

NAUKOWE OSIĄGNIĘCIA MECHANIKI W WALCE O POSTĘP W BUDOWNICTWIE

CZEŚĆ III, ZESZYT I

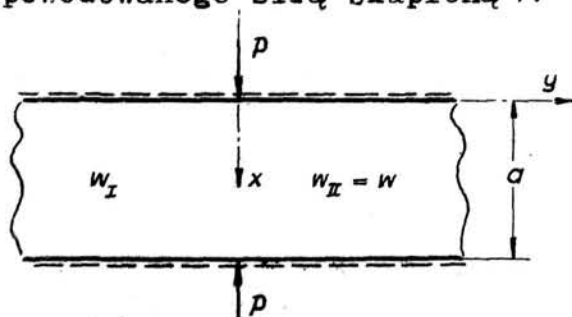
**z materiałów nadesłanych na Zjazd Naukowy PZITB
w Gdańsku 1 – 4 grudnia 1949 r.**

Z z a g a d n i e Ń s t a t e c z n o ś c i p ł y t p r o s t o k ą t n y c h .

A). W praktyce inżynierskiej spotkać można się nieraz z wypadkami obciążenia ścian (tarcz) znacznymi siłami skupionymi. Wyznaczenie sił krytycznych, wywołujących wyboczenie płyty dla kilku szczególnych wypadków obciążenia siłami skupionymi, to cel niniejszego przyczynku.

Ścisłe rozwiązanie zagadnienia wyboczenia płyty siłą skupioną, przy uwzględnieniu rozkładu naprężeń wywołanych w tarczy siłą skupioną natrafia na nieprzewyciężone dotychczas trudności matematyczne. Pomijając wpływ tych naprężeń otrzymamy siły krytyczne mniejsze niż w rzeczywistości występujące; w wyniku wyznaczymy ich dolną granicę.

Punktem wyjścia naszych rozważań będzie niezmiernie proste rozwiązanie A.Sommerfelda^{*)}, otrzymane dla wypadku wyboczenia płyty nieskończenie długiej w kierunku y (rys.1.), spowodowanego siłą skupioną P .



Rys. 1.

W rozwiązaniu tym powierzchnia ugięcia płyty dla $P > P_k$ przyjmuje postać:

$$w(x,y) = \dots (1)$$

$$= a_n \cdot \left(1 + \frac{n \cdot \pi \cdot y}{a}\right) \cdot e^{-\frac{n \cdot \pi \cdot y}{a}} \quad y > 0$$

Rozwiązanie to spełnia równanie różniczkowe powierzchni

ugięcia $\Delta \Delta w_{II} = 0$ oraz warunki brzegowe:

$$\begin{array}{llll} w(0,y) = 0 & \Delta w(0,y) = 0 & w(x,\infty) = 0 & \frac{\partial w(x,0)}{\partial y} = 0 \\ w(a,y) = 0 & \Delta w(a,y) = 0 & \frac{\partial w(x,\infty)}{\partial y} = 0 & \end{array}$$

Parametr a_n eliminuje A.Sommerfeld z warunku:

^{*)} A.Sommerfeld: "Über die Knicksicherheit der Stege von Walzprofilen". Z.f.Math.u.Phys.1906.

$$P_k = 2N \cdot \frac{\frac{\partial^3 w(x,0)}{\partial y^3}}{\frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial x^2}} \quad \dots (2)$$

Warunki te możnaby interpretować następująco:

Wytnijmy element o szerokości $2t$ i długości a tak, aby prosta $y=0$ była osią symetrii elementu.

Równanie różniczkowe odkształconej tego pręta będzie:

$$EJ \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2t \cdot p \frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial x^2} = q(x,0); \quad EJ = 2t \cdot \frac{h^3}{12}$$

gdzie h jest grubością płyty, p obciążeniem w sposób ciągły rozłożonym $\frac{P}{2t}$ oraz $q(x,0)$ obciążeniem pionowym pręta, równym różnicy sił tnących płyty na lewo i prawo od pręta.

