

WITOLD NOWACKI

USTALONE NAPRĘŻENIA W WALCU ORTOTROPOWYM
ORAZ W TARCZY ORTOTROPOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXV

TOM VIII • ZESZYT 3 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Walec ortotropowy	568
2. Tarcza ortotropowa	572

1. Walec ortotropowy

Rozpatrzmy walec z materiału wykazującego własności ortotropii termicznej oraz sprężystej. Niech płaszczyzny ortotropii pokrywają się z płaszczyznami przyjętego układu współrzędnych prostokątnych (x_1, x_2, x_3) , przy czym zakładamy, że oś x_3 pokrywa się z osią walca. Niech w walcu panuje ustalone pole temperatury zależne jedynie od zmiennych x_1, x_2 . W walcu wytworzy się płaski stan odkształcenia.

Uogólnione prawo HOOKE'A ma tu postać

$$(1.1) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} + a_1 T, \\ \varepsilon_{22} = a_{21}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} + a_2 T, \\ \varepsilon_{33} = 0 = a_{31}\sigma_{11} + a_{32}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} + a_3 T, \\ \varepsilon_{12} = a_{66}\sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \end{cases}$$

przy czym

$$(1.2) \quad \begin{cases} a_{11} = \frac{1}{E_1}, & a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, & a_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \\ a_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & a_{22} = \frac{1}{E_2}, & a_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \\ a_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & a_{32} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, & a_{33} = \frac{1}{E_3}, & a_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \end{cases}$$

Tutaj przez E_1, E_2, E_3 oznaczono moduły YOUNGA w kierunku osi x_1, x_2, x_3 , przez G_{12} moduł odkształcenia postaciowego, przez $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ współczynniki POISSONA, a przez a_1, a_2, a_3 współczynniki rozszerzalności termicznej w kierunku osi układu współrzędnych. Z równań (1.1) wyeliminujemy naprężenie σ_{33} . Wtedy

$$(1.3) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = A_{11}\sigma_{11} + A_{12}\sigma_{22} + \gamma_1 T, \\ \varepsilon_{22} = A_{21}\sigma_{11} + A_{22}\sigma_{22} + \gamma_2 T, \\ \varepsilon_{12} = A_{66}\sigma_{12}, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{E_1}(1-\nu_{31}\nu_{13}), & A_{22} &= \frac{1}{E_2}(1-\nu_{23}\nu_{32}), \\ A_{12} &= A_{21} = -\frac{1}{E_2}(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}) = -\frac{1}{E_1}(\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{23}), \\ A_{66} &= a_{66}, \\ \gamma_1 &= a_1 + a_3\nu_{31}, & \gamma_2 &= a_2 + \nu_{23}a_3. \end{aligned}$$

Korzystaliśmy tu również z zależności

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}, \quad E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23}, \quad E_3\nu_{13} = E_1\nu_{31}.$$

Temperatura spełniać powinna równanie przewodnictwa cieplnego

$$(1.4) \quad (\lambda_1 \partial_1^2 + \lambda_2 \partial_2^2)T = -W, \quad \partial_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (i = 1, 2).$$

Tutaj λ_1 i λ_2 oznaczają współczynniki przewodnictwa cieplnego w kierunku osi x_1 i x_2 , W jest ilością ciepła, wytworzoną przez źródło ciepła w jednostce objętości i czasu.

Wiadomo, że w jednospójnym walcu izotropowym znajdującym się w ustalonym polu temperatury, różnym od zera, pozostaje jedynie naprężenie σ_{33} , jeśli założyć, że w walcu brak liniowych (równoległych do osi x_3) źródeł ciepła. Jest to treść znanego twierdzenia N.J. MUSCHIELISZWILEGO, [1].

Stawiamy sobie następujące pytanie: czy w walcu ortotropowym możliwy est taki szczególny stan naprężenia, w którym jedynie naprężenie σ_{33} jest różne od zera — a jeśli tak, to przy jakich warunkach.

Dla wyznaczenia stanu naprężenia w walcu posłużymy się funkcją AIRY'EGO F , przy czym

$$(1.5) \quad \sigma_{11} = F_{,22}, \quad \sigma_{22} = F_{,11}, \quad \sigma_{12} = -F_{,12},$$

a naprężenie σ_{33} wyznaczymy z trzeciego równania grupy (1.1),

$$(1.6) \quad \sigma_{33} = \nu_{31}F_{,22} + \nu_{32}F_{,11} - E_3 a_3 F.$$

Funkcja AIRY'EGO spełnia równania równowagi: $\sigma_{ij,j} = 0$. Wyrażając odkształcenia (1.1) za pomocą funkcji AIRY'EGO i wstawiając je do równań geometrycznej zgodności

$$(1.7) \quad \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$$

otrzymujemy następujące równanie różniczkowe dla funkcji F :

$$(1.8) \quad \kappa^4 F_{,1111} + 2\eta \kappa^2 F_{,1122} + F_{,2222} + \omega(T_{,22} + \vartheta T_{,11}) = 0,$$

gdzie

$$\kappa^4 = \frac{A_{22}}{A_{11}}, \quad 2\eta \kappa^2 = \frac{2A_{12} + A_{66}}{A_{11}}, \quad \omega = \frac{\gamma_1}{A_{11}}, \quad \vartheta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Zakładamy, że powierzchnia boczna walca jest wolna od naprężeń. Rozwiązać należy zatem równanie (1.8) przy uwzględnieniu warunków brzegowych (1.9)

$$F = 0, \quad F_{,n} = 0$$

na powierzchni bocznej walca. Drugi z warunków brzegowych (1.9) oznacza znikanie pochodnej funkcji F w kierunku normalnej do brzegu.

Wprowadźmy funkcję GREENA $F^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ równania (1.8). Funkcja F^* powinna spełniać równanie

$$(1.10) \quad \kappa^4 F^*_{,1111} + 2\eta \kappa^2 F^*_{,1122} + F^*_{,2222} + \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(1.11) \quad F^* = 0, \quad F^*_{,n} = 0.$$

Tutaj δ oznacza symbol funkcji DIRACA.

Korzystając z funkcji GREENA F^* przedstawić możemy rozwiązanie równania (1.8) w następującej postaci

$$(1.12) \quad F(x_1, x_2) = \omega \iint_{(r)} T(\xi_1, \xi_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Wykonując na prawej stronie równania (1.12) przekształcenie GREENA na płaszczyźnie otrzymamy przy uwzględnieniu warunków brzegowych (1.11) następujące rozwiązanie:

$$(1.13) \quad F(x_1, x_2) = \omega \iint_{(r)} F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) T(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Biorąc pod uwagę równanie przewodnictwa cieplnego (1.4) przekształcimy równanie (1.13) do postaci

$$(1.14) \quad F(x_1, x_2) = -\frac{\omega}{\lambda_2} \iint_{(r)} F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) W(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \omega(\vartheta - \beta) \iint_{(r)} F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) \frac{\partial^2 T(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^2} d\xi_1 d\xi_2, \quad \beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Z ostatniego równania wysnuć możemy szereg interesujących wniosków.

Założmy, że w walcu brak jest źródeł ciepła. Wtedy pierwsza całka równania (1.14) będzie równa zeru. Druga całka równania będzie równa zeru jedynie w przypadku szczególnym $\vartheta = \beta$ lub gdy $\lambda_2(\alpha_2 + \nu_{23}\alpha_3) = \lambda_1(\alpha_1 + \alpha_3\nu_{31})$. Jeśli ten nader szczególny przypadek nie wystąpi, w walcu pojawią się wszelkie składowe stanu naprężenia występujące w płaskim stanie odkształcenia.

Niech w walcu istnieje izotropia poprzeczna, taka, że

$$E_1 = E_3 = E, \quad \nu_{13} = \nu_{31} = \nu, \quad \nu_{21} = \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu', \quad \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha.$$

Funkcja F będzie równa zeru w całym obszarze walca jedynie, gdy $\vartheta = \beta$, albo gdy $a_1(1+\nu)\lambda_2 = (a_2+\nu'a_1)\lambda_1$. W tym szczególnym przypadku mamy $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ oraz $\sigma_{33} = -aET$. W przypadku izotropii poprzecznej, w której

$$E_1 = E_2 = E, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu, \quad \nu_{31} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu', \quad a_1 = a_2 = a, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

warunek $\nu = \beta$ jest spełniony. W całym obszarze walca $F = 0$, tak że w walcu istnieje następujący stan:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{33} = -E_3 a_3 T.$$

Jeśli przejść z izotropii poprzecznej do izotropii, to brak źródła ciepła w walcu jednorodnym prowadzi do stanu naprężenia

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{33} = -E a T.$$

2. Tarcza ortotropowa

Rozpatrzmy z kolei jednorodną tarczę ortotropową o grubości h , znajdującą się w ustalonym polu temperatury. Oznaczmy jak poprzednio przez E_1, E_2 moduły sprężystości, przez ν_1, ν_2 współczynniki Poissona, przez a_1, a_2 współczynniki rozszerzalności cieplnej, a przez λ_1, λ_2 współczynniki przewodnictwa cieplnego w kierunku osi x_1, x_2 leżących w płaszczyźnie środkowej tarczy. Przez $G_{12} = G$ oznaczamy moduł odkształcenia postaciowego.

W rozpatrywanym płaskim stanie naprężenia mamy następujące związki między stanem odkształcenia i naprężenia, [2]:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_1 T, \\ \varepsilon_{22} = a_{21}\sigma_{21} + a_{22}\sigma_{22} + a_2 T, \\ \varepsilon_{12} = a_{66}\sigma_{12}, \end{cases}$$

gdzie

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_1}{E_1}, \\ a_{21} = -\frac{\nu_2}{E_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{2G}; \quad E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1.$$

Oznaczmy temperaturę ośrodków otaczających tarczę dla $x_3 > h/2$ przez θ_1 , dla $x_3 < -h/2$ przez θ_2 . Układ współrzędnych umieszczono w płaszczyźnie środkowej tarczy w ten sposób, że oś x_3 jest do tej płaszczyzny prostopadła. Temperatura T powinna spełniać równanie

$$(2.2) \quad (\lambda_1 \partial_1^2 + \lambda_2 \partial_2^2 + \lambda_3 \partial_3^2) T(x_1, x_2, x_3) = -W(x_1, x_2, x_3).$$

Całkujemy równanie (2.2) względem x_3 od $-h/2$ do $h/2$. Otrzymamy

$$(2.3) \quad (\lambda_1 \partial_1^2 + \lambda_2 \partial_2^2) \tau_0 + \frac{\lambda_3}{h} \left[\frac{\partial T}{\partial x_3} \right]_{-h/2}^{h/2} = -q_0.$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenia:

$$\tau_0(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad q_0(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} W(x_1, x_2, x_3) dx_3.$$

Pomnożmy równanie (2.2) przez x_3 i całkujemy od $-h/2$ do $h/2$. Wtedy

$$(2.4) \quad (\lambda_1 \partial_1^2 + \lambda_2 \partial_2^2) \tau + \frac{12\lambda_3}{h} \left[x_3 \frac{\partial P}{\partial x_3} - T \right]_{-h/2}^{h/2} = -q,$$

gdzie

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} T(x_1, x_2, x_3) x_3 dx_3, \quad q(x_1, x_2) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} W(x_1, x_2, x_3) x_3 dx_3.$$

Uwzględnijmy wymianę ciepła między tarczą a otaczającym ją ośrodkiem korzystając z prawa NEWTONA; otrzymamy następujące warunki brzegowe w płaszczyznach $\pm h/2$:

$$(2.5) \quad \lambda_3 \left[\frac{\partial T}{\partial x_3} \right]_{x_3=h/2} = \kappa(\theta_1 - T_1), \quad \lambda_3 \left[\frac{\partial T}{\partial x_3} \right]_{x_3=-h/2} = -\kappa(\theta_2 - T_2).$$

Tutaj κ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego między płytą a otaczającym ośrodkiem, a funkcje

$$T_1(x_1, x_2) = T\left(x_1, x_2, \frac{h}{2}\right), \quad T_2 = T\left(x_1, x_2, -\frac{h}{2}\right),$$

oznaczają temperaturę w płaszczyznach ograniczających tarczę.

Równania (2.3) i (2.4) przyjmą postać:

$$(2.6) \quad (\lambda_1 \partial_1^2 + \lambda_2 \partial_2^2) \tau_0 + \frac{2\kappa}{h} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{T_1 + T_2}{2} \right) = -q_0,$$

$$(2.7) \quad (\lambda_1 \partial_1^2 + \lambda_2 \partial_2^2) \tau + \frac{6\kappa}{h} \frac{\theta_1 - \theta_2}{h} - \frac{6\kappa}{h} \left(1 + \frac{2\lambda_3}{h\kappa} \right) \frac{T_1 - T_2}{h} = -q.$$

Powyższe równania dadzą się rozdzielić, jeśli założymy, że rozkład temperatury w kierunku osi x_3 jest liniowy. Przyjęcie to jest tym bliższe rzeczywistości, im mniejsza jest grubość płyty w stosunku do jej wymiarów liniowych. Przyjmijmy zatem, że

$$(2.8) \quad T = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{h} x_3,$$

albo, jak łatwo sprawdzić, że

$$(2.9) \quad T = \tau_0 + x_3 \tau.$$

Przy powyższych założeniach otrzymamy dwa od siebie niezależne równania:

$$(2.10) \quad (m\partial_1^2 + \partial_2^2)\tau_0 + \varepsilon_0(\theta' - \tau_0) = -\frac{q_0}{\lambda_2}$$

oraz

$$(2.11) \quad (m\partial_1^2 + \partial_2^2)\tau - \frac{12}{h^2}(\eta + \varepsilon)\tau + \frac{12}{h^2}\varepsilon\theta'' = -\frac{q}{\lambda_2}.$$

Tutaj

$$\theta' = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \theta'' = \frac{\theta_1 - \theta_2}{h}, \quad \varepsilon_0 = \frac{2\kappa}{h\lambda_2}, \quad \varepsilon = \frac{\kappa h}{2\lambda_2},$$

$$\eta = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \quad m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Oddzielnie też rozpatrywać można stan naprężenia wywołany polem τ_0 , oddzielnie polem $x_3\tau$. Wstawiając τ_0 na miejsce T do równań (2.1), a następnie wyrażając naprężenia za pomocą funkcji AIRY'EGO

$$(2.12) \quad \sigma_{ij} = (\nabla^2 \delta_{ij} - \partial_i \partial_j)F \quad (i, j = 1, 2),$$

jak również wstawiając odkształcenia do równania nierozdzielności otrzymamy następujące równanie dla wyznaczenia funkcji F :

$$(2.13) \quad \kappa_0^4 F_{,1111} + 2\eta_0 \kappa_0^2 F_{,1122} + F_{,2222} + E_1 \alpha_1 (\partial_2^2 + n \partial_1^2) \tau_0 = 0,$$

gdzie

$$\kappa_0^4 = \frac{E_1}{E_2}, \quad 2\eta_0 \kappa^2 = E_1 \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right), \quad n = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Zakładając wolny od obciążeń brzeg tarczy rozwiążemy równanie (2.13) przy warunkach brzegowych

$$(2.14) \quad F = 0, \quad F_{,n} = 0.$$

Podobnie jak w ustępie pierwszym tak i tu rozwiążemy równanie (2.13) posługując się funkcją GREENA $F^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$, spełniającą równanie

$$(2.15) \quad \kappa_0^4 F^*_{,1111} + 2\eta_0 \kappa_0^2 F^*_{,1122} + F^*_{,2222} + \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) = 0$$

i warunki brzegowe $F^* = 0, \quad F^*_{,n} = 0$.

Rozwiązanie równania (2.13) przedstawić możemy w postaci

$$(2.16) \quad F(x_1, x_2) = E_1 \alpha_1 \int \int_{(r)} \tau_0(\xi_1, \xi_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + n \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) d\xi_1 d\xi_2$$

albo

$$(2.16.1) \quad F(x_1, x_2) = E_1 \alpha_1 \int_{(r)} \int F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + n \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) \tau_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Z ostatniego równania wynika, że funkcja F będzie równa zero w każdym punkcie tarczy (a zatem i naprężenia będą równe zero), jeśli w tarczy brak będzie źródeł ciepła ($q_0 = 0$) oraz gdy $\tau_0(x, x_2)$ będzie funkcją liniową zmiennych x_1 i x_2 . Funkcja τ_0 staje się liniową tylko wtedy, gdy temperatura θ' bardzo słabo zmienia się w zależności od x_1 i x_2 , tak że w równaniu (2.10) pominać można pierwszy wyraz po lewej stronie w stosunku do drugiego wyrazu i przyjmując, że $\tau_0 \approx \theta'$.

Rozpatrzmy jeszcze szczególny przypadek równania (2.10). Mianowicie założmy, że tarcza jest w płaszczyznach $x_3 = \pm h/2$ izolowana termicznie. W tym przypadku równanie (2.10) uprości się do postaci

$$(2.17) \quad (m\partial_1^2 + \partial_2^2)\tau_0 = -\frac{q}{\lambda_2}.$$

Z równania (2.16.1) otrzymamy

$$(2.18) \quad F(x_1, x_2) = -\frac{E_1 \alpha_1}{\lambda_2} \int_{(r)} \int F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ + E_1 \alpha_1 (n-m) \int_{(r)} \int F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) \frac{\partial^2 \tau_0(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^2} d\xi_1 d\xi_2.$$

Jeśli założyć, że w tarczy brak źródeł ciepła ($q_0 = 0$), to znika pierwsza całka wyrażenia (2.18). Druga zniknie, gdy $n = m$ albo gdy $\alpha_2 \lambda_2 = \alpha_1 \lambda_1$. Przypadek ten nastąpi, gdy tarcza będzie miała różne cechy sprężyste, ale jednakowe właściwości termiczne w kierunkach osi x_1 i x_2 . Tarcza taka odkształca się bez występowania w niej naprężeń.

Rozpatrzmy z kolei naprężenia wywołane w tarczy przez pole temperatury $x_3 \tau(x_1, x_2)$. Wskutek zmienności temperatury w kierunku osi x_3 również i naprężenia zmieniać się będą liniowo w kierunku grubości tarczy. Mamy do czynienia ze zginaniem płyty. Wstawiając do równań (2.1) $T = x_3 \tau(x_1, x_2)$ oraz wyrażając odkształcenia przez ugięcie w płyty

$$(2.19) \quad \varepsilon_{ij} = -x_3 w_{,ij} \quad (i, j = 1, 2),$$

a dalej rozwiązując te równania względem naprężeń otrzymamy, [2],

$$(2.20) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = -\frac{E_1 x_3}{1-\nu_1 \nu_2} [w_{,11} + \nu_2 w_{,22} + (a_1 + \nu_2 a_2) \tau], \\ \sigma_{22} = -\frac{E_2 x_3}{1-\nu_1 \nu_2} [w_{,22} + \nu_1 w_{,11} + (a_2 + \nu_1 a_1) \tau], \\ \sigma_{12} = -2G x_3 w_{,12}. \end{cases}$$

Wprowadzimy wypadkowe naprężenia, momenty zginające i skręcające

$$(2.21) \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i, j = 1, 2);$$

znajdziemy, że

$$(2.22) \quad \begin{cases} M_{11} = -N_1[w_{,11} + \nu_2 w_{,22} + (a_1 + \nu_2 a_2)\tau], \\ M_{22} = -N_2[w_{,22} + \nu_1 w_{,11} + (a_2 + \nu_1 a_1)\tau], \\ M_{12} = -2Cw_{,12}, \end{cases}$$

gdzie

$$C = \frac{Gh^3}{12}, \quad N_i = \frac{E_i}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{h^3}{12} \quad (i = 1, 2).$$

Wstawiając (2.22) do równania równowagi elementu $hdx_1 dx_2$ płyty

$$(2.23) \quad M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} = 0,$$

uzyskamy równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty:

$$(2.24) \quad \varepsilon^4 w_{,1111} + 2\rho\varepsilon^2 w_{,1122} + w_{,2222} + \varepsilon^4(a_1 + a_2\nu_2)\tau_{,11} + (a_1\nu_1 + a_2)\tau_{,22} = 0.$$

Tutaj

$$\varepsilon^4 = \frac{N_1}{N_2}, \quad \rho\varepsilon^2 = \frac{H}{N_2}, \quad H = N_1\nu_2 + N_2\nu_1 + 2C, \quad N_1\nu_2 = N_2\nu_1.$$

W dalszych rozważaniach ograniczymy się na razie do płyt jednospójnych na brzegach zupełnie utwierdzonych. Równanie (2.24) spełnić powinno warunki brzegowe: $w = 0$, $w_{,n} = 0$.

W teorii płyt izotropowych udowadnia się, że w płytach jednospójnych na brzegu zupełnie utwierdzonych, znajdujących się w ustalonym bezźródłowym polu temperatury, jest, [3]

$$(2.25) \quad u_1 = u_2 = w = 0$$

w każdym punkcie płyty. Momenty zginające i skręcające dane są wzorami

$$(2.26) \quad M_{11} = M_{22} = -N(1 + \nu)a_t\tau, \quad M_{12} = 0.$$

Wykażemy, że dla płyty ortotropowej składowe stanu przemieszczenia będą równe zeru jedynie w nader szczególnych przypadkach.

Wprowadźmy funkcję GREENA $w^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$, spełniającą równanie

$$(2.27) \quad \varepsilon^4 w^*_{,1111} + 2\rho\varepsilon^2 w^*_{,1122} + w^*_{,2222} + \frac{1}{N_2} \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) = 0$$

z warunkami brzegowymi $w^* = 0$, $w^*_{,n} = 0$.

Funkcja w^* przedstawia ugięcie punktu (x_1, x_2) płyty ortotropowej, wywołane działaniem siły skupionej $P = -1$ umieszczonej w punkcie (ξ_1, ξ_2) .

Rozwiązując równanie (2.24) przy użyciu funkcji GREENA w^* otrzymamy

$$(2.28) \quad w(x_1, x_2) = A \int_{(r)} \tau(\xi_1, \xi_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + s \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) w^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

gdzie

$$A = N_2(a_1\nu_1 + a_2), \quad s = \frac{N_1(a_1 + \nu_2 a_2)}{A}.$$

Stosując przekształcenie GREENA na płaszczyźnie i wykorzystując warunki brzegowe $w^* = 0$, $w_{,n}^* = 0$ przedstawić możemy ugięcie w również w postaci

$$(2.29) \quad w(x_1, x_2) = A \int_{(r)} w^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + m \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) \tau(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ + A(s-m) \int_{(r)} w^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2) \frac{\partial \tau(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^2} d\xi_1, d\xi_2.$$

Z ostatniego równania wynika, że $w = 0$ w całym obszarze płyty ortotropowej jeśli τ jest funkcją liniową lub też ma wartość stałą. Taki przypadek jest możliwy tylko wtedy, gdy temperatura otaczającego ośrodka bardzo słabo zmienia się z x_1 i x_2 , tak że w równaniu (2.11) pominąć można pierwszy wyraz po lewej stronie równania w stosunku do dalszych oraz kiedy brak źródła ciepła w tarczy, zatem gdy

$$(2.30) \quad \tau \approx \frac{\varepsilon \theta''}{\eta + \varepsilon}.$$

W tym przypadku naprężenia w płycie nie zależą od ugięcia, a momenty dane są wzorami

$$(2.31) \quad M_{11} = -N_1(a_1 + \nu_2 a_2), \quad M_{22} = -N_2(a_2 + \nu_1 a_1), \quad M_{12} = 0.$$

Jeśli płaszczyzny ograniczające płytę są izolowane termicznie, to równanie (2.11) redukuje się do postaci

$$(2.32) \quad (m\partial_1^2 + \partial_2^2)\tau = -\frac{q}{\lambda_2}.$$

Jeśli w płycie brak źródeł ciepła, to pierwsza z całek (2.19) będzie równa zeru. Ugięcie w będzie równe zeru w każdym punkcie płyty, gdy $s - m = 0$, albo gdy $N_1(a_1 + \nu_2 a_2) = N_2(a_2 + \nu_1 a_1)$. Jednak powyższy warunek może być spełniony jedynie dla płyty izotropowej.

Przy wyznaczaniu naprężeń tak w walcu nieograniczonym jak i w tarczy konieczna jest znajomość funkcji F^* . Zważywszy na analogię równań (1.10), (2.15) i (2.27) oraz identyczność warunków brzegowych, można dla wyznaczenia

funkcji F^* posłużyć się analogią płytową. Z analogii na przykład równań (2.15) i (2.27) oraz warunków brzegowych od razu wynika, że

$$(2.33) \quad F^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = N_2 w^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2),$$

jeśli zamiast wielkości ε i η wstawić w równanie (2.22) wielkości η_0 i κ_0

Znając już funkcję F^* wyznaczmy naprężenia w tarczy ze wzoru (2.12). Zatem dla wyznaczenia funkcji F^* posłużymy się rozwiązaniami z teorii płyt ortotropowych, a funkcje GREENA w^* są dla wielu kształtów płyt ortotropowych opracowane.

Przedstawione tu rozważania są tak długo słuszne, jak długo naprężenia $\sigma_{ij}^{(1)}$ wywołane w tarczy polem temperatury τ_0 oraz naprężenia $\sigma_{ij}^{(2)}$ wywołane polem $\kappa_3 \tau$ można superponować. Jeśli jednak uwzględnić zmianę położenia sił $N_{ij} = h \sigma_{ij}^{(1)}$ wywołanych ugięciem tarczy, to będziemy mieli do czynienia ze zjawiskiem jednoczesnego zginania i ściskania tarczy.

Zamiast równania (2.23) wziąć należy pod uwagę równanie

$$(2.34) \quad M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + N_{11} w_{,11} + 2N_{12} w_{,12} + N_{22} w_{,22} = 0.$$

Rozwiązać trzeba zatem układ równań

$$(2.35) \quad \kappa_0^4 F_{,1111} + 2\eta_0 \kappa_0^2 F_{,1122} + F_{,2222} + E a_1 (\partial_2^2 + n \partial_1^2) \tau_0 = 0,$$

$$(2.36) \quad \varepsilon^4 w_{,1111} + 2Q \varepsilon^2 w_{,1122} + w_{,2222} + \varepsilon^4 (a_1 + a_2 \nu_2) \tau_{,11} + (a_1 \nu_1 + a_2) \tau_{,22} = \\ = \frac{h}{N_2} (F_{,22} w_{,11} - 2F_{,12} w_{,12} + F_{,11} w_{,22}).$$

Po wyznaczeniu funkcji F z równania (2.35) znana jest prawa strona równania (2.36), co zezwala już na wyznaczenie ugięcia płyty. W przypadku szczególnym $\tau = 0$ układ równań (2.35) i (2.36) opisuje zagadnienie wyboczenia tarczy spowodowane działaniem pola temperatury, $\tau_0(x_1, x_2)$.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Н. Я. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва—Ленинград 1949, 159.
- [2] М. Т. ХУБЕР, *Teoria płyt*, Lwów 1921.
- [3] Б. М. МАЙЗЕЛЬ, *Температурная задача теории упругости*, Киев 1951.

Резюме

СТАЦИОНАРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОРТОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ И В ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ

В первой части работы даются условия, при которых в ортотропном цилиндре, находящемся в стационарном температурном поле без источников напряженное состояние ограничивается только к одной составляющей, а именно к нормальному напряжению по направлению оси x_3 .

Во второй части рассматривается тонкая ортотропная пластинка, находящаяся в стационарном и линейном температурном поле по направлению оси x_3 .

Даются условия, при которых в температурном поле без источников исчезают все составляющие напряженного состояния и при которых исчезают составляющие перемещения.

S u m m a r y

STEADY-STATE STRESSES IN AN ORTHOTROPIC CYLINDER AND PLATE

In the first part of the paper conditions are established, in which the state of stress in an orthotropic cylinder in a steady-state sourceless temperature field is confined to one component only, the stress in the direction of the x_3 -axis.

In the second part of the paper a thin orthotropic plate is considered under a steady-state linear temperature field (in the direction of the x_3 -axis). Conditions are established under which all the stress or displacement components vanish in a sourceless temperature field.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 kwietnia 1960 r.
