

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ТОМ
VI

Вып. 4

521

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКОВА ДУМКА“ КИЕВ — 1970

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ НЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

В. Новацкий

(В а р ш а в а)

§ 1. Введение. Классическая теория упругости построена на представлении об идеальной модели непрерывной упругой среды, в которой перенос усилий через бесконечно малую площадку dA , расположенную внутри тела, осуществляется с помощью вектора напряжений $p_i = \sigma_{ji}n_j$. Принимая во внимание это предположение, приходим к выражению деформации тела с помощью симметричных тензоров: тензора деформации γ_{ji} и тензора напряжений σ_{ji} .

Теоретические результаты классической теории упругости при напряжениях, не превышающих предела упругости, для разнообразных конструкционных материалов (различных сортов стали, алюминия, бетона) хорошо совпадают с опытными данными.

Однако в ряде случаев замечены существенные расхождения теоретических результатов с экспериментальными данными. Это относится, прежде всего, к напряженным состояниям, где возникают значительные градиенты напряжений. Примером такого состояния является концентрация напряжений вблизи отверстий, надрезов и трещин [3].

Расхождения классической теории упругости с опытными данными особенно резко проявляются в динамических проблемах в случае упругих колебаний высокой частоты с небольшой длиной волны, т. е. колебаний, вызванных генерированием ультразвуковых волн. Причиной этих расхождений является заметное при больших частотах и малых длинах волн влияние микроструктуры тела.

Заметим, что классическая теория упругости несостоятельна для описания колебаний зернистых и макромолекулярных тел, например, полимеров. Влияние микроструктуры в этих случаях становится значительным, вызывая появление новых видов волн, неизвестных в классической теории упругости.

Указанные недостатки пытался исправить W. Voigt [19], выдвигая предположение, что перенос взаимодействия между двумя частицами тела через элементарную площадку dA (расположенную внутри тела) осуществляется при помощи не только вектора силы $\vec{p}dA$, но и вектора момента $\vec{m}dA$. Такое предположение сводится к утверждению, что на грань элементарного параллелепипеда действуют силовые σ_{ji} и моментные μ_{ji} напряжения. Из уравнений равновесия этого параллелепипеда вытекает, что компоненты σ_{ji} , μ_{ji} несимметричны.

Теория несимметричной упругости впервые наиболее полно развита в работах E. Cosserat, F. Cosserat [5,6]. При этом всякой материальной частице ставился в соответствие идеально жесткий трехгранник, который

в процессе деформации в состоянии не только перемещаться, но и вращаться. Таким образом, была создана модель упругой среды, в которой частицы стали ориентированными (полярная среда) и где есть смысл рассматривать вращение материальной точки.

В теории упругости Коссера деформация тела определяется вектором перемещения $\vec{u}(x, t)$ и независимым от него вектором вращения $\vec{\varphi}(x, t)$. Такое предположение о шести степенях свободы материальных частиц привело к представлению о несимметричных тензорах деформаций и напряжений.

Работа Коссера, несмотря на новизну идей, оставалась долгое время незамеченной. Причинами этого являлись, по-видимому, ее нелинейность и не вполне приемлемая для нелинейных теорий формулировка в прямоугонных координатах, а также тот факт, что она охватывала ряд вопросов, выходящих за рамки теории упругости. Исследовались некоторые вопросы идеальной жидкости, квазиупругой среды «эфира Мак-Кулея — Кельвина» и была предпринята попытка синтеза теорий Пуанкаре и Лоренца, относящихся к динамике электрона. Эту работу следует рассматривать как попытку создания единой теории поля, охватывающей механику, оптику и электродинамику, связанных общим принципом наименьшего действия (евклидовым действием).

В своей теории Коссера не дали вывода уравнений состояния. Основной их целью являлось получение подынтегрального выражения — плотности действия для общей вариационной проблемы Гамильтона. В их подходе для любого континуума «евклидово действие» является скалярным функционалом от геометрических, кинематических и кинетических переменных.

Коссера постулировали инвариантность плотности действия по отношению к евклидовой группе трансформаций. Полученная ими группа трансформаций содержит семь параметров, причем требование инвариантности равносильно существованию принципов сохранения механической энергии, импульса и момента импульса.

Развивающиеся в течение последних пятнадцати лет исследования в области общих теорий сплошной среды вызвали интерес к трудам Коссера. В настоящее время наблюдается возрождение этой теории.

Дальнейшее развитие теория несимметричной упругости получила в работах последних лет. Исследователи рассматривали сначала упрощенную теорию Коссера (теорию несимметричной упругости так называемого псевдоконтинуума Коссера), т. е. среду, в которой возможно возникновение несимметричных напряжений, вызванных исключительно вектором перемещения $\vec{u}(x, t)$. Такую модель исследовали еще Коссера, называя ее случаем с утаенным триэдром.

Среди работ, посвященных псевдоконтинууму Коссера, следует отметить работы С. Truesdell, R. A. Toupin [18] и R. A. Toupin [16], в которых рассматривалась линейная и нелинейная теория упругости для этой среды. Затем указанную теорию развили G. Grioli [9] и R. D. Mindlin, H. F. Tiersten [11]. В частности, в работе [11] получен ряд интересных результатов для линейной теории, где введены потенциалы и функции напряжений, а также рассмотрены вопросы распространения упругих волн. Несколько позже было дано начало развитию нелинейной теории несимметричной упругости [17] в смысле Коссера. Эта теория представлена также в работе A. C. Eringen, E. S. Suhubi [8]. Основные уравнения и соотношения линейной теории общей среды Коссера получены Е. В. Кувшинским, Э. Л. Аэро [1] и В. А. Пальмовым [2].

Вопросы несимметричной термоупругости были предметом работы В. Новацкого [12].

В данной работе рассматриваются некоторые динамические вопросы для микрополярной среды. Исследуется распространение волн в бесконечной упругой среде, для которой и приведены фундаментальные решения. Изучено распространение продольной волны в бесконечной плите, а также продольной волны и волны кручения в бесконечном стержне круглого сечения.

§ 2. Формулировка вопроса эластокинетики. Рассмотрим регулярную пространственную область $V + A$, ограниченную замкнутой поверхностью A , заполненную однородной упругой микрополярной средой плотности ρ с удельной инерцией вращения (моментной инерцией) I . Предполагаем, что среда изотропна и центросимметрична.

Под действием внешних нагрузок тело будет подвергаться деформации, которую можно охарактеризовать с помощью поля перемещения $\vec{u}(x, t)$ и поля вращения $\vec{\varphi}(x, t)$. В деформированном теле возникнут силовые $\sigma_{ji}(x, t)$ и моментные $\mu_{ji}(x, t)$ напряжения, связанные при помощи уравнений состояния с компонентами тензора деформации $\gamma_{ji}(x, t)$ и тензора вращения — кривизны $\kappa_{ji}(x, t)$. Все величины отнесены к декартовой прямоугольной системе координат.

Вопросы эластокинетики однородного, изотропного и центросимметричного тела сводятся к определению функций $\sigma_{ji}(x, t)$, $\mu_{ji}(x, t)$ и $\gamma_{ji}(x, t)$, $\kappa_{ji}(x, t)$ класса $C^{(1)}$, а также $u_i(x, t)$, $\varphi_i(x, t)$ класса $C^{(2)}$ для $x \in V + A$, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

а) уравнениям движения

$$\sigma_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i - X_i(x, t); \quad (2.1)$$

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,i} = I \ddot{\varphi}_i - Y_i(x, t) \quad (x \in V, t > 0); \quad (2.2)$$

б) линеаризованным зависимостям между напряженным и деформированным состояниями

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij}; \quad (2.3)$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ij} + \beta \kappa_{kk} \delta_{ij}; \quad (2.4)$$

в) краевым условиям

$$\sigma_{ji} n_j = p_i(x, t); \quad \mu_{ji} n_j = m_i(x, t) \quad (x \in A_\sigma, t > 0); \quad (2.5)$$

$$u_i = f_i(x, t); \quad \varphi_i = g_i(x, t) \quad (x \in A_u, t > 0, A = A_u + A_\sigma); \quad (2.6)$$

г) начальным условиям

$$u_i = k_i(x); \quad \dot{u}_i = h_i(x); \quad (2.7)$$

$$\varphi_i = l_i(x); \quad \dot{\varphi}_i = n_i(x) \quad (x \in V, t = 0). \quad (2.8)$$

Здесь

$$\bar{\epsilon}_{ijk} = u_{i,j} - \epsilon_{kji} \varphi_k \quad (2.9); \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j} \quad (x \in V + A, t > 0); \quad (2.10)$$

$X_i(x, t)$ и $Y_i(x, t)$ — компоненты векторов массовых сил и моментов; ϵ_{ijk} — перестановочный символ (альтернатор) Леви-Чивита; μ, λ — постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — другие характеристические постоянные материала (все постоянные относятся к адиабатическому процессу); p_i, m_i — функции, заданные на A_σ (p_i — компоненты распределенной силовой на-

грузки, m_i — компоненты вектора моментной нагрузки; f_i и g_i — заданные на A_u соответственно компоненты векторов перемещения и вращения; k_i, h_i, l_i, n_i — функции, известные для начального момента времени.

Зависимости между напряженным и деформированным состояниями определяются по формулам

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{ji}}; \quad \mu_{ji} = \frac{\partial u}{\partial \kappa_{ji}}, \quad (2.11)$$

где u — внутренняя энергия, выраженная соотношением

$$u = \frac{\mu + \alpha}{2} \gamma_{ji} \gamma_{ji} + \frac{\mu - \alpha}{2} \gamma_{ji} \gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2} \gamma_{kk} \gamma_{nn} + \\ + \frac{\gamma + \varepsilon}{2} \kappa_{ji} \kappa_{ji} + \frac{\gamma - \varepsilon}{2} \kappa_{ji} \kappa_{ij} + \frac{\beta}{2} \kappa_{kk} \kappa_{nn}. \quad (2.12)$$

Характеристические постоянные материала должны удовлетворять неравенствам

$$3\lambda + 2\mu > 0; \quad 3\beta + 2\gamma > 0; \quad \mu > 0; \quad \gamma > 0; \\ \mu + \alpha > 0; \quad \gamma + \varepsilon > 0; \quad \alpha > 0; \quad \varepsilon > 0. \quad (2.13)$$

В классической эластокинетике исходным пунктом при рассмотрении распространений упругих волн были дифференциальные уравнения для перемещения. Аналогично в случае эластокинетики микрополярной упругой среды следует получить дифференциальные уравнения для перемещений и вращений. Эти уравнения находим из уравнений движения, исключив из них с помощью физических зависимостей (2.3), (2.4) напряжения σ_{ji} и μ_{ji} .

Выражая согласно (2.10) деформации γ_{ji}, κ_{ji} при помощи перемещений u_i и вращений φ_i , получаем систему шести дифференциальных уравнений, которую представим в векторном виде

$$\square_2 \vec{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \text{grad div } \vec{u} + 2\alpha \text{rot } \vec{\varphi} + \vec{X} = 0; \\ \square_4 \vec{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \text{grad div } \vec{\varphi} + 2\alpha \text{rot } \vec{u} + \vec{Y} = 0. \quad (2.14)$$

Здесь введены дифференциальные операторы

$$\square_2 = (\mu + \alpha) \nabla^2 - \rho \partial_t^2; \quad \square_4 = (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - 4\alpha - I \partial_t^2.$$

Уравнения (2.14) образуют сложную систему сопряженных гиперболических уравнений, к которым следует добавить краевые и начальные условия (2.5) — (2.8).

Если в (2.14) принять $\alpha = 0$, то получим две независимые системы

$$\square_2^0 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \vec{X} = 0; \quad (2.15)$$

$$\square_4^0 \vec{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \text{grad div } \vec{\varphi} + \vec{Y} = 0, \quad (2.16)$$

где

$$\square_2^0 = \mu \nabla^2 - \rho \partial_t^2; \quad \square_4^0 = (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - I \partial_t^2.$$

Векторное уравнение (2.15) представляет собой систему уравнений для перемещений в классической теории упругости, а уравнение (2.16)

относится к гипотетической упругой среде, в которой материальные частицы могут только вращаться, но не в состоянии перемещаться.

В формулах (2.14) свойства обеих сред сопряжены, т. е. любая материальная частица подвергается перемещению u_i и вращению φ_i , причем величины u_i и φ_i взаимно независимы.

Если на систему (2.14) действовать оператором дивергенции, то получим два волновых уравнения

$$\square_1 \gamma_{kk} + \operatorname{div} \vec{X} = 0 \quad (2.17); \quad \square_3 \kappa_{kk} + \operatorname{div} \vec{Y} = 0. \quad (2.18)$$

Здесь

$$\gamma_{kk} = \operatorname{div} \vec{u}; \quad \kappa_{kk} = \operatorname{div} \vec{\varphi};$$

$$\square_1 = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 - \rho \partial_t^2; \quad \square_3 = (\beta + 2\gamma) \nabla^2 - 4\alpha - I \partial_t^2.$$

Уравнение (2.17) характеризует дилатационную волну, распространяющуюся с постоянной скоростью $c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}$. Оно не отличается от волнового уравнения для дилатации в классической теории упругости.

Уравнению (2.18) не соответствует ни одно из уравнений классической теории упругости. В теории микрополярной среды оно представляет уравнение распространения величины $\kappa_{kk} = \operatorname{div} \vec{\varphi}$. В дальнейшем будем называть его уравнением ротационной волны — волны вращения. Уравнение вида (2.18) встречается в квантовой электродинамике и известно под названием дифференциального уравнения Клейна — Гордона. Волна, описываемая им, не затухает, однако подвержена дисперсии. Фазовая скорость монохроматической волны зависит в данном случае от частоты колебаний ω .

Применив к уравнениям (2.14) операцию ротации, получаем сопряженную систему

$$\square_2 \vec{\Omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{\Theta} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{X}; \quad (2.19)$$

$$\square_4 \vec{\Theta} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{\Omega} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{Y}, \quad (2.20)$$

где

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u}; \quad \vec{\Theta} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\varphi}.$$

Методом исключения находим

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \vec{\Omega} = \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{Y} - \frac{1}{2} \square_4 \operatorname{rot} \vec{X}; \quad (2.21)$$

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \vec{\Theta} = \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{X} - \frac{1}{2} \square_2 \operatorname{rot} \vec{Y}. \quad (2.22)$$

Если в (2.19) положить $\alpha = 0$, то получим уравнение

$$\square_2^0 \vec{\Omega} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{X}, \quad (2.23)$$

известное в классической эластокинетике как уравнение распространения функции $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u}$. Эта волна не затухает, не подвержена дисперсии и распространяется с постоянной скоростью поперечной волны $c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}$.

Из (2.20) при $\alpha = 0$ имеем уравнение

$$\square_4^0 \vec{\Theta} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{Y}, \quad (2.24)$$

описывающее распространение волны $\Theta = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \varphi$ в гипотетической среде, в которой допускается лишь вращение материальных частиц. Такая волна не подвержена дисперсии и распространяется с постоянной скоростью $c_4 = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{I}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Система (2.14) неудобна для решения, так как векторные уравнения содержат функции \vec{u} и $\vec{\varphi}$. Чтобы свести ее к системе более простых волновых уравнений, последуем методу, указанному Ламе в классической теории упругости, основанному на разложении векторов \vec{u} и $\vec{\varphi}$ на потенциальную и соленоидальную части.

Таким образом, принимая

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{\Psi}; & \operatorname{div} \vec{\Psi} &= 0; \\ \vec{\varphi} &= \operatorname{grad} \Gamma + \operatorname{rot} \vec{H}; & \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

и аналогично для массовых сил и моментов

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \varrho (\operatorname{grad} \vartheta + \operatorname{rot} \vec{\chi}); & \operatorname{div} \vec{\chi} &= 0; \\ \vec{Y} &= I (\operatorname{grad} \sigma + \operatorname{rot} \vec{\eta}); & \operatorname{div} \vec{\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

и затем подставляя (2.24), (2.25) в (2.14), получаем

$$\square_1 \Phi + \varrho \vartheta = 0 \quad (2.27); \quad \square_3 \Gamma + I \sigma = 0; \quad (2.28)$$

$$\square_2 \vec{\Psi} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{H} + \varrho \vec{\chi} = 0 \quad (2.29); \quad \square_4 \vec{H} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{\Psi} + I \vec{\eta} = 0. \quad (2.30)$$

Уравнение (2.27) следует рассматривать как уравнение продольной волны (оно точно соответствует уравнению продольной волны в классической эластокинетике), а (2.28) является уравнением ротационной волны, обладающим той же структурой, что и уравнение для функции $\kappa_{kk} = \operatorname{div} \vec{\varphi}$.

Полагая в (2.29) и (2.30) $\alpha = 0$, находим

$$\square_2^0 \vec{\Psi} + \varrho \vec{\chi} = 0; \quad \square_4^0 \vec{H} + I \vec{\eta} = 0. \quad (2.31)$$

Первое из этих уравнений известно из классической эластокинеки как уравнение поперечной волны, второе описывает волну в гипотетической среде, в которой допускается вращение. Исключая из уравнений (2.29), (2.30) сначала функцию \vec{H} , а затем $\vec{\Psi}$, запишем

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \vec{\Psi} = 2\alpha I \operatorname{rot} \vec{\eta} - \varrho \square_4 \vec{\chi}; \quad (2.32)$$

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \vec{H} = 2\alpha \varrho \operatorname{rot} \vec{\chi} - I \square_2 \vec{\eta}. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.32) по аналогии с (2.31) будем называть уравнением модифицированной поперечной волны, а (2.33) — уравнением модифицированной волны вращения.

Таким образом, система (2.14) приведена к системе более простых волновых уравнений (2.27), (2.28), (2.32), (2.33). Сформулируем обратную теорему.

Теорема. Пусть $u_i(x, t)$, $\varphi_i(x, t)$ — частные решения системы для области V и времени $t_1 < t < t_2$. Существуют такие скалярные Φ , Γ и векторные $\vec{\Psi}$, \vec{H} функции, что перемещение и вращение можно выразить в виде

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}; & \text{div } \vec{\Psi} &= 0; \\ \vec{\varphi} &= \text{grad } \Gamma + \text{rot } \vec{H}; & \text{div } \vec{H} &= 0,\end{aligned}\quad (2.34)$$

причем Φ , Γ , $\vec{\Psi}$, \vec{H} должны удовлетворять волновым уравнениям (2.27), (2.28), (2.32), (2.33).

Доказательство этой теоремы (так называемое доказательство полноты потенциалов) дано в работе [14]. Оно является обобщением на упругую микрополярную среду, известную из классической эластокинетики теоремы П. Дюгема [7].

§ 3. Распространение упругих волн в неограниченном упругом пространстве. Приведем несколько решений и некоторые замечания, относящиеся к распространению упругих волн в неограниченной микрополярной среде.

Поведение продольной волны Φ ничем не отличается от ее поведения в среде Гука. Распространение волны описывается с помощью запаздывающего потенциала, интегралов Пуассона, теоремы Кирхгофа — Гельмгольца для трехмерного случая, теоремой Вольтерра и Рисса для двухмерных случаев [4], а также классической теоремой Даламбера для одномерного движения.

Кроме того, с продольной волной, генерированной источником $\Phi(x, t)$, связаны симметричные тензоры деформаций γ_{ji} и напряжений σ_{ji} . В этом случае имеем

$$u_i = \Phi_{,i}; \quad \gamma_{ji} = \Phi_{,ij}; \quad \kappa_{ji} = 0; \quad \sigma_{ij} = 2\mu\Phi_{,ij} + \lambda\delta_{ij}\nabla^2\Phi; \quad \mu_{ij} = 0. \quad (3.1)$$

Запишем волновое уравнение Клейна — Гордона

$$\square_3 \Gamma + I\sigma = 0, \quad (3.2)$$

в котором тензоры κ_{ij} и μ_{ij} симметричны.

Принимая во внимание соотношения

$$\Phi_i = \Gamma_{,i}; \quad \kappa_{ij} = \Gamma_{,ij}; \quad \gamma_{ij} = 0,$$

получаем

$$\mu_{ji} = 2\gamma\Gamma_{,ij} + \beta\delta_{ij}\nabla^2\Gamma; \quad \sigma_{ji} = 0.$$

Приведем решения уравнения (3.2) для трехмерных задач, которые, по-видимому, получены впервые [13].

Рассмотрим сначала неоднородное уравнение с однородными начальными условиями. Решения этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\Gamma(\xi, t) = \frac{1}{4\pi c_3^2} & \left[\int_V \frac{\sigma(x, t - R/c_3)}{R(x, \xi)} dV(x) + \int_V \frac{dV(x)}{R(x, \xi)} \int_0^t \sigma(x, t - \tau) \times \right. \\ & \left. \times G(x, \xi, \tau) d\tau \right] \quad (R \leq c_3 t). \quad (3.3)\end{aligned}$$

Здесь

$$G(x, \xi, t) = -\frac{Rv}{c_3} \frac{J_1(v \sqrt{t^2 - R^2/c_3^2})}{\sqrt{t^2 - R^2/c_3^2}} H(t - R/c_3);$$

$H(z)$ — функция Хевисайда; R — расстояние между точками x и ξ ; $J_1(z)$ — функция Бесселя I рода, первого порядка.

Приведенное решение состоит из двух частей: запаздывающего потенциала, обладающего той же структурой, что и в случае классического волнового уравнения, и интеграла со сверткой.

Рассмотрим однородное ($\sigma = 0$) волновое уравнение (3.2) с начальными условиями

$$\Gamma(x, 0) = g(x); \quad \dot{\Gamma}(x, 0) = h(x). \quad (3.4)$$

Решение этого уравнения представим в форме

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) = & tM_{ct}\{h(x_i, t)\} + \frac{\partial}{\partial t}[tM_{ct}\{g(x_i, t)\}] + \\ & + \frac{1}{4\pi c_3^2} \int_V \left[h(\xi) + g(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \right] G(\xi, x, t) dV(\xi), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$M_{ct}\{h(x_i, t)\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi h(x_i + n_i c_3 t) \sin \theta d\theta$$

— среднее арифметическое значение функции h по сфере, радиусом $c_3 t$ с центром в точке x , причем величины n_i под знаком последнего интеграла являются направляющими косинусами радиуса сферы, заданными в сферических координатах

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin \theta \cos \psi; & n_2 &= \sin \theta \sin \psi; & n_3 &= \cos \theta; \\ 0 &\leq \theta \leq \pi; & 0 &\leq \psi < 2\pi. \end{aligned}$$

Формула (3.5) является обобщением интегральной формулы Пуассона, известной из теорий классического волнового уравнения. Если $v = 0$, то в (3.5) сохраняются лишь два первых интеграла, представляющих интегралы Пуассона.

Приведем формулу, обобщающую известную формулу Кирхгофа на уравнение Клейна — Гордона

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi, t) = & -\frac{1}{4\pi} \int_A \left\{ [\Gamma] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{c_3 R} \frac{\partial R}{\partial n} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right] - \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right] \right\} dA(x) - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_A dA(x) \int_0^t \left\{ \left[G(R, \tau) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial n} \right] \Gamma(x, t - \tau) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{R} G(R, \tau) \frac{\partial \Gamma(x, t - \tau)}{\partial n} \right\} d\tau \quad (\xi \in V); \\ \Gamma(\xi, t) &= 0 \quad (\xi \in S - V). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь значение функции Γ в точке ξ области V представлено с помощью интегралов по поверхности от выражений, содержащих Γ и ее производные

по направлению нормали и по времени на поверхности A , ограничивающей область V . При выводе этой формулы предполагалось, что функция Γ вместе с первыми и вторыми производными непрерывна в области V и на поверхности A . При $\alpha = 0$ формула (3.6) сводится к классической формуле Кирхгофа.

Для монохроматических колебаний получаем выражение, обобщающее формулы Гельмгольца на уравнение Клейна — Гордона

$$\Gamma^*(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_A \left[\frac{\partial \Gamma^*}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \Gamma^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] dA(x) \quad (\xi \in V);$$

$$\Gamma^*(\xi) = 0 \quad (\xi \in S - V).$$
(3.7)

При этом

$$\Gamma(\xi, t) = \Gamma^*(\xi) e^{-i\omega t}; \quad k = \frac{\omega}{c_3} \left(1 - \frac{v^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad v^2 = \frac{4\alpha}{I}.$$

Формула (3.7) имеет смысл лишь в том случае, когда $v^2 > \frac{4\alpha}{I}$, так как только при этом условии фазовая скорость вещественна. Зависимость фазовой скорости $c = \frac{\omega}{k}$ от частоты ω указывает на дисперсию волны вращения. При $v \rightarrow 0$ уравнение (3.7) переходит в формулу Гельмгольца, соответствующую классическому случаю.

Уравнения (2.32) и (2.33) в настоящее время мало исследованы. Рассматривались только однородные волновые уравнения и их фундаментальные решения.

§ 4. Фундаментальные решения уравнений эластокинетики. Фундаментальными решениями будем называть сингулярные решения дифференциальных уравнений в зависимости от расстояния R и точек x, ξ в неограниченном упругом пространстве.

Приведем общие формулы (с помощью которых можно определить перемещение и вращение в точке x бесконечной среды), вызванные действием массовых сил и моментов. Эти формулы получены методом четырехкратного применения интегрального преобразования Фурье к волновым уравнениям. Выражая потенциалы Φ, Γ, Ψ, H через перемещение \vec{u} и вращение $\vec{\varphi}$, получаем

$$u_j(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{W_4} \left\{ \frac{\xi_i \xi_k \tilde{X}_k}{\rho c_1^2 \xi^2 (\xi^2 - \tau_1^2)} - \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\xi^2 + v^2 - \tau_4^2}{c_2^2 \rho \xi^2} (\xi_j \xi_k \tilde{X}_k - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \xi_k^2 \tilde{X}_j) + \frac{is}{Ic_4^2} \epsilon_{jkl} \xi_k \tilde{Y}_l \right] \right\} \exp[-i(\xi_k x_k + \eta t)] dW; \quad (4.1)$$

$$\varphi_j(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{W_4} \left\{ \frac{\xi_j \xi_k \tilde{Y}_k}{Ic_3^2 \xi^2 (\xi^2 + \tau^2 - \tau_3^2)} - \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\xi^2 - \tau_2^2}{Ic_4^2 \xi^2} (\xi_j \xi_k \tilde{Y}_k - \xi^2 \tilde{Y}_j) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{ip}{\rho c_2^2} \epsilon_{jkl} \xi_k \tilde{X}_l \right] \right\} \exp[-i(\xi_k x_k + \eta t)] dW, \quad (4.2)$$

где $dW = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\eta$; W_4 — четырехмерное пространство $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta$;

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2; \quad \Delta = (\xi^2 - \lambda_1^2)(\xi^2 - \lambda_2^2); \quad s = \frac{2\alpha}{\mu + \alpha}; \quad \rho = \frac{2\alpha}{\gamma + \alpha};$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [\tau_2^2 + \tau_4^2 + \eta_0^2 - \nu_0^2 \pm \sqrt{(\tau_4^2 - \tau_2^2 - \eta_0^2 + \nu_0^2)^2 + 4\rho s \tau_2^2}];$$

$$\tau_j = \frac{\eta}{c_j} \quad (j = 1, 2, 3, 4); \quad \eta_0^2 = \frac{4\alpha^2}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}; \quad \nu_0^2 = \frac{4\alpha}{Ic_4^2};$$

$$c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad c_2 = \left(\frac{\mu + \alpha}{\varrho} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$c_3 = \left(\frac{\beta + 2\gamma}{I} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad c_4 = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{I} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Несмотря на сложность этих выражений и необходимость многократного интегрирования по бесконечной области легко получаются выражения для перемещения и вращения, вызванные действием сосредоточенных сил и моментов, гармонически изменяющихся во времени.

Предположим, что сосредоточенная сила $X_j = \delta(x - \xi) \delta_{jl} e^{-i\omega t}$ приложена в точке ξ и направлена параллельно оси x_l . Тогда перемещения $u_j = u_j^{(l)}(x, \xi, t)$ и вращение $\varphi_j = \Phi_j^{(l)}(x, \xi, t)$ выразятся формулами

$$u_j^{(l)}(x, \xi, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\varrho\omega^2} \left[F\delta_{jl} + \frac{\partial^2 k}{\partial x_l \partial x_l} \right]; \quad (4.3)$$

$$\Phi_j^{(l)}(x, \xi, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\varrho c_2^2 (k_1^2 - k_2^2)} \epsilon_{ljk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{e^{ik_1 R} - e^{ik_2 R}}{R} \right) \quad (j, k, l = 1, 2, 3). \quad (4.4)$$

Здесь введены обозначения:

$$F = A_1 k_1^2 \frac{e^{ik_1 R}}{R} + A_2 k_2^2 \frac{e^{ik_2 R}}{R};$$

$$k = A_1 \frac{e^{ik_1 R}}{R} + A_2 \frac{e^{ik_2 R}}{R} + A_3 \frac{e^{i\sigma_1 R}}{R};$$

$$A_1 = \frac{\sigma_2^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}; \quad A_2 = \frac{\sigma_2^2 - k_1^2}{k_2^2 - k_1^2}; \quad A_3 = -1;$$

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_2^2 + \sigma_4^2 + p(s-2) \pm \sqrt{[\sigma_4^2 - \sigma_2^2 + p(s-2)]^2 + 4ps\sigma_2^2} \right\},$$

$$\sigma_j = \frac{\omega}{c_j} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Если в точке ξ действует сосредоточенный момент $Y_j = \delta(x - \xi) \delta_{jl} e^{-i\omega t}$, направленный параллельно оси x_l , то, обозначив перемещения $\hat{u}_j^{(l)}$, а вращения $\hat{\Phi}_j^{(l)}$, получим

$$\hat{u}_j^{(l)} = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi l c_4^2 (k_1^2 - k_2^2)} \epsilon_{ljk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{e^{ik_1 R} - e^{ik_2 R}}{R} \right); \quad (4.5)$$

$$\hat{\Phi}_j^{(l)} = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi l c_4^2} (L \delta_{jl} + \partial_j \partial_l N) \quad (j, k, l = 1, 2, 3), \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} L &= C_1 k_1^2 \frac{e^{ik_1 R}}{R} + C_2 k_2^2 \frac{e^{ik_2 R}}{R}; \\ N &= C_1 \frac{e^{ik_1 R}}{R} + C_2 \frac{e^{ik_2 R}}{R} + C_3 \frac{e^{ik_3 R}}{R}; \\ C_1 &= \frac{k_1^2 - \sigma_2^2}{k_1^2 (k_1^2 - k_2^2)}; \quad C_2 = \frac{k_2^2 - \sigma_2^2}{k_1^2 (k_2^2 - k_1^2)}; \quad C_3 = \frac{-\sigma_2^2}{k_1^2 k_2^2}; \\ k_3 &= \frac{1}{c_3} (\omega^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}; \quad v^2 = \frac{4\alpha}{I}. \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай ($\alpha = 0$); формулы для фундаментальных решений классической эластокинетики имеют вид

$$\hat{U}_j^{(l)} = \left[\frac{e^{i\beta_0 R}}{4\pi \mu R} \delta_{jl} - \frac{1}{4\pi \rho \omega^2} \partial_j \partial_l \left(\frac{e^{i\sigma_1 R} - e^{i\beta_0 R}}{R} \right) \right] e^{-i\omega t} \quad (4.7); \quad \hat{\Phi}_j^{(l)} = 0. \quad (4.8)$$

Здесь $\beta_0 = \frac{\omega}{c_2}$; $\sigma_1 = \frac{\omega}{c_1}$; $c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$ — скорость распространения продольной волны в среде Гука).

Из уравнений (4.5), (4.6), предполагая $\alpha = 0$, получаем

$$\hat{U}_j^{(l)} = 0; \quad (4.9)$$

$$\hat{\Phi}_j^{(l)} = \left[\frac{1}{4\pi (\gamma + \varepsilon)} \frac{e^{i\sigma_3 R}}{R} \delta_{jl} - \frac{1}{4\pi I \omega^2} \partial_j \partial_l \left(\frac{e^{i\sigma_3 R} - e^{i\sigma_1 R}}{R} \right) \right] e^{-i\omega t}, \quad (4.10)$$

где $\sigma_3 = \frac{\omega}{c_3}$. Величина вращения $\hat{\Phi}_j^{(l)}$ относится к гипотетической среде, в которой допускается лишь вращение.

Если сосредоточенная сила и сосредоточенный момент направлены параллельно оси x_l , то из формул (4.4), (4.5) имеем $\Phi_l^{(l)} = 0$ и $\hat{U}_l^{(l)} = 0$. Следовательно, значения κ_{jl} ($l = 1, 2, 3$) и γ_{ll} (без суммирования по l) равны нулю.

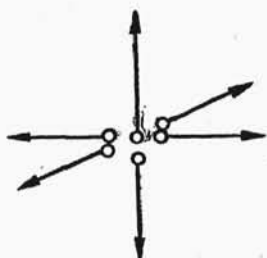
Для каждого l в результате действия сосредоточенной силы получаем по одному вектору перемещения $\vec{u}^{(l)}$ и вращения $\vec{\Phi}^{(l)}$. Принимая поочередно $l = 1, 2, 3$, находим 9 компонент тензора перемещения $u_j^{(l)}$ и 9 — тензора

вращения $\Phi_j^{(l)}$. Аналогично для сосредоточенного момента имеем тензоры перемещения $\hat{u}_j^{(l)}$ и вращения $\hat{\Phi}_j^{(l)}$. Эти результаты значительно расширяют классическое решение, где имеется лишь один тензор перемещений $\hat{U}_j^{(l)}$, выраженный формулой (4.7).

Для рассматриваемых тензоров справедливы следующие зависимости:

$$\begin{aligned} U_j^{(l)}(\xi, x, t) &= U_l^{(j)}(x, \xi, t); & \Phi_j^{(l)}(\xi, x, t) &= \Phi_l^{(j)}(x, \xi, t); \\ \hat{U}_j^{(l)}(\xi, x, t) &= \Phi_l^{(j)}(x, \xi, t), \end{aligned} \quad (4.11)$$

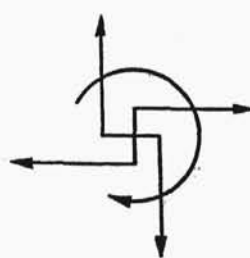
вытекающие из структуры формул (4.3) — (4.6) и теоремы [12] о взаимности работ.



Р и с. 1.



Р и с. 2.



Р и с. 3.

Зная фундаментальные решения для сосредоточенной силы и сосредоточенного момента, можем определить сингулярности высшего порядка. Таким образом, используя решение, соответствующее сосредоточенной силе, построим решение для двойной силы без момента, двойной силы с моментом и для центра сжатия.

Аналогично из решений для сосредоточенного момента построим двойной момент и центр кручения.

Приведем некоторые результаты. Для центра сжатия имеем (рис. 1)

$$u_j = \frac{1}{4\pi\varrho} \partial_j \left\{ \frac{\exp[-i\omega(t - R/c_1)]}{R} \right\}; \quad \varphi_j = 0; \quad c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.12)$$

Это решение не отличается от решения, полученного в рамках классической эластокинетики. Если в начале координат действует центр кручения (рис. 2)

$$u_j = 0; \quad \varphi_j = \frac{1}{4\pi I k_3^3 c_3^2} \partial_j \frac{[\exp(-i\omega t + i k_3 R)]}{R}; \quad k_3 = \frac{1}{c_3} (\omega^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.13)$$

т. е. имеет место волна, подвергающаяся дисперсии.

Пусть в начале координат действуют две пары сил с моментом (рис. 3). Совершая предельный переход, получаем следующее выражение для перемещений u_j :

$$u_j = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\varrho\omega^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_2}, -\frac{\partial F}{\partial \xi_1}, 0 \right); \quad F = A_1 k_1^2 \frac{e^{i k_1 R}}{R} + A_2 k_2^2 \frac{e^{i k_2 R}}{R}. \quad (4.14)$$

В случае сосредоточенного момента $Y_l = \delta(x - \xi) \delta_{lj} e^{-i\omega t}$ получим формулу (4.5), в которой нужно взять $l = 3$.

Как видим, эти формулы неодинаковы. Следовательно, в теории микрополяридной среды нельзя заменять действие сосредоточенного момента парами сосредоточенных сил (с моментом). Здесь сосредоточенный момент является таким же равноправным и независимым источником, как и сосредоточенная сила.

Фундаментальные решения, полученные в случае бесконечного пространства, применяются при построении решений для ограниченных областей. При этом пользуются формулами, аналогичными формулам Соми-лианы в классической эластокинетике.

§ 5. Распространение волн в ограниченных телах. Выведенные волновые уравнения дают возможность построить решения для распространения волн в ограниченных телах. Рассмотрим две задачи: распространение продольной монохроматической волны в неограниченной плите, а также распространение продольной волны и волны кручения в бесконечном стержне круглого сечения. В первом случае — это двухмерная задача, где волна передвигается с постоянной фазовой скоростью $c = \frac{\omega}{R}$ в направлении x_2 , причем причины и следствия предполагаются независимыми от переменной x_3 .

Для этой задачи система шести дифференциальных уравнений разделяется на две независимые системы. Первая из них приобретает вид

$$\begin{aligned} [(\mu + \alpha) \nabla_1^2 - \rho \partial_t^2] u_1 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 e + 2\alpha \partial_2 \varphi_3 &= 0; \\ [(\mu + \alpha) \nabla_1^2 - \rho \partial_t^2] u_2 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_2 e - 2\alpha \partial_1 \varphi_3 &= 0; \\ [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha - I \partial_t^2] \varphi_3 + 2\alpha (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) &= 0 \\ (\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2; \quad e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь векторам перемещения $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$ и вращения $\vec{\varphi} = (0, 0, \varphi_3)$ соответствуют напряжения σ_{ij} и μ_{ij}

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix}; \quad \mu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.2)$$

Вторая, независимая от (5.1), система уравнений будет

$$\begin{aligned} [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha - I \partial_t^2] \varphi_1 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \partial_1 \kappa + 2\alpha \partial_2 u_3 &= 0; \\ [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha - I \partial_t^2] \varphi_2 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \partial_2 \kappa - 2\alpha \partial_1 u_3 &= 0; \\ [(\mu + \alpha) \nabla_1^2 - \rho \partial_t^2] u_3 + 2\alpha (\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1) &= 0 \\ (\kappa = \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

При этом векторам $\vec{u} = (0, 0, u_3)$ и $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, 0)$ отвечают напряжения

$$\sigma = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix}; \quad \mu = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{vmatrix}. \quad (5.4)$$

Рассмотрим бесконечную плиту толщиной $2h$. Пусть в этой плите в направлении оси x_2 распространяется монохроматическая продольная волна с постоянной скоростью $c = \frac{\omega}{k}$. Предполагаем, что края плиты свободны от нагрузок. Тогда для $x_1 = \pm h$ имеем

$$\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{12} = 0; \quad \mu_{13} = 0. \quad (5.5)$$

Вводя упругие потенциалы Φ и Ψ , связанные с величинами u_1 и u_2 зависимостями

$$u_1 = \partial_1 \Phi - \partial_2 \Psi; \quad u_2 = \partial_2 \Phi - \partial_1 \Psi; \quad \varphi_3 = \varphi, \quad (5.6)$$

сводим систему (5.1) к трем волновым уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_1^2} \partial_t^2 \right) \Phi &= 0; \\ \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2 \right) \Psi - 2s\varphi &= 0; \\ \left(\nabla^2 - \frac{\gamma^2}{c_3^2} - \frac{1}{c_3^2} \partial_t^2 \right) \varphi + p \nabla_1^2 \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Решение этих уравнений в предположении, что

$$(\Phi, \Psi, \varphi) = (\Phi^*(x_1), \Psi^*(x_1), \varphi^*(x_1)) \exp[i(kx_2 - \omega t)],$$

с учетом краевых условий (5.5) приводит к двум трансцендентным уравнениям (для симметричных и несимметричных колебаний). Для симметричных колебаний получаем характеристическое уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} h(\delta h)}{\operatorname{tg} h(\lambda_1 h)} = \frac{(2\mu + \lambda) \delta^2 - k^2 \lambda}{4\mu^2 k^2 \lambda_1 \delta (\kappa_2 - \kappa_1)} \left[a_1 \kappa_2 - a_2 \kappa_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\operatorname{tg} h(\lambda_2 h)}{\operatorname{tg} h(\lambda_1 h)} \right]. \quad (5.8)$$

Здесь

$$a_j = \mu(k^2 + \lambda_j^2) + \alpha(\lambda_j^2 - k^2) - 2\alpha\kappa_j; \quad \delta = (k^2 - \sigma_1^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\kappa_j = \frac{1}{s} (\sigma_2^2 - k^2 - \lambda_j^2) \quad (j = 1, 2);$$

$$\lambda_{1,2}^2 = k^2 - \frac{1}{2} [\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \eta_0^2 - v^2 \mp \sqrt{(\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \eta_0^2 + v_0^2)^2 - 4\sigma_2^2(\sigma_4^2 - v_0^2)}];$$

$$\eta_0^2 = \frac{4\alpha^2}{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}; \quad v_0^2 = \frac{4\alpha}{Ic_4^2};$$

$\delta, \lambda_1, \lambda_2$ — функции параметра $k = \frac{\omega}{c}$; c — искомая фазовая скорость.

Из уравнения (5.8) определяем значения корней k и соответствующие им виды колебаний. Если в (5.8) принять $\alpha = 0$, что соответствует классической эластокинетике, то получим известное уравнение Ламба

$$\frac{\operatorname{tg} h(kh \sqrt{1 - c^2/\hat{c}_1^2})}{\operatorname{tg} h(kh \sqrt{1 - c^2/\hat{c}_2^2})} = \frac{(2 - c^2/\hat{c}_2^2)^2}{4 \sqrt{(1 - c^2/\hat{c}_1^2)(1 - c^2/\hat{c}_2^2)}}; \quad \hat{c}_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

Отметим два частных случая. Предположим, что длина волны мала по сравнению с толщиной плиты $2h$. Тогда значения δh , $\lambda_1 h$, $\lambda_2 h$ будут велики, и соотношение тангенсов можно принять равным единице.

Согласно работе [10] запишем уравнение

$$\frac{\kappa_2 a_1}{\kappa_2 - \kappa_1} - \frac{a_2 \lambda_1 \kappa_1}{\lambda_2 (\kappa_2 - \kappa_1)} = \frac{4\mu^2 k^2 \lambda_1 \delta}{(2\mu + \lambda) \delta^2 - k^2 \lambda}, \quad (5.10)$$

являющееся характеристическим для поверхностных волн в упругом полупространстве, которое при $\alpha = 0$ переходит в уравнение Рэлея

$$\left(2 - \frac{c^2}{\hat{c}_2^2}\right)^2 = 4 \sqrt{(1 - c^2/c_1^2)(1 - c^2/\hat{c}_2^2)}. \quad (5.11)$$

Если длина волны велика по сравнению с толщиной плиты $2h$, то величины δh , $\lambda_1 h$, $\lambda_2 h$ малы, и гиперболические тангенсы в (5.8) можно заменить их аргументами. В этом случае имеем

$$4\mu k^2 \delta^3 (\kappa_2 - \kappa_1) = [(2\mu + \lambda) \delta^3 - k^2 \lambda] (a_1 \kappa_2 - a_2 \kappa_1). \quad (5.12)$$

Для $\alpha \rightarrow 0$, т. е. при переходе к классической эластокинетики, получаем формулу для фазовой скорости

$$c = \frac{2\hat{c}_2}{c_1} \sqrt{c_1^2 - \hat{c}_2^2}.$$

При несимметричном виде колебаний относительно плоскости $x_1 = 0$ получим трансцендентное уравнение

$$\left(\frac{a_1 \kappa_2 \lambda_2}{\operatorname{tg} h(\lambda_1 h)} - \frac{a_2 \kappa_1 \lambda_1}{\operatorname{tg} h(\lambda_2 h)}\right) \operatorname{tg} h(\delta h) = \frac{4\mu^2 k^2 \delta^3 \lambda_1 \lambda_2 (\kappa_2 - \kappa_1)}{(2\mu + \lambda) \delta^3 - k^2 \lambda}. \quad (5.13)$$

Рассмотрим крайние случаи. Для волн очень малой длины по сравнению с толщиной плиты $2h$ получим уравнение (5.10) для поверхностных волн Рэлея.

Если длина волны значительно больше толщины плиты, то, разлагая в ряд гиперболические тангенсы и сохраняя только два первых члена, находим трансцендентное уравнение

$$\left(1 - \frac{\delta^2 h^2}{3}\right) \left[\frac{a_1 \kappa_2}{\lambda_1^2 \left(1 - \frac{\lambda_2^2 h^2}{3}\right)} - \frac{a_2 \kappa_1}{\lambda_2^2 \left(1 - \frac{\lambda_1^2 h^2}{3}\right)} \right] = \frac{4\mu^2 k^2 (\kappa_2 - \kappa_1)}{(2\mu + \lambda) \delta^3 - k^2 \lambda}, \quad (5.14)$$

из которого можно определить фазовую скорость $c = \frac{\omega}{k}$ волны изгиба.

Для $\alpha \rightarrow 0$ уравнение (5.12) переходит в известную формулу классической эластокинетики

$$c^2 = \frac{4}{3} (kh)^2 \hat{c}_2^2 \left(1 - \frac{\hat{c}_2^2}{c_1^2}\right). \quad (5.15)$$

Исследуем систему уравнений (5.3). Подобная система не встречается в классической эластокинетики. В этом случае в направлении x_2 распространяется поперечная монохроматическая волна $u_3 = u_3^*(x_1) \exp[i(kx_2 - \omega t)]$, которая сопровождается вращениями φ_1 и φ_2 . Волны этого типа известны под названием волн Лява, но только для слоистого упругого полупространства. Они возможны лишь при выполнении некоторых нера-

венств для материальных констант этих слоев. В микрополярной среде такие волны имеют место как для полупространства, так и для упругого слоя.

Подставляя в (5.3) зависимости

$$\varphi_1 = \partial_1 \Gamma - \partial_2 H; \quad \varphi_2 = \partial_2 \Gamma + \partial_1 H, \quad (5.16)$$

получаем систему трех волновых уравнений относительно функции Γ , H , u_3

$$\begin{aligned} \left(\nabla_1^2 - \frac{v^2}{c_3^2} - \frac{1}{c_3^2} \partial_t^2 \right) \Gamma &= 0; \\ \left(\nabla_1^2 - 2\rho - \frac{1}{c_4^2} \partial_t^2 \right) H - 2\rho u_3 &= 0; \\ \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2 \right) u_3 + 2s \nabla_1^2 H &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Решение этих уравнений в предположении, что

$$(\Gamma, H, u_3) = [\Gamma^*(x_1), H^*(x_1), u_3^*(x_1)] \exp[i(kx_2 - \omega t)]$$

подставим в краевые условия, которые в этом случае принимают вид

$$\mu_{11} = 0; \quad \mu_{12} = 0; \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = \pm h. \quad (5.18)$$

Для симметричного вида колебаний находим следующее трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} h(\sigma h)}{\operatorname{tg} h(\lambda_1 h)} &= \frac{1}{4k^2 \gamma^2 \sigma (\lambda_1 d_2 - \lambda_2 d_1)} \left\{ 4\gamma \alpha k^2 \left[e_2 \lambda_1 \frac{\operatorname{tg} h(\lambda_2 h)}{\operatorname{tg} h(\lambda_1 h)} - e_1 \lambda_2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + [(2\gamma + \beta) \sigma^2 - \beta k^2] \left[e_1 d_2 - e_2 d_1 \frac{\operatorname{tg} h(\lambda_2 h)}{\operatorname{tg} h(\lambda_1 h)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где

$$e_j = \gamma(\lambda_j^2 + k^2) + \varepsilon(\lambda_j^2 - k^2); \quad d_j = (\mu + \alpha) \lambda_j \varrho_j + 2\alpha \lambda_j;$$

$$\varrho_j = \frac{s(k^2 - \lambda_j^2)}{\lambda_j^2 - k^2 - \sigma^2} \quad (j = 1, 2);$$

$$\sigma = (k^2 + \kappa_0^2 - \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\kappa_0^2 = \frac{4\alpha}{\beta + 2\gamma} \right).$$

Из уравнения (5.19) можем определить значения параметра $k = \frac{\omega}{c}$ и соответствующие им фазовые скорости c , а также виды колебаний.

Для волн, длина которых мала по сравнению с толщиной плиты $2h$, получаем уравнение

$$4k^2 \gamma \sigma (\lambda_1 d_2 - \lambda_2 d_1) = 4\gamma \alpha k^2 (e_2 d_1 - e_1 d_2) + [(2\gamma + \beta) \sigma^2 - \beta^2 k^2] (e_1 d_2 - e_2 d_1), \quad (5.20)$$

из которого находим фазовую скорость поверхностной волны. В микрополярном полупространстве, кроме волн типа Рэлея, могут распространяться волны типа Лява $u_3 = u_3^*(x_1) \exp[i(kx_2 - \omega t)]$, которым сопутствуют модифицированные волны кручения φ_1, φ_2 .

Наметим кратко путь, которому надо следовать при определении фазовых скоростей для продольных волн и волн кручения в бесконечно длин-

ном стержне круглого сечения. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений для перемещения \vec{u} и вращения $\vec{\varphi}$. Переписывая эти уравнения в цилиндрических координатах (r, θ, z) и полагая независимость всех причин и следствий от угла θ , находим две независимые системы уравнений. Первая принимает вид

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_r + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial e}{\partial r} - 2\alpha \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_r, \\ (\mu + \alpha) \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{2\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varphi_\theta) &= \rho \ddot{u}_z; \\ (\gamma + \varepsilon) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \varphi_\theta - 4\alpha \varphi_\theta + 2\alpha \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) &= I \ddot{\varphi}_\theta. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Здесь

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad e = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Полям перемещений $\vec{u} = (u_r, 0, u_z)$ и вращений $\vec{\varphi} = (0, \varphi_\theta, 0)$ соответствуют силовое σ и моментное μ напряженные состояния

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{vmatrix}; \quad \mu = \begin{vmatrix} 0 & \mu_{r\theta} & 0 \\ \mu_{\theta r} & 0 & \mu_{\theta z} \\ 0 & \mu_{z\theta} & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.22)$$

Вторая, независимая от (5.21), система уравнений содержит перемещения $\vec{u} = (0, u_\theta, 0)$ и вращения $\vec{\varphi} = (\varphi_r, 0, \varphi_z)$

$$\begin{aligned} (\gamma + \varepsilon) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \varphi_r - 4\alpha \varphi_r + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \kappa}{\partial r} - 2\alpha \frac{\partial u_\theta}{\partial z} &= I \ddot{\varphi}_r; \\ (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \varphi_z - 4\alpha \varphi_z + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \kappa}{\partial z} + 2\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) &= I \ddot{\varphi}_z; \\ (\mu + \alpha) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_\theta + 2\alpha \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} \right) &= \rho \ddot{u}_\theta, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varphi_r) + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}.$$

Векторам перемещений $\vec{u} = (0, u_\theta, 0)$ и вращений $\vec{\varphi} = (\varphi_r, 0, \varphi_z)$ отвечают следующие поля силовых σ_{ji} и моментных μ_{ji} напряжений:

$$\sigma = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{\theta r} & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{zr} & 0 \end{vmatrix}; \quad \mu = \begin{vmatrix} \mu_{rr} & 0 & \mu_{rz} \\ 0 & \mu_{\theta\theta} & 0 \\ \mu_{zr} & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix}. \quad (5.24)$$

Рассмотрим первый случай, когда монохроматическая продольная волна распространяется вдоль оси стержня (ось z) с постоянной фазовой

скоростью c . Вводя упругие потенциалы Φ , Ψ , связанные с перемещениями при помощи соотношений

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}; \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right); \quad \varphi_\theta = -\frac{\partial \Lambda}{\partial r},$$

получаем систему волновых уравнений

$$\square_1 \Phi = 0; \quad (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) (\Psi, \Lambda) = 0. \quad (5.25)$$

Здесь первое уравнение описывает продольную, а второе модифицированную поперечную волну.

Принимая

$$(\Phi, \Psi, \Lambda) = [\Phi^*(r), \Psi^*(r), \Lambda^*(r)] \exp[i(kz - \omega t)] \quad (5.26)$$

и учитывая краевые условия (отсутствие нагрузок) на поверхности цилиндра

$$\sigma_{rr} = 0; \quad \sigma_{rz} = 0; \quad \mu_{r\theta} = 0 \quad (r = a), \quad (5.27)$$

находим систему трех однородных линейных уравнений. Приравняв нулю определитель, получаем характеристическое уравнение, которое из-за его сложности не приводим. Полагая, что длина волны гораздо больше радиуса цилиндра, можем разложить содержащиеся в общем уравнении функции Бесселя в бесконечный ряд и ограничиться рассмотрением лишь двух первых членов ряда. Тогда первым приближением будет следующее значение фазовой скорости:

$$c = \left[\frac{4\beta_4 - 2\beta_3/c_1^2 - \beta_3\beta_5 + 4\eta_0^2/c_2^2\beta_3k^2}{4\beta_4/c_1^2 + \beta_5(2\beta_4 + 4/\beta_3c_2^2) - 2\beta_1\beta_2\beta_3/c_1^2c_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.28)$$

Здесь

$$\beta_1 = 1 + \frac{\lambda}{\mu}; \quad \beta_2 = 1 + \frac{\alpha}{\mu}; \quad \beta_3 = \frac{v_0^2 - \eta_0^2}{k^2};$$

$$\beta_4 = \frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_4^2}; \quad \beta_5 = 2\frac{\beta_1}{c_1^2} + \frac{\beta_2}{c_2^2}.$$

Для $\alpha \rightarrow 0$, т. е. для случая классической эластокинетики из (5.28) находим известную формулу L. Pochhammer [15] $c = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Если длина волны очень мала по сравнению с радиусом кругового цилиндра a , то из общего трансцендентного уравнения, применяя асимптотический переход, получаем характеристические уравнения для поверхностных волн Рэлея в упругом полупространстве.

Наконец, рассмотрим волну кручения в стержне круглого сечения. Эта волна распространяется в направлении оси цилиндра с постоянной фазовой скоростью $c = \frac{\omega}{k}$. С помощью подстановки

$$\varphi_r = \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}; \quad \varphi_z = \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right); \quad u_\theta = -\frac{\partial \Omega}{\partial r} \quad (5.29)$$

из (5.23) получаем систему трех волновых уравнений

$$\square_3 \Gamma = 0; \quad (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) (\Psi, \Omega) = 0. \quad (5.30)$$

Первым из них описывается волна вращения, следующими — модифицированные поперечные волны.

Предполагая, что

$$(\Gamma, \Psi, \Omega) = [\Gamma^*(x_1), \Psi^*(r), \Omega^*(r)] \exp [i(kz - \omega t)], \quad (5.31)$$

и учитывая краевые условия

$$\mu_{rr} = 0, \quad \mu_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = a,$$

получаем трансцендентное уравнение относительно членов с бесселевыми функциями $J_0(\eta)$ и $J_1(\eta)$. Теперь можем поочередно определить значения фазовых скоростей и соответствующие им виды колебаний. При $\alpha \rightarrow 0$ имеем известное характеристическое уравнение волны кручения для классической эластокинетики [1]

$$\xi J_0'(\xi) = 2J_1(\xi); \quad \xi = a \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2}. \quad (5.32)$$

Указанные решения лишь в незначительной степени обсуждались количественно. В настоящее время неизвестны точные значения характеристических констант материала $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$; они известны только с точностью до порядка. Поэтому для вычислений можно принять лишь ориентировочные значения.

Рассмотрев проблему распространения монохроматических волн в среде Коссера, аналогично на основе волновых уравнений (2.27) — (2.30) можем решить более сложные задачи распространения волн, вызванных подвижными нагрузками; распространение монохроматических волн в слоистых средах и др.

Важным вопросом является получение фундаментальных решений для аperiодических колебаний. В настоящее время найдены лишь немногочисленные подобные решения, например, общее решение уравнения для волны вращения. Для определения сингулярных решений динамической задачи с мгновенными (импульсными) сосредоточенными силами и моментами получены лишь частичные результаты: для очень малых и очень больших промежутков времени.

Таким образом, существует обширный класс нерешенных проблем и частных задач. Однако темп развития исследований в этой области указывает, что в течение немногих лет появится возможность построения полной кинетики упругих сред Коссера, будущей своего рода надстройки классической эластокинетики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л., Континуальная теория асимметрической упругости, Учет «внутреннего» вращения, Физика твердого тела, т. 5, в. 9, 1963.
2. Пальмов В. А., Основные уравнения теории несимметричной упругости, Прикл. матем. и мех., т. XXVIII, в. 3, 1964.
3. Савин Г. Н., Распределение напряжений возле отверстий, К., Изд-во «Научовадумка», 1968.
4. Baker B. B., Copson E. T., The mathematical theory of Huygen's principle, Oxford, Clarendon press, 1939.
5. Cosserat E., Cosserat F., Sur la théorie de l'élasticité, Ann. Toulouse, № 10, 1896.
6. Cosserat E., Cosserat F., Théorie des corps deformables, Paris, A. Hermann et fils, 1909.
7. Duhem P., Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch, J. mat. pures et appl., № 6, 1900.
8. Eringen A. C., Suhubi E. S., Nonlinear theory of simple microelastic solids, Int. j. eng. sci., № 2, 1964.

9. Grioli G., Elasticita asimmetrica, Ann. di mat. pura ed appl., ser. IV, № 50, 1960.
10. Kaliski S., Kapelewski J., Rymarz C., Surface waves on an optical branch in a continuum with rotational degrees of freedom, Proc. vibr. probl., vol. 9, № 2, 1968.
11. Mindlin R. D., Tiersten H. F., Effects of couple — stresses in linear elasticity, Arch. rat. mech. anal., № 11, 1962.
12. Nowacki W., Couple - stresses in the theory of thermoelasticity, Bull. acad. Polon. sci., ser. sci. techn., vol. 14, № 8, 1966.
13. Nowacki W., Propagation of rotation waves in asymmetric elasticity, Bull. acad. Polon. sci., ser. sci. techn., vol. 16, № 10, 1968.
14. Nowacki W., On the completeness of potentials in micropolar elasticity, Arch. mech. stos., vol XXI, № 2, 1969.
15. Pochhammer L., Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder, J. reine angew. Math., Bd. 81, 1876.
16. Toupin R. A., Elastic materials with couple stresses, Arch. rat. mech. anal., vol. 13 № 11, 1962.
17. Toupin R. A., Theories of elasticity with couple-stresses, Arch. rat. mech. anal., № 17, 1964.
18. Truesdell C., Toupin R. A., The classical fields theories, Encyclopedia of physics, vol. 3, № 1, Berlin, Springer, 1960.
19. Voigt W., Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle, Abh. Ges. Wiss. Göttingen, № 34, 1887.

Поступила
27.V 1969 г.

Институт основных проблем техники
Польской АН