Przy $t \rightarrow 0$ otrzymamy:

$$p \frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial x^2} = N \left(\frac{\partial^3 w_{II}(x,0)}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 w_I(x,0)}{\partial y^3} \right) = 2N \frac{\partial^3 w_{II}(x,0)}{\partial y^3}$$

Wstawiając do równania (2) funkcję (1) otrzymuje A.Sommerfeld siłę krytyczną

$$P_{kmin} = \frac{4N \cdot \pi}{a} \quad \text{dla } n=1 \quad \dots (3)$$

B). Występowanie czynnika $e^{-\frac{n \cdot \pi \cdot y}{a}}$ w równaniu (1) nasuwać musi przypuszczenie, że w wypadku nieskończonej ilości sił P w jednakowych odstępach b otrzymamy powierzchnię ugięcia płyty dla $P > P_k$ z sumowania zbieżnych szeregów.

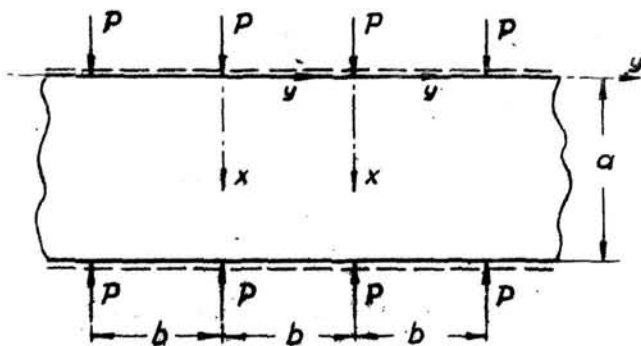
Zauważyć należy, że Prof.M.T.Huber pierwszy użył tego sposobu do rozwiązania szeregu ważnych przypadków zginania prostokątnych płyt ortotropowych^{*)}.

Dla tak określonego wypadku (rys.2.) otrzymamy rozwiązanie

$$w(x,y) = a_n \cdot \sin \alpha \cdot x \left[\sum_{v=0,1,2,\dots}^{\infty} e^{-\alpha \cdot y - \beta \cdot v} \cdot (1 + \alpha \cdot y + v \cdot \beta) + \sum_{v=1,2,3,\dots}^{\infty} e^{\alpha \cdot y - \beta \cdot v} \cdot (1 - \alpha \cdot y + v \cdot \beta) \right] \quad \dots (4)$$

^{*)}. M.T.Huber: " Teorya płyt prostokątnie-różnokierunkowych." Lwów, 1922, str.119 i dalsze.

$$b \geq y \geq 0, \quad \alpha = \frac{n \cdot \pi}{a}, \quad \beta = \alpha \cdot b. \quad \dots \text{ca}(4)$$



Rys. 2.

Wyliczamy kolejno:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = -\alpha_n \cdot a^2 \sin \alpha x \cdot \left[1 + 2 \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} e^{-\beta \cdot v} + \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} v \cdot e^{-\beta \cdot v} \right]$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Big|_{y=0} = -2 \alpha^3 \cdot a_n$$

Zważywszy, że:

$$\sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} e^{-\beta \cdot v} = \frac{1}{e^{\beta} - 1}, \quad \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} v \cdot e^{-v \cdot \beta} = \frac{e^{\beta}}{(1 - e^{\beta})^2}$$

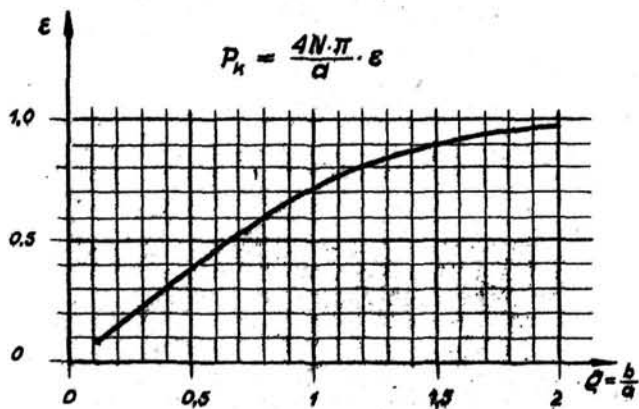
oraz, że:

$$1 + \frac{1}{e^{\beta} - 1} + 2\beta \frac{e^{\beta}}{(1 - e^{\beta})^2} = \frac{\sinh \lambda \cdot \cosh \lambda + \lambda}{\sinh^2 \lambda} \quad \lambda = \frac{\beta}{2}$$

uzyskamy z warunku brzegowego (2)

$$P_K = \frac{4N \cdot \pi}{a} \cdot \frac{\sinh^2 \lambda}{\sinh \lambda \cdot \cosh \lambda + \lambda} \quad \dots (5)$$

Okazuje się, że najmniejszą wartość P_K otrzymamy dla $n=1$. Dalej z równania (5) wynika, że przy $b \rightarrow \infty$; $\lambda \rightarrow \infty$ $P_K \rightarrow \frac{4N \cdot \pi}{a}$ a dla jednostajnego obciążenia $p = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{P}{b}$



Rys. 3.

Tabela I.

$Q = \frac{b}{a}$	ϵ	$Q = \frac{b}{a}$	ϵ
0,10	0,0785	1,0	0,722
0,20	0,157	1,2	0,815
0,40	0,313	1,4	0,872
0,60	0,463	1,6	0,925
0,80	0,602	1,8	0,955
		2,0	0,975

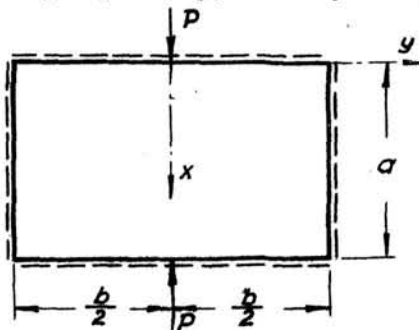
uzyskuje się: $P_K = \frac{N \cdot \pi^2}{a^2}$.

Rysunek 3 podaje wykres zależności między wielkościami P_K i $\frac{b}{a}$

C). Jeżeli równanie (4) napiszemy w odmiennej postaci:

$$W(x,y) = a_n \cdot \sin \alpha \cdot x \cdot \left[\sum_{v=0,1,2,\dots}^{\infty} (-1)^v \cdot e^{-\alpha \cdot y - \beta \cdot v} \cdot (1 + \beta \cdot v + \alpha \cdot y) + \right. \\ \left. + \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} (-1)^v \cdot e^{\alpha \cdot y - \beta \cdot v} \cdot (1 + \beta \cdot v - \alpha \cdot y) \right] \quad \dots (6)$$

co odpowiada wygięciu płyty przez kolejne siły P naprzemian w dół i w górę, dojdziemy do powierzchni wygięcia płyty o zerowych wartościach ugięcia w (oraz $\Delta w = 0$) w odległościach $\frac{b}{2}$ od punktów zaczenia sił P . Otrzymujemy w ten sposób wygięcie płyty prostokątnej o bokach a i b dookoła swobodnie podpartej, obciążonej siłami P w środku (rys.4.).



Rys.4.

Wyliczamy kolejno:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Big|_{y=0} = -2a_n \cdot \alpha^2 \cdot \sin \alpha \cdot x$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{y=0} = -a_n \cdot \alpha^2 \cdot \sin \alpha \cdot x \cdot \left[1 + 2 \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} (-1)^v \cdot e^{-\beta \cdot v} + \right. \\ \left. + 2\beta \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} (-1)^v \cdot e^{-\beta \cdot v} \cdot v \right]$$

Wprowadzając oznaczenie $\lambda = \frac{\beta}{2}$ oraz korzystając ze związków:

$$1 + 2 \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} (-1)^v \cdot e^{-\beta \cdot v} = 1 - 2e^{-2\lambda} + 2e^{-4\lambda} - 2e^{-6\lambda} + \dots = \tanh \lambda$$

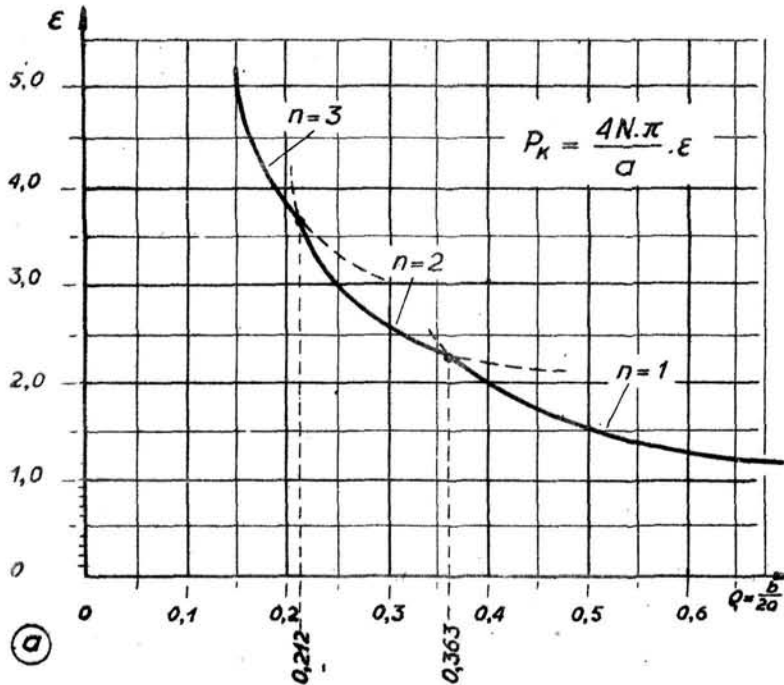
$$2\beta \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} v \cdot (-1)^v \cdot e^{-\beta \cdot v} = 4\lambda \cdot e^{-2\lambda} \cdot (1 - 2e^{-2\lambda} + 3e^{-4\lambda} - 4e^{-6\lambda} + \dots) = \frac{\lambda}{\cosh^2 \lambda}$$

wyliczamy wartość siły krytycznej P_K z równania (2):

$$P_K = \frac{4N \cdot \pi \cdot n}{a} \cdot \frac{\cosh^2 \lambda}{\cosh \lambda \cdot \sinh \lambda - \lambda} \quad \dots (7)$$

Na rys. 5.a,b przedstawiono najmniejsze wartości P_K w zależności od stosunku $\frac{b}{2a}$ i $\frac{2a}{b}$ oraz podano tabelarycznie zestawienie ich wartości. Zauważymy, że dla $\frac{b}{2a} = 0,363$ wybo-

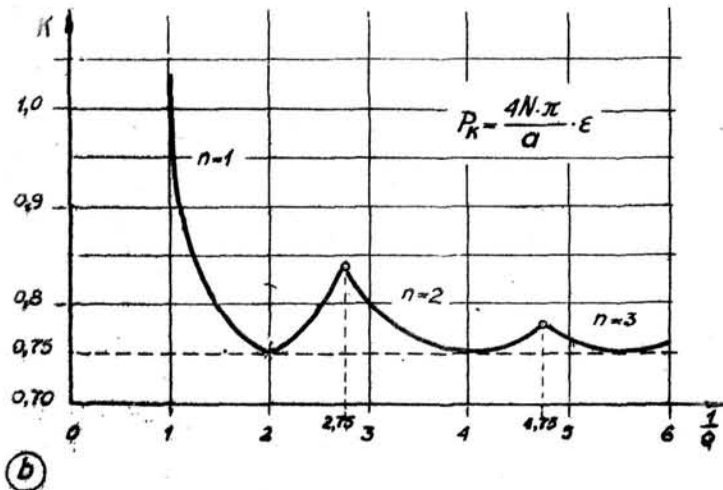
czenie płyty nastąpić może według jednej lub dwóch półfal, dla $\frac{b}{2a} = 0,212$ według dwóch lub trzech itd.



Przy ustalonym boku a otrzymamy dla $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$ wartość $P_K = \frac{4N\pi}{a}$ przy ustalonym boku b dla $a \rightarrow \infty$:

$$P_K = \frac{6N\pi}{a}$$

D). Jeżeli do powierzchni ugięcia w_1 , wyrażonej równaniem (4) dodamy ugięcie w_2 spowodowane obciążeniem liniowym $p_0 \sin \alpha x$ działającym w połowie odległości b między siłami P (ale dającymi powierzchnię ugięcia przeciwnego znaku), zrealizować możemy wypadek wybożenia płyty prostokątnej b, a w krawędziach równoległych do kierunku działania siły P , utwierdzonej zupełnie (rys.6.)



Rys. 5.

Żądać jednak musimy, aby wzdłuż linii działania obciążenia $p_0 \sin \alpha x$ łączne ugięcie $w_1(x, \frac{b}{2}) + w_2(x, \frac{b}{2}) = w(x, \frac{b}{2})$ było równe zero. Warunek ten pozwoli wyznaczyć wielkość obciążenia $p_0 \sin \alpha x$ a równanie (2) wielkość siły krytycznej P_K .

Zauważmy, że równanie (4) możemy, po wykonaniu działań przepisanych znakiem sumy, napisać w postaci:

$$w_1 = \alpha_n \sin \alpha x \cdot R(y) \quad \dots (8)$$

$$R(y) = \left[\alpha \cdot y + \frac{\sinh \lambda \cdot \cosh \lambda + \lambda}{\sinh^2 \lambda} \right] \cdot \cosh \alpha \cdot y - \\ - (1 + \alpha \cdot y \cdot \operatorname{ctgh} \lambda) \cdot \sinh \alpha \cdot y \quad \dots (8a)$$

Tabela II.

$\frac{\eta}{Q}$	$\varepsilon_{n=1}$	$\varepsilon_{n=2}$	$\varepsilon_{n=3}$	$\varepsilon_{n=4}$
∞	1,00			
1,0	1,041			
0,30	1,05			
0,85	1,07			
0,80	1,10			
0,70	1,15			
0,60	1,26			
0,55	1,36			
0,50	1,50			
0,45	1,73			
0,40		2,21		
0,35		2,29		
0,30		2,53		
0,25		3,01		
0,20			3,81	
0,167			4,51	
0,150			5,24	
0,10				7,98
0,05				37,35

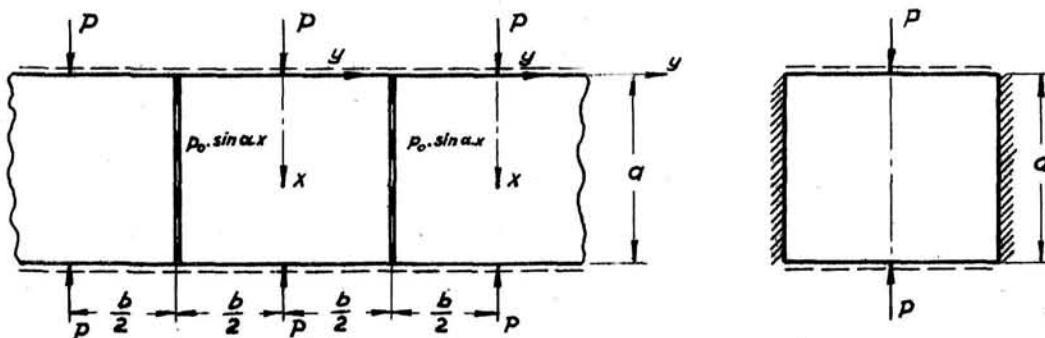
Obciążenie $p_0 \cdot \sin \alpha \cdot x$ działające wzdłuż prostej $y_1 = 0$ nieskończenie długiej płyty (rys.7.) wywołuje powierzchnię ugięcia *):

$$\bar{w} = \dots (9) \\ = p_0 \cdot \sin \alpha \cdot x \cdot \frac{\alpha^3}{4N \cdot \pi^3 \cdot n^3} \cdot e^{-\alpha \cdot y_1} \cdot (1 + \alpha \cdot y_1).$$

Dla obciążeń liniowych $p_0 \cdot \sin \alpha \cdot x$ działających w jednakowych odstępach b , otrzymamy przez sumowanie powierzchni ugięcia (analogicznie jak w ustępie B) równanie:

$$w_2 = \dots (10) \\ = \frac{p_0 \cdot \alpha^3}{4N \cdot \pi^3 \cdot n^3} \cdot R(y_1) \cdot \sin \alpha \cdot x$$

albo w układzie współrzędnych x, y . (rys.6.):



Rys. 6.

* *) M. T. Huber, "Teoria płyt prostokątne-różnokierunkowych" Lwów, 1922, str. 68.

$$w_2 = \frac{p_0 \cdot a^3}{4N \cdot \pi^3 \cdot n^3} \cdot F(y) \cdot \sin \alpha \cdot x,$$

gdzie

$$F(y) = \frac{\lambda \cdot \operatorname{ctgh} \lambda + 1}{\sinh \lambda} \cdot \cosh \alpha \cdot y - \alpha \cdot y \frac{\sinh \alpha \cdot y}{\sinh \lambda} \quad \dots (11)$$

Z warunku: $w_1(x, \frac{b}{2}) + w_2(x, \frac{b}{2}) = 0$

uzyskamy: $p_0 = - \frac{4N \cdot \pi^3 \cdot n^3}{a^3} \cdot a_n \cdot \frac{R(\lambda)}{F(\lambda)}$

Przy tak ustalonym p_0 równanie powierzchni ugięcia przyjmuje postać:

$$w(x, y) = a_n \cdot \sin \alpha \cdot x \left[R(y) - \frac{R(\lambda)}{F(\lambda)} \cdot F(y) \right] \quad \dots (12)$$

Wykonując różniczkowanie:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Big|_{y=0} = a_n \cdot \sin \alpha \cdot x \left[R'''(0) - \frac{R(\lambda)}{F(\lambda)} F'''(0) \right] = -2\alpha^3 a_n \cdot \sin \alpha \cdot x,$$

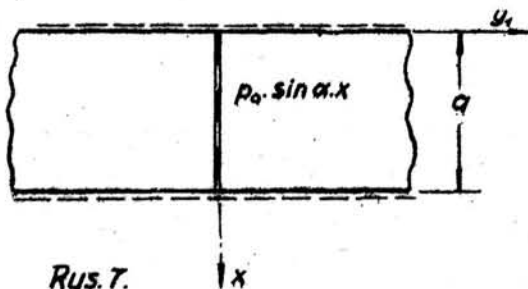
$$R'''(0) = -2\alpha^3; \quad F'''(0) = 0,$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{y=0} &= -\alpha^2 a_n \cdot \sin \alpha \cdot x \left[R(0) - \frac{R(\lambda)}{F(\lambda)} \cdot F(0) \right] = \\ &= a_n \cdot \alpha^2 \frac{\sinh^2 \lambda - \lambda}{\sinh \lambda \cdot \cosh \lambda + \lambda} \cdot \sin \alpha \cdot x; \end{aligned}$$

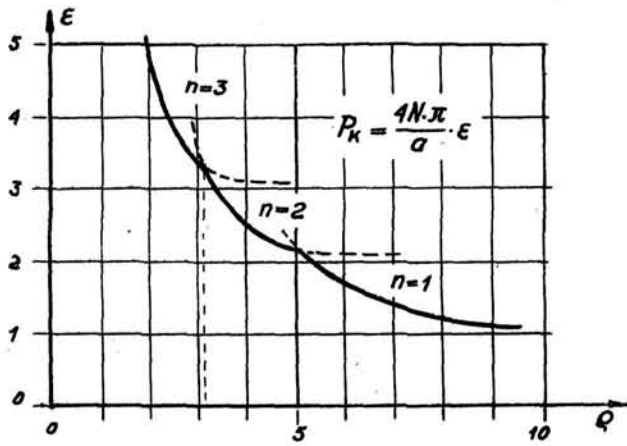
$$F(\lambda) = R(0) = \frac{\sinh \lambda \cdot \cosh \lambda + \lambda}{\sinh^2 \lambda};$$

$$F(0) = R(\lambda) = \frac{\lambda \cdot \cosh \lambda + \sinh \lambda}{\sinh^2 \lambda}$$

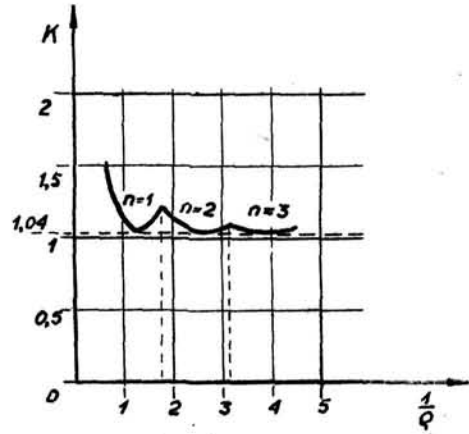


otrzymamy równanie (2) wielkości siły krytycznej:

$$\begin{aligned} P_k &= \dots (13) \\ &= \frac{4N \cdot \pi}{a} \cdot \frac{\sinh \lambda \cdot \cos \lambda + \lambda}{\sinh^2 \lambda - \lambda} \end{aligned}$$



Rys. 8a.



Rys. 8b.

Na rys. 8a, b przedstawiono najmniejsze wartości P_K w zależności od $\frac{2a}{b}$ i $\frac{b}{2a}$ oraz podano tabelaryczne zestawienie ich wartości.

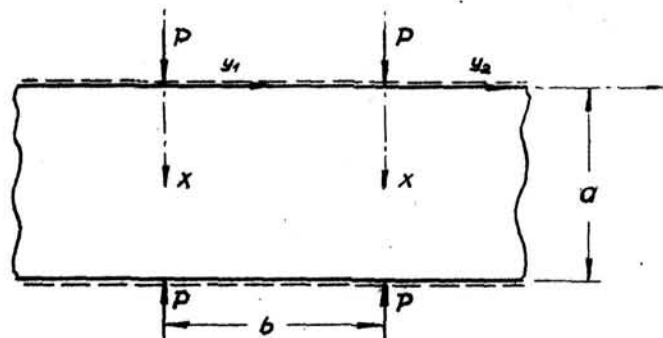
Tabela III.

Q	ϵ n=1	ϵ n=2	ϵ n=3	ϵ n=4
∞	1,00			
0,90	1,15			
0,85	1,19			
0,80	1,24			
0,70	1,42			
0,65	1,57			
0,60	1,74			
0,55	2,01			
0,50		2,18		
0,45		2,30		
0,40		2,50		
0,35		2,84		
0,30			3,35	
0,25			3,93	
0,20				5,00
0,15				6,97
0,10				15,83

Przy ustalonym boku a otrzymujemy dla $b \rightarrow \infty$ wartość $P_K = \frac{4N\pi}{a}$, dla $a \rightarrow \infty$ przy ustalonym b : $P_K = 7,88 \frac{N\pi}{b}$.

E). Rozważmy jeszcze wypadek działania dwóch sił P w odległości b . (rys.9.)

Korzystając ze wzoru (4) napiszemy równanie powierzchni ugięcia płyty dla $P > P_K$ w postaci:



Rys. 9.

$$w_1 = a_n \cdot \sin \alpha x \cdot [e^{-\alpha y_1} \cdot (1 + \alpha y_1) + e^{\alpha y_1 - \beta} \cdot (1 - \alpha y_1 + \beta)] \quad \dots (14a)$$

$$0 < y_1 < b$$

$$w_2 = a_n \cdot \sin \alpha x \cdot [e^{-\alpha y_2} \cdot (1 + \alpha y_2) + e^{-\alpha y_2 - \beta} \cdot (1 + \alpha y_2 + \beta)] \quad \dots (14b)$$

$$y_2 \geq 0$$

Łatwo sprawdzić, że w przekroju: $y_1 = b$; $y_2 = 0$

$$w_2 = w_1; \quad \frac{\partial w_1}{\partial y_1} = \frac{\partial w_2}{\partial y_2}; \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2}; \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial y_1^3} = - \frac{\partial^3 w_2}{\partial y_2^3}$$

Z warunku brzegowego (2), wypisanego dla przekroju $y_2 = 0$

$$-N \cdot \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y_1^3} - \frac{\partial^3 w_2}{\partial y_2^3} \right) = P \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad \dots (15)$$

otrzymamy po wykonaniu różniczkowania:

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial y_1^3} = a_n \cdot \alpha^3 \cdot \sin \alpha x \cdot [e^{-\beta} \cdