligned}\right\} \text{dla } \mathfrak{A} \text{ i } \mathfrak{E}.\end{gathered}$$

Przesunięcie normalne wynosi:

dla A: $$\frac{10{,}38^3}{6.6000} = 0{,}031^{m},$$

---

1) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)\sqrt{1 + \sqrt{1/2}}$$

dla N: $\frac{23,33^3}{6.6000} + \frac{12,95^2}{2.600} - \frac{12,95^2}{2.180} = 0,028^{\,m}$,

dla M: $\frac{5,46^3}{6.6000} = 0,005^{\,m}$.

Jeżeli użyjemy stałej $c = 36$, to podwyższenie szyny będzie wynosiło w $\mathfrak{A}$ 0,060^m w $\mathfrak{U}$ i $\mathfrak{E}$ 0,200^m, a w $\mathfrak{M}$ podług teoryi będzie o:

$$0,234\left(1 - \frac{180}{600}\right) . 0,200 = 0,033^{\,m}$$

większe, niż w $\mathfrak{U}$ i $\mathfrak{E}$. Najmniejszy promień krzywizny w $\mathfrak{M}$ jest równy:

$$1 : \left(\frac{1,234}{180} - \frac{0,234}{600}\right) = 155^{\,m}.$$

Gdyby nawet warunek:

$$\tfrac{1}{5} . 155^2 \geqq 6000$$

nie miał się wypełnić, to różnica ta w żadnym razie nie jest tak wielką, ażeby rozwiązanie to należało odrzucić [1]).

§ 28. **Dane są dwie proste połączone łukiem koszykowym,** złożonym z dwóch łuków kołowych, z których mniejszy jest za krótki do wstawienia krzywej przejściowej.

Ten przypadek wyjątkowy zdarza się bezwątpienia częściej, aniżeli przypadek, w którym łuk koła o większym promieniu jest za krótki i dla tego ograniczamy się także tylko na tym przypadku wyjątkowym. Objaśni to zaraz przykład.

Przykład 17.

$$R = 600^{\,m},\quad R'\ 180^{\,m};\quad q = 6000.$$

Długość mniejszego łuku 36^m.

Wstawienie krzywych przejściowych ma się odbywać z zatrzymaniem o ile możności danego toru. Małemu łukowi koła który jest za krótki, z którego to powodu trzeba go opuścić, odpowiada kąt przyśrodkowy $T = \frac{36}{180} = 0,2$ w pomiarze łukowym. Wyobrażamy więc sobie obwód wielkiego koła przedłużonym aż do promienia KA_2, prostopadłego do prostej. W porównaniu z Fig. 21 mamy teraz ujemne $e = A_1 A_2$, bo w naszej figurze jest teraz prosta kołem r owej figury i odpowiednio do tego, przedłużone koło o promieniu R—kołem r' tejże figury. We wzorach § 25 trzeba zatem:

zamiast	r	r'	e	
wstawić	∞	600	$-$ 8,40^m	(31)

Ażeby otrzymać podaną wartość e, mamy najprzód następne równanie, łatwe do otrzymania za pomocą rzutu.

---

[1]) Jeżeli się zważa na warunki ograniczające w Uw. 5, rozwiązanie to pokazuje się jako zupełnie wystarczające, tak dla $\mathfrak{M}$ jako punktu końcowego linii $\mathfrak{E}\mathfrak{M}$, lub jako punktu końcowego linii $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$..

$$A_1 A_2 + R' + (R - R') \cos T = R, \text{ t. j.}$$
$$A_1 A_2 = (R - R')(1 - \cos T),$$

dla tego ze względu na Fig. 21:

$$- e = (600 - 180) \frac{0{,}2^2}{2} = 8{,}40^{\,m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Podług § 25 (21) mamy:

$$A_2 M_2 = {}^1\!/_2 \,.\, \frac{6000}{600} \left(1 + \sqrt{{}^1\!/_3 + \frac{8 \,.\, 8{,}40 \,.\, 6000}{\left(\frac{6000}{600}\right)}}\right), \quad (33)$$

czyli:

$$A_2 M_2 = 5\,[1 + 20{,}09] = 105{,}45.$$

Podług § 25 (22) mamy dalej ze względu na obrachunek $A_2 M_2$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} M_1 &= 5\,[\;\;\,1 + \sqrt{1 + 2 \,.\, 20{,}09}] = 37{,}08^{\,m}, \\ \mathfrak{E} M_2 &= 5\,[-1 + \sqrt{1 + 2 \,.\, 20{,}09}] = 27{,}08^{\,m}, \end{aligned} \quad . \quad (34)$$

W naturze wprawdzie A_2 nie jest dane, ale za to są dane A i A', a ponieważ:

$$\begin{aligned} A_2 A' &= 600 \,.\, 0{,}2 = 120^{\,m} \\ A_2 \mathfrak{E} &= 105{,}45 + 27{,}08 = 132{,}53^{\,m} \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

mamy zatem dla *wytknięcia punktów* $\mathfrak{E}$ i $\mathfrak{A}$ (Fig. 26):

$$\begin{aligned} A' \mathfrak{E} &= 132{,}53 - 120 = 12{,}53^{\,m}, \\ \mathfrak{A} \mathfrak{E} &= 37{,}08 + 27{,}08 = 64{,}16^{\,m}, \\ A \mathfrak{A} &= 64{,}16 - 12{,}53 - 36 = 15{,}63^{\,m}, \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

z których to wymiarów jeden służy dla kontroli.

Następnie *do wytknięcia punktu* $\mathfrak{M}$ spólnego obu parabolom, służą spółrzędne odniesione do przedłużonej prostej, jako osi odciętych:

$$A M_1 = 37{,}08 - 15{,}63 = 21{,}45^{\,m},$$
$$M_1 \mathfrak{M} = \frac{37{,}08^3}{6 \,.\, 6000} = 1{,}416^{\,m}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

albo jeżeli się wymierza na danym łuku koła od A tę samą długość w $A M_1$, rzędna:

$$1{,}416 - \frac{21{,}45^2}{2 \,.\, 180} = 0{,}138^{\,m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37^*)$$

Dla kontroli mamy dla tego samego punktu $\mathfrak{M}$ odciętą, wymierzoną od $\mathfrak{E}$ przez A na danym torze $= 27{,}08^{\,m}$ i rzędną

$$\frac{27{,}08^3}{6 \,.\, 600} + \frac{(27{,}08 - 12{,}53)^2}{2 \,.\, 600} - \frac{(27{,}08 - 12{,}53)^2}{2 \,.\, 180} = 0{,}140^{\,m} (37\dagger)$$

która się zgadza zupełnie wystarczająco z wartością wprzód obliczoną.

Podobnie jak $\mathfrak{M}$ można wytknąć *wszystkie inne punkty* obu paraboli, przyczem uważać trzeba tylko na to, że te punkty między $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{M}$ trzeba traktować, jak punkt $\mathfrak{M}$ uważany za końcowy punkt linii $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ i dalej że punkty między $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{E}$ traktuje się tak samo, jak punkt $\mathfrak{M}$ uważany za punkt końcowy linii $\mathfrak{E}\mathfrak{M}$.

Podwyższenie szyny, które w $\mathfrak{A}$ jest równe zeru, rośnie ciągle do $\mathfrak{M}$ i ztamtąd zmniejsza się aż do $\mathfrak{E}$. Najmniejszy promień krzywizny w $\mathfrak{M}$ oblicza się albo za pomocą wyrażenia:

$$\frac{6000}{37{,}08} = 161{,}8^{\,\mathrm{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

albo za pomocą wyrażenia:

$$1 : \left(\frac{1}{600} + \frac{27{,}08}{6000}\right) = 161{,}8 \quad \ldots \quad (38^{*})$$

Jeżeli przyjmiemy $c = 36$, to podwyższenie będzie w $\mathfrak{E} = 0{,}060^{\,\mathrm{m}}$, natomiast w $\mathfrak{M} = 0{,}222^{\,\mathrm{m}}$. Profil podłużny szyny zewnętrznej, jest w $\mathfrak{M}$ śpiczasty. Wierzchołek ten można odciąć za pomocą krótkiej prostej szyny.

Podane rozwiązanie daje nam jeszcze wystarczające przybliżenie, ponieważ nie oddalamy się zbyt wiele od warunku określonego nierównością.

$$6000 \leqq {}^{1}/_{5} \,.\, 161{,}8^{2}.$$

W żadnym razie atoli nie możemy posuwać dalej tego opuszczenia, tylko powinniśmy się starać pomódz sobie w inny jaki sposób, gdyby przyjęcie mniejszego q nie wydawało się dobrem do użycia, np. przez zupełnie nowe wytknięcie łuku koszykowego, przydatniejszego do wstawiania krzywych przejściowych.

VII. Krzywe przejściowe ze zmiennym względnym spadkiem szyny zewnętrznej.

§ 29. **Uwaga wstępna, stanowiąca dalszy ciąg § 3-go i 4-go.** Niech będzie na Fig. 27 parabola dwukwadratowa $\mathfrak{A}Q$ odniesioną do łuku koła $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$ jako do osi odciętych przez równanie:

$$\eta = \frac{\zeta^{4}}{24\,p}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gdzie p oznacza ilość stałą, a η rzędną normalną na zewnątrz do osi odciętych. Jeżeli równanie to odniesiemy do dowolnego punktu $\mathfrak{P}$, to będzie:

$$\zeta = \mathfrak{A}P \quad \text{i} \quad \eta = P\mathfrak{P}.$$

Niech będzie teraz $\mathfrak{Q}$ punktem nieskończenie bliskim punktu $\mathfrak{P}$, a różniczka łuku $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = d\sigma$, której odpowiada różnica odciętych $PQ = d\zeta$ i różnica rzędnych $Q\mathfrak{Q} - P\mathfrak{P}$ t. j. $\mathfrak{Q}Q' = d\eta$; niech będzie dalej $\mathfrak{K}$ środkiem krzywizny dla krzywej w punkcie $\mathfrak{P}$. W takim razie mamy kąt $\mathfrak{K}\mathfrak{P}K = \vartheta$ między promieniem wodzącym $K\mathfrak{P}$ i normalną $\mathfrak{K}\mathfrak{P}$ i w małym trójkącie $\mathfrak{P}Q'\mathfrak{Q}$:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\mathfrak{Q}Q'}{\mathfrak{P}Q'}.$$

Mamy zaś $\mathfrak{Q}Q' = d\eta$, a $\mathfrak{P}Q'$ obliczamy z PQ za pomocą proporcyi:

$$\mathfrak{P}Q' : PQ = K\mathfrak{P} : KP,$$

z czego wynika:

$$\mathfrak{P}Q' = d\zeta\left(1 + \frac{\eta}{r}\right);$$

wypada zatem:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{d\eta}{d\zeta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\eta}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Do obrachowania ρ, promienia krzywizny w $\mathfrak{P}$, mamy $\rho d\tau = d\sigma$. Podług fig. 27 mamy zaś:

$$d\sigma = \sqrt{\left(1 + \frac{\eta}{r}\right)^2 d\zeta^2 + d\eta^2},$$

$$d\tau = d\omega - d\vartheta,$$

$$d\omega = \frac{d\zeta}{r},$$

$$d\vartheta = \cos^2\vartheta . d(\operatorname{tg}\vartheta),$$

z czego wypada:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{1}{r} - \cos^2\vartheta \frac{d(\operatorname{tg}\vartheta)}{d\zeta}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\eta}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Przypuściwszy teraz, że η w stosunku do r jest bardzo małe, t. j. mniej więcej:

$$\eta \leqq 0{,}01\, r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

to dla oznaczenia ρ wystarczającem będzie jeżeli założymy:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{d\eta}{d\zeta}, \quad \frac{d(\operatorname{tg}\vartheta)}{d\xi} = \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}\left(1 - \frac{\eta}{r}\right),$$

$$\cos^2\vartheta = 1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2,$$

$$1 : \sqrt{\left(1 + \frac{\eta}{r}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2} = 1 - \frac{\eta}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2.$$

Wynika zatem z (3):

$$\frac{1}{\rho} = \left[1 - \frac{\eta}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2 \quad \left[\frac{1}{r} - \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}\left(1 - \frac{\eta}{r} - \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2\right)\right]\right].$$

Lecz mamy znowu:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\zeta^3}{6p} = \frac{4\eta}{\zeta},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} = \frac{\zeta^2}{2p} = \frac{12\eta}{\zeta^2},$$

a tym sposobem przekonywamy się łatwo, że opuszczając $\frac{\eta}{r}$ i $\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2$

w powyższem wyrażeniu za $\frac{1}{\rho}$, popełniamy błąd najwięcej $\frac{1}{50} \cdot \frac{1}{r}$, dopóki oprócz (4) wypełniamy jeszcze nierówność:

$$\frac{4\eta}{\zeta} \leqq 0{,}1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Zatem w dostatecznem przybliżeniu będzie:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} - \frac{\zeta^2}{2p} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Weźmy dalej:

$$\vartheta = \frac{4\eta}{\zeta} \quad \ldots \quad (7) \qquad \sigma = \zeta \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

to przyjąwszy (4 i 5) będzie błąd w ϑ nie większy nad 3 minuty a błąd w σ jeszcze mniejszy niż $\frac{1}{400}\sigma$.

Jeżeli parabola dwukwadratowa zakrzywia się na wewnątrz, zamiast na zewnątrz (por. Fig. 27), to sposób rozwijania wzorów pozostaje ten sam. Znajdziemy z

$$\eta' = \frac{\zeta'^4}{24p} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1^*)$$

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{d\eta'}{d\zeta'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\eta'}{r}} \quad \ldots \ldots \quad (2^*)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{r} + \cos^2\vartheta' \cdot \frac{d\,(\operatorname{tg}\vartheta')}{d\zeta'}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\eta'}{r}\right)^2 + \left(\frac{d\eta'}{d\zeta'}\right)^2}} \quad \ldots \ldots \quad (3^*)$$

i przypuściwszy $\eta' \leqq 0{,}01\,r$ (4*), $\frac{4\eta'}{\zeta'} \leqq 0{,}1$ (5*), mamy wystarczające wzory przybliżone:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} + \frac{\zeta'^2}{2p} \quad \ldots \ldots \quad (6^*)$$

$$\vartheta' = \frac{4\eta'}{\zeta'}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7^*)$$

$$\sigma' = \zeta'. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8^*)$$

Tor zakrzywiony podług paraboli dwukwadratowej potrzebuje w zewnętrznej szynie podwyższenia:

$$z = \frac{c}{\rho} = \frac{c}{r} \mp \frac{\zeta^2}{2\frac{p}{c}}, \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

to zaś, ze względu na (8, 8*) odpowiada właśnie równaniu (3) § 4-go i profilowi podłużnemu fig. 3, z tą nic nieznaczącą różnicą, że w (9) zachodzi jeszcze pewne stałe podwyższenie, które w (3) § 4-go, gdzie mamy zetknięcie się z prostą, nie istnieje. Stała podwyższenia c'' będzie:

$$c'' = \frac{c}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Zamiast c'' albo p, zdaje się rzeczą korzystną wprowadzić względny spadek szyny zewnętrznej *w punkcie końcowym* użytej części paraboli. Jeżeli temu punktowi damy wskaźnik n, *to spadek względny (największy)* będzie tamże:

$$G = \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta = \zeta_n} = c''\zeta_n = \frac{c}{p} \cdot \zeta_n \quad \ldots \quad (11)$$

Dla stałej p mamy teraz:

$$p = \frac{c\zeta_n}{G} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

§. 30. **Zestawienie wzorów.** a) Parabola dwukwadratowa zakrzywia się *na zewnątrz* koła o promieniu r, służącego za oś odciętych:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{\zeta^4}{24p} \\ \vartheta &= \frac{\zeta^3}{6p} \\ \sigma &= \zeta \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{r} - \frac{\zeta^2}{2p} \\ p &= \frac{c}{G}\zeta_n \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{Warunki ważności tych} \\ \text{wzorów:} \\ \eta_n \leqq \frac{1}{40}\zeta_n, \\ \eta_n \leqq \frac{1}{100} r. \end{array} \quad \ldots \quad \text{IV.}$$

b) Parabola zakrzywia się *na wewnątrz*:

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= \frac{\zeta'^4}{24p} \\ \vartheta' &= \frac{\zeta'^3}{6p} \\ \sigma' &= \zeta' \\ \frac{1}{\rho'} &= \frac{1}{r} + \frac{\zeta'^2}{2p} \\ p &= \frac{c}{G}\zeta'_n \text{ [1]} \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{Warunki ważności tych} \\ \text{wzorów:} \\ \eta'_n \leqq \frac{1}{40}\zeta'_n \\ \eta'_n = \frac{1}{100} r. \end{array} \quad \ldots \quad \text{V.}$$

§. 31. **Połączenie krzywą przejściową o zmiennym spadku dwóch stycznie schodzących się łuków kołowych, z których przynajmniej jeden zezwala na małą zmianę promienia.**

Dajmy na to, że $\mathfrak{A}A_1$ i A_1E są dane łuki kół o promieniach R i R'. Skróćmy pierwszy o pewną tymczasem nieokre-

---

[1]) Parabola dwukwadratowa różni się w swem zastosowaniu jako krzywa przejściowa głównie tem od sześciennej, że dla któregokolwiek ze swych kół krzywizny, jako osi odciętych, nie jest jak sześcienna — parabolą tego samego gatunku.

śloną małą ilość $E\mathfrak{C} = e$, którą w obliczeniach w porównaniu do R będziemy mogli opuścić. Prowadzimy ku sobie dwie parabole dwukwadratowe z punktów $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{A}$, obu obwodów kół odstających od siebie o e. Paraboli zaczynającej się w $\mathfrak{A}$ odpowiadają wzory V, a zaczynającej się w $\mathfrak{C}$ wzory IV.

Już bez rachunku widzimy, że równość największych spadków G w punkcie zetknięcia $\mathfrak{M}$, jakoteż równość kątów ϑ i ϑ' wymagają równej długości obu krzywych przejściowych, przyczem punkt $\mathfrak{M}$ leżeć powinien normalnie nad A_1. Będzie zatem:

$$A_2\mathfrak{M} = \frac{L^4}{384p} = A_1\mathfrak{M},$$

$$\vartheta = \frac{L^3}{48p} = \vartheta',$$

$$\frac{1}{\mathfrak{M}\mathfrak{K}} = \frac{1}{R'} - \frac{L^2}{8p} = \frac{1}{R} + \frac{L^2}{8p},$$

$$p = \frac{2c}{G} \cdot \frac{L}{4}.$$

Z obu wartości na $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ wynika:

$$\frac{L^2}{4p} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

t. j. ze względu na wyrażenie za p otrzymamy:

Długość krzywej przejściowej:

$$L = \frac{2c}{G}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13^*)$$

Konieczny najmniejszy odstęp obu obwodów kół:

$$e = \frac{L^3}{48\frac{2c}{G}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Warunek ograniczający:

$$e < \frac{1}{50} L\ ^{1)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

W tych wzorach uważać można albo L i e albo G i e albo L i G za nieznane, lecz najczęściej w praktyce będzie miał miejsce przypadek pierwszy, w którym G otrzymuje pewną wartość.

---

[1]) Największą odciętą i rzędną są $0,5\,L$ i $0,5\,e$; warunki ograniczające w IV V dają:

$$e < \frac{1}{50} R'; \quad e < \frac{1}{40} L.$$

Podług (13*) i (14) mamy zaś:

$$e = \frac{L^2}{40}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) \text{ czyli } e < \frac{L^2}{48R'}$$

Rugując R' z tej i z pierwszej nierówności, otrzymamy okrągło:

$$e < \frac{1}{50} L,$$

nierówność obejmującą już w sobie drugą z poprzednich.

Wszystkie zadania o wstawianiu krzywych przejściowych, które pierwej traktowaliśmy w przypadku jednostajnego względnego spadku szyny zewnętrznej, można znowu teraz na nowo rozwiązać. Ograniczamy się na kilka przykładach liczebnych.

*Przykład 1** (Por. Fig. 30). Dane.

$$R = \infty\ ,\quad R' = 400^{\text{m}}.$$

Jeżeli przyjmiemy $\frac{2c}{G} = 12\,000$ (t. j. tak jak pierwej q) to

$$L = 30^{\text{m}},\quad e = \frac{30^3}{48\,.\,12000} = 0{,}047^{\text{m}}.$$

Wytykanie odbywa się w ten sposób, że odmierza się najprzód po obu stronach toru od danego punktu styczności A_1, — 15^{m} i otrzymuje przez to na prostej punkt początkowy $\mathfrak{A}$, na kole zaś punkt E_1, który o $0{,}047^{\text{m}}$ ku środkowi przesunięty, daje punkt E krzywej przejściowej. Punkt środkowy $\mathfrak{M}$ wynika z A_1 przez normalne przesunięcie o $0{,}024^{\text{m}}$.

Punkty P między $\mathfrak{A}$ i A_1 przesuwa się o $\frac{\overline{\mathfrak{A}P}}{24p}$, a punkty P między E_1 i A_1 o:

$$0{,}047^{\text{m}} - \frac{\overline{E_1P''}^4}{24p}$$

gdzie bierzemy:

$$p = 12\,000\ .\ \frac{30}{4} = 40\,000.$$

Podwyższenie szyny zewnętrznej jest, (jeżeli $c = 40$,) w $\mathfrak{A} =$ zeru, w $\mathfrak{E}$ równe:

$$\frac{46}{100} = 0{,}100^{\text{m}},$$

w $\mathfrak{M}$ równe:

$$\tfrac{1}{2}\ .\ 0{,}100 = 0{,}050^{\text{m}},$$

w środku między $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{M}$ równe:

$$\tfrac{1}{4}\ .\ 0{,}050 = 0{,}013^{\text{m}},$$

i również w środku między $\mathfrak{E}$ i $\mathfrak{M}$ równe

$$0{,}100 - \tfrac{1}{4}\ .\ 0{,}050 = 0{,}087^{\text{m}}.$$

Dla punktu $\mathfrak{P}$, między $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{M}$, oddalonego od $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, podwyższenie to wynosi:

$$\frac{40}{\rho},\ \text{przyczem}\ \frac{1}{\rho} = \frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}^2}{2p};$$

a dla punktu $\mathfrak{P}$ między $\mathfrak{E}$ i $\mathfrak{M}$, oddalonego od $\mathfrak{E}$ o $\mathfrak{E}\mathfrak{P}$:

$$\frac{40}{\rho},\ \text{przyczem}\ \frac{1}{\rho} = \frac{1}{400} - \frac{\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{P}}^2}{2p}.$$

Największy spadek względny w $\mathfrak{M}$ wynosi:

$$G = \frac{2\,.\,40}{12\,000} = \frac{2}{300},$$

zatem dwa razy większy, niż równy spadek przyjęty w pierwszem postępowaniu (str. 290). [1])

*Przykład 7** (Por. Fig. 31).

Dane $R = \infty$, $R' = 180^{m}$, zatem $T = \frac{1}{7,2}$ [2])

Przyjmujemy $\lambda = 12^{m}$, $\frac{2c}{G} = 6\,000$ i otrzymujemy:

$$\mathfrak{R} = 255{,}5^{m}, \text{ z czego wynika } \mathfrak{L} = 23{,}48^{m} \text{ i}$$

$$\mathfrak{e} = \frac{1}{48} \cdot \frac{23{,}48^3}{6\,000} \text{ t. j. } 0{,}045^{m}$$

Do sprawdzenia służy równanie:

$$12 + 23{,}48^{m} = 255{,}5 \cdot \frac{1}{7{,}2}$$

W celu wytknięcia punktów początkowych $\mathfrak{A}$ krzywych przejściowych, trzeba odmierzyć od punktu przecięcia W na obu prostych: 23,48 + 6, t. j. $29{,}48^{m}$. Od punktów $\mathfrak{A}$ odmierza się w tył 11,74 i $23{,}48^{m}$, wystawia tamże normalne:

$^1/_2 \cdot 0{,}045 = 0{,}023$ i $7 \cdot 0{,}045 = 0{,}315^{m}$

przez co otrzymuje się środki $\mathfrak{M}$ i punkty końcowe $\mathfrak{E}$. Którykolwiek punkt P między $\mathfrak{A}$ i A_1 przesuwa się normalnie o $\frac{\overline{\mathfrak{A}P}^4}{24p}$, a punkt P między A_1 i E normalnie o:

$$\frac{\overline{A_1P}^2}{2 \cdot 255{,}5} + 0{,}045^{m} - \frac{\overline{PE}^4}{24p}, \text{ przyczem}$$

$$A_1P + PE = 0{,}5\,\mathfrak{L},$$

$$p = 6000 \cdot \frac{23{,}48}{3} = 35220.$$

Łuk koła $\mathfrak{E}\mathfrak{E}$ wytyka się z cięciwy.

Podwyższenie szyny zewnętrznej (jeżeli $c = 36$) jest w $\mathfrak{E}\mathfrak{E} = 0{,}141^{m}$ w $\mathfrak{M} = 0{,}070^{m}$ a w $\mathfrak{A}$ — równe zeru. Dla dowolnego punktu $\mathfrak{P}$ między $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{M}$ ma ono wartość:

$$\frac{36}{\rho}, \text{ przyczem } \frac{1}{\rho} = \frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}^2}{2 \cdot 35220},$$

a dla punktu $\mathfrak{P}$ między $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{E}$ — wartość:

$$\frac{36}{\rho}, \text{ przyczem } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{255{,}5} - \frac{\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{P}}^2}{2 \cdot 35220}.$$

Największy spadek w $\mathfrak{M}$ wynosi:

$$G = \frac{2 \cdot 36}{6000} = \frac{6}{500}.$$

---

[1]) Przegląd Techniczny, Rok IV — Listopad.

[2]) W Fig. 31 opuszczono zaraz łuk koła ASA (por. Fig. 14) obchodzi on nas bowiem co najwyżej tylko przy obrachowaniu kąta T.

Poprzestaniemy na tych dwóch przykładach. Przyjęliśmy w nich stałą $\frac{2c}{G}$ umyślnie równą q, aby otrzymać tę samą długość przejścia co pierwej. Tymczasem w rzeczywistem zastosowaniu potrzeba $\frac{2c}{G}$ przyjąć cokolwiek większe, aby przy większej długości otrzymać także mniejszy największy względny spadek G, który przy równej długości jest dwa razy większy, niż poprzedzający stały względny spadek.

§ 32. **Uwagi tyczące się przejść o stałym i o zmiennym spadku.** Jesteśmy przekonani, że przejścia na ostatku podanego rzadko kto użyje i to poprostu dla trudności sporządzenia profilu podłużnego szyny zewnętrznej. O wiele praktyczniejszem zdaje się nam zatrzymanie wogóle stałego spadku i tylko na początku i na końcu krzywej przejściowej *urządzenie przejścia w stały spadek np.* jak pokazuje Fig 32, w której linie $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2$ ułatwiają nagłe przejścia. Rzeczą jest jasną, że zmianie profilu podłużnego powinna odpowiadać także zmiana w planie, która po prostu na tem polega, że wstawiamy także w planie dla linij $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2$ i $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ odpowiednie więcej spłaszczone łuki. Lecz przy praktycznej konstrukcyi *zmiana planu jest* niepotrzebną, bo niedostrzegalną. Przyjmijmy np. (na Fig. 32) $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2 = 6^m$, $q = 6000$, to rzędna dla $\mathfrak{A}_2$ będzie:

$$\frac{6^3}{6.6000} \text{ t. j. } 0.006^m,$$

skąd od razu widzimy, że krzywej więcej spłaszczonej (punktowanej), którąbyśmy mogli wstawić $\mathfrak{A}_1\mathfrak{M}\mathfrak{E}_1$ (Fig. 33) nie będzie można odróżnić od linii $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{E}$.[1]

VIII. Oznaczenie zgięcia bocznego szyny w przejściach.

§ 33. **Obliczenie bocznego zgięcia szyny.** Takowe tworzy się najlepiej, jeśli dla środka odpowiedniej szyny weźmiemy promień krzywizny ρ_m, a następnie obrachujemy jej zgięcie podług wzoru:

$$\frac{(\textit{długość szyny})^2}{8\,\rho_m}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

przyczem przypuszczamy, że ta szyna o średnim promieniu krzywizny ρ_m jest zgiętą w kształcie koła.

Tablica II podaje zgięcia, obrachowane podług wzoru (1), przy długości szyn wynoszącej 6^m.

Możnaby to zgięcie otrzymać inaczej jeszcze, lecz wtedy rachunek nie jest tak prostym, a przybliżenie wzoru (1) wystarcza,

[1]) O ile odpowiada celowi osiągnięcie połowy względnego podwyższenia szyny zewnętrznej przez zniżenie szyny wewnętrznej, nie potrzeba tutaj wykładać.

zwłaszcza że w żadnym przypadku nie można za *jednem* zgięciem nadać szynie kształtu parabolicznego.

Przy układaniu szyn wystarczy zawsze przy dłuższych krzywych przejściowych oznaczenie w planie początku, środka i końca krzywej, ponieważ złe ułożenie szyn dobrze giętych natychmiast można wtenczas poznać z nieregularnego kształtu torów.

Widzimy z tego zarazem, że wstawianie krzywych przejściowych o stałym spadku przedstawia większe trudności tylko przez: 1) obrachowanie i wytknięcie punktów głównych i 2) przez mozolne różnorodne gięcie szyn.

Aby otrzymać ostateczny tor w planie, najkorzystniej jest zawsze (z małymi wyjątkami por. § 17) przywrócić najprzód dany tor i używać takowego za oś odciętych. Ponieważ tor ten zawsze jeszcze będzie leżał na planie, dla tego też przywrócenie takowego nie sprawia żadnej nadzwyczajnej trudności.

Uwaga 6. Wygięcię to otrzymać możemy w inny sposób, mianowicie: odcinając średnią rzędną od arytmetycznego środka rzędnych dla początku i końca szyny. Tę rzędną w ten sposób można oznaczyć, że różnica będzie maximum; łatwiejszem ale mniej dokładnem będzie wziąć rzędną dla środka szyny. Ostatni sposób daje przy paraboli sześciennej ściśle to same zgięcie, co wzór (1), a przy paraboli dwukwadratowej; różnica jest w praktyce niedostrzegalną.

Gdyby można było przyjąć, że szyna gięta podług wzoru (1) jest zakrzywioną kolisto, to kąty przy użyciu paraboli sześciennej pomiędzy stycznemi końcowemi giętych szyn i pomiędzy stycznemi końcowemi odpowiednich punktów matematycznéj krzywej, byłyby równe. Przy tem samem przypuszczeniu można udowodnić łatwo, że krzywa złożona z szyn giętych podług wzoru (1), przy zetknięciu się szyn nie miałaby żadnego załamania, lecz przedstawiałaby się jako krzywa ciągła. Tylko przy przejściu w stykającą się prostą, albo w stykające się koło, ukazywałoby się małe załamanie.

§ 34. **Dla paraboli sześciennej** daliśmy zastawienie, z którego można wyprowadzić zgięcie szyn i promienie krzywizny co każde 6 ^{m}, przy wartościach q:

6000, 12000, 25000 i 40000,

co wystarcza, bo q zmienia się bardzo powoli (Tablica III) Przyjęto tu zarazem, że parabola sześcienna dotyka się prostej. Ponieważ jednak każda parabola sześcienna, odniesiona do łuku koła, jako do osi odciętych, może być także uważaną za przedłużenie paraboli stykającej się z prostą, dla tego też zestawienia (jak Tab. III) podają nam środek do ogólnego obrachowania zgięć.

Do obrachowania promieni krzywizny służą wzory

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\rho_m} = \dfrac{x_m}{q} & \text{zetknięcie z prostą.} \\ \dfrac{1}{\rho_m} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{\zeta_m}{q}, & \text{zetkn. z kołem } r \text{ na zew.} \\ \dfrac{1}{\rho_m} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\zeta'_m}{q} & \text{zetkn. z kołem } r \text{ na wew.} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

w których x_m, ζ_m, ζ'_m są odpowiedniemi odciętemi środków szyn w odniesieniu do początków spółrzędnych. Dopóki krzywa przejściowa ma tylko rosnącą lub zmniejszającą się krzywiznę, można każdy z jej punktów końcowych uważać że początek współrzędnych. Tego jednakże nie wolno według §§ 25 do 28.

Jako przykład obrachujemy zgięcia dla przykładu 11. (Fig. 17) Długość szyny $= 6^m$. W łuku koła o promieniu $R' = 180^m$ zgięcie jest $= 0{,}025$. Krzywa przejściowa $\mathfrak{E}'\mathfrak{A}'_1$ zaczyna się w $\mathfrak{E}'$ o promieniu krzywizny 180^m i kończy się w $\mathfrak{A}'_1$ o promieniu 836^m. Nasze zastawienie dla $q = 6000$ pokazuje natychmiast, że szyny od $\mathfrak{E}'$ do $\mathfrak{A}'_1$ powinny otrzymać następne zgięcia.

0,023, 0,018, 0,014, 0,009, 0,006,

przyczem wprawdzie przyjmujemy, że właśnie w punkcie $\mathfrak{E}'$ stykają się dwie szyny. Piąta szyna leży częściowo w kole o promieniu 836, dla którego zgięcie wynosi $0{,}006^m$.

Dla krótkiego kawałka paraboli sześciennej $\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} = 2{,}82^m$ może szyna przedstawiająca takową otrzymać albo jeszcze zgięcie 0,006, albo odpowiadające łukowi koła zgięcie $0{,}007^m$. [1])

§ 35. **Dla paraboli dwukwadratowej** jest obrachowanie zgięć o wiele mozolniejsze i można takich zastosowań, jak w Tablicy III używać tylko przy zetknięciu się z prostą.

Dla promieni krzywizny mamy wzory

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho_m} &= \frac{x_m^2}{2p} && \text{zetknięcia z prostą,} \\ \frac{1}{\rho_m} &= \frac{1}{r} - \frac{\zeta_m^2}{2p} && \text{zetkn. z kołem } r \text{ na zew.} \\ \frac{1}{\rho_m} &= \frac{1}{r} + \frac{\zeta'_m}{2p} && \text{zetkn. z kołem } r \text{ na wew.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

gdzie x_m, ζ_m, ζ'_m są odciętemi środków szyn w odniesienin do początku spółrzędnych. [2])

Jako przykład obliczamy zgięcia dla przykładu w § 31 (Nr. 1. Fig. 30). Jeśli w $\mathfrak{A}$ stykają się dwie szyny, to krzywa $\mathfrak{A}\mathfrak{E}$ otrzyma właśnie 5 szyn. Dla dwóch pierwszych $\mathfrak{A}$ jest początkiem spółrzędnych, $x_m = 3{,}9$; dla dwóch ostatnich $\mathfrak{E}$ jest, początkiem spółrzędnych, $\zeta'_m = 3{,}9$; dla środkowej szyny można rachować odciętą $x_m = 15$; nadto za pomocą $\zeta_m = 15$ otrzymujemy

---

[1]) Jak znaleźć w zestawieniu zgięcie dla odnośnego q, jeśli nie ma w niem podanego początkowego promienia krzywizny, nie potrzeba obszerniej objaśniać. Potrzebną interpolacyą można łatwo wykonać, ponieważ zgięcie co 6^m zawsze bardzo mało się zmienia.

[2]) Nie jest tu rzeczą obojętną, jak przy paraboli sześciennej, który z punktów zetknięcia się krzywych bierzemy za początek spółrzędnych.

	Odwrotny promień krzywizny	Boczne zgięcie
W prostej przed $\mathfrak{A}$	0	0,000
1 szyna	$\frac{3^2}{2.90000} = \frac{1}{20000}$	0,000
2 „	$\frac{9^2}{2.90000} = \frac{1}{2222}$	0,002
3 „	$\frac{15^2}{2.90000} = \frac{1}{400} - \frac{15^2}{2.90000} = \frac{1}{800}$	0,006
4 „	$\frac{1}{400} - \frac{9^2}{2,90000} = \frac{1}{400} - \frac{1}{2222}$	0,009
5 „	$\frac{1}{400} - \frac{3^2}{2.90000} = \frac{1}{400} - \frac{1}{20000}$	0,011
w łuku $\mathfrak{CC}$	$\frac{1}{400}$	0,011

przyczem np. dla $\frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{400} - \frac{1}{2222}$ bierze się zgięcie jako różnicę zgięć wynikających z tablicy II.

Tablica 1. (W miarach metrycznych,)

$$4\,m = \frac{(\text{Odcięta})^2}{6\,q}, \quad q \text{ od } 1000 \text{ do } 40000.$$

Odcięta	1000	2000	4000	6000	8000	10000	12000	14000	16000	18000	20000	25000	30000	40000	Odcięta
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1
2	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	2
3	0,004	0,002	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	3
4	0,011	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	4
5	0,021	0,010	0,005	0,003	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	5
6	0,036	0,018	0,009	0,006	0,005	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	6
7	0.057	0,029	0,014	0,010	0,007	0,006	0,005	0,004	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,001	7
8	0,085	0,043	0,021	0,014	0,011	0,009	0,007	0,006	0,005	0,005	0,004	0,003	0,003	0,002	8
9	0,121	0,061	0,030	0,020	0,015	0,012	0,010	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	9
10	0,167	0,083	0,042	0,028	0,021	0,017	0,014	0,012	0,010	0,009	0,008	0,007	0,006	0,004	10
11	0,222	0,111	0,055	0,037	0,028	0,022	0,018	0,016	0,014	0,012	0,011	0,009	0,007	0,006	11
12	0,288	0,144	0,072	0,048	0,036	0,029	0,024	0,021	0,018	0,016	0,014	0,012	0,010	0,007	12
13	0,366	0,183	0,092	0,061	0,046	0,037	0,031	0,026	0,023	0,020	0,018	0,015	0,012	0,009	13
14	0,457	0,229	0,114	0,076	0,057	0,046	0,038	0,033	0,029	0,025	0,023	0,018	0,015	0,011	14
15	0,563	0,281	0,141	0,094	0,070	0,056	0,047	0,040	0,035	0,031	0,028	0,023	0,019	0,014	15
16	0,683	0,341	0,171	0,114	0,085	0,068	0,057	0,049	0,043	0,038	0,034	9,027	0,023	0,017	16
17	0 819	0,409	0,205	0,136	0,102	0,082	0,068	0,058	0,051	0,045	0,041	0,033	0,027	0,020	17
18	0,972	0,486	0,243	0,162	0,122	0,097	0,081	0,069	0,061	0,054	0,049	0,039	0,032	0,024	18
19	—	0,572	0,286	0,191	0,143	0,114	0,095	0,082	0,071	0,064	0,057	0.046	0,038	0,029	19
20	—	0,667	0,333	0,222	0,167	0,133	0.111	0,095	0,083	0,074	0,067	0,053	0,044	0,033	20
21	—	0,772	0,386	0,257	9,193	0,154	0,129	0,110	7,096	0,086	0,077	0,062	0,051	0,039	21
22	—	0,887	0,444	0,296	0,222	0,177	0,148	0,127	0,111	0,098	0,089	0,071	0,059	0,044	22
23	—	1,014	0,507	0,338	0,253	0,203	0,169	0,145	0,127	0,113	0,101	0,081	0,068	0,050	23
24	—	1,152	0,576	0.384	0,288	0,230	0,192	0,165	0,144	0,128	0,115	0,092	0,077	0,058	24
25	—	—	0,651	0,434	0,325	0.260	0,217	0,186	0,164	0,145	0,130	0.104	0,087	0,065	25
26	—	—	0,732	0,488	0,366	0,293	0,244	0,209	0,183	0,163	0,146	0,117	0,098	0,073	26
27	—	—	0,820	0,547	0,410	0,328	0,273	0.234	0.205	0,182	0,164	0,131	0,109	0,082	27
28	—	—	0,915	0,610	0,457	0,366	0,305	0,261	0,229	0,203	0,183	0,146	0,122	0,091	28
29	—	—	1,016	0,677	0,508	0,406	0,339	0,290	0,254	0,226	0,203	1,163	0,135	0,100	29
30	—	—	1.125	0,750	0,563	0,450	0,375	0,321	0,281	0,250	0,225	0,180	0,150	0,113	20

Odcięta	1000	2000	4000	6000	8000	10000	12000	14000	16000	18000	20000	25000	30000	40000	Odcięta
31	—	—	—	0,827	0,621	0,496	0,414	0,355	0,310	0,276	0,248	0,199	0,165	0,124	31
32	—	—	—	0,910	0,683	0,546	0,455	0,390	0,341	0,303	0,273	0,218	0,182	0,137	32
33	—	—	—	0,998	0,749	0,599	0,499	0,428	0,374	0,333	0,299	0,240	0,200	0,150	33
34	—	—	—	1,092	0,819	0,655	0,546	0,468	0,409	0,364	0,328	0,262	0,218	0,164	34
35	—	—	—	1,191	0,893	0,715	0,595	0,510	0,447	0,397	0,357	0,286	0,238	0,179	35
36	—	—	—	1,296	0,972	0,778	0,648	0,555	0,486	0,432	0,389	0,311	0,259	0,194	36
37	—	—	—	—	1,055	0,844	0,704	0,603	0,528	0,469	0,422	0,338	0,281	0,211	37
38	—	—	—	—	1,143	0,915	0,763	0,653	0,572	0,508	0,457	0,366	0,305	0,229	38
39	—	—	—	—	1,236	0,989	0,824	0,706	0,618	0,549	0,494	0,395	0,330	0,247	39
40	—	—	—	—	1,333	1,067	0,889	0,762	0,667	0,593	0,523	0,427	0,356	0,267	40
41	—	—	—	—	1,436	1,149	0,957	0,820	0,719	0,638	0,574	0,460	0,383	0,287	41
42	—	—	—	—	1,544	1,235	1,029	0,882	0,772	0,686	0,617	0,494	0,412	0,309	42
43	—	—	—	—	—	1,325	1,104	0,947	0,828	0,736	0,663	0,530	0,442	0,331	43
44	—	—	—	—	—	1,420	1,183	1,014	0,887	0,789	0,710	0,568	0,473	0,355	44
45	—	—	—	—	—	1,519	1,266	1,085	0,949	0,884	0,759	0,607	0,506	0,380	45
46	—	—	—	—	—	1,622	1,352	1,159	1,014	0,901	0,811	0,649	0,541	0,406	46
47	—	—	—	—	—	1,730	1,442	1,236	1,082	0,961	0,865	0,692	0,587	0,433	47
48	—	—	—	—	—	1,843	1,535	1,317	1,152	1,024	0,922	0,737	0,614	0,461	48
49	—	—	—	—	—	—	1,634	1,401	1,225	1,089	0,980	0,784	0,653	0,490	49
50	—	—	—	—	—	—	1,736	1,488	1,302	1,158	1,042	0,833	0,694	0,521	50
51	—	—	—	—	—	—	1,842	1,579	1,382	1,229	1,105	0,884	0,737	0,553	51
52	—	—	—	—	—	—	1,953	1,674	1,465	1,302	1,172	0,937	0,781	0,586	52
53	—	—	—	—	—	—	2,068	1,774	1,551	1,378	1,241	0,992	0,827	0,620	53
54	—	—	—	—	—	—	2,187	1,875	1,640	1,458	1,312	1,050	0,875	0,656	54
55	—	—	—	—	—	—	—	1,981	1,733	1,541	1,386	1,109	0,924	0,693	55
56	—	—	—	—	—	—	—	2,091	1,829	1,626	1,463	1,171	0,976	0,732	56
57	—	—	—	—	—	—	—	2,205	1,929	1,715	1,543	1,234	1,029	0,772	57
58	—	—	—	—	—	—	—	—	2,032	1,807	1,626	1,301	1,084	0,813	58
59	—	—	—	—	—	—	—	—	2,139	1,901	1,711	1,369	1,141	0,856	59
60	—	—	—	—	—	—	—	—	2,250	2,000	1,800	1,440	1,200	0,900	60
61	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,102	1,892	1,513	1,261	0,946	61
62	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,207	1,986	1,589	1,324	0,993	62
63	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,315	2,083	1,667	1,388	1,042	63
64	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,427	2,185	1,748	1,456	1,092	64
65	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,543	2,289	1,831	1,526	1,144	65
66	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,662	2,396	1,917	1,597	1,198	66
67	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,506	2,005	1,671	1,253	67
68	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,620	2,096	1,746	1,310	68
69	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,738	2,190	1,825	1,369	69
70	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,858	2,287	1,906	1,429	70
71	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,983	2,386	1,988	1,491	71
72	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,110	2,488	2,074	1,555	72
73	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,593	2,161	1,621	73
74	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,701	2,251	1,688	74
75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,813	2,344	1,758	75
76	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,927	2,439	1,829	76
77	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,044	2,536	1,902	77
78	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,164	2,636	1,977	78
79	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,739	2,054	79
80	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,844	2,133	80
81	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,952	2,214	81
82	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,063	2,297	82
83	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,177	2,382	83
84	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,293	2,470	84
85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,559	85
86	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,650	86
87	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,744	87
88	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,839	88
89	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,937	89
90	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,038	90

Tablica 2.

W miarach metrycznych,

Szyna 6m długa.

Promień	Wygięcie
100	0,045
110	0,041
120	0,038
130	0,035
140	0,032
150	0,030
160	0,028
170	0,026
180	0,025
190	0,024
200	0,023
200	0,022
209	0,021
219	0,020
231	0,019
243	0,018
257	0,017
272	0,016
290	0,015
310	0,014
333	0,013
359	0,012
391	0,011
428	0,010
474	0,009
529	0,008
601	0,007
692	0,006
819	0,005
1000	0,004
1286	0,003
1800	0,002
3000	0,001
9000	0,000

Tablica 3.

W miarach metrycznych.

	$q = 6000$		$q=12000$		$q=25000$		$q=40000$		
	Boczne zgięcie	Promień krzywizny	Boczne zgięcie	Promień krzywizny	Boczne zgięcie	Promień krzywizny	Boczne zgięcie	Promień krzywizny	
0	0,000	∞	0,000	∞		∞		∞	0
3	**0,002**	2000	**0,001**	4000	0,001		0,000		
6	000,5	**1000**	0,002	**2 000**		4 167		6 667	6
9	**0,007**	667	**0,003**	1 333	0,002		0,001		
12	0,009	**500**	0,005	**1000**		2 083		3 333	12
15	**0,011**	400	**0,006**	800	0,003		0,002		
18	0,014	**333**	0,007	**667**		1 389		2 222	18
21	**0,016**	286	**0,008**	571	0,004		0,002		
24	0,018	**250**	0,009	**500**		1 042		1 667	24
27	**0,020**	222	**0,010**	444	0,005		0,003		
30	0,023	**200**	0,011	**400**		833		1 333	30
33	**0,025**	182	**0,012**	363	0,006		0,004		
36	—	**167**	0,014	**333**		694		1 111	36
39	—	—	**0,015**	308	0,007		0,004		
42	—	—	0,016	**286**		595		952	42
45	—	—	**0,017**	267	0,008		0,005		
48	—	—	—	**250**		521		833	48
51	—	—		—	0,009		0,006		
54	—	—	—	—		463		741	54
57	—	—	—	—	0,010		0,006		
60	—	—	—	—		417		667	60
63	—	—	—	—	0,011		0,007		
66	—	—	—	—		379		606	66
69	—	—	—	—	0,012		0,008		
72	—	—	—	—	—	347		556	72
75	—	—	—	—	—	—	0,008		
78	—	—	—	—	—	—		513	78
81	—	—	—	—	—	—	0,009		
84	—	—	—	—	—	—		476	84
87	—	—	—	—	—	—	0,010		
90	—	—	—	—	—	—		444	90

Liczby grubsze i liczby zwykłe tworzą każde dla siebie osobny postęp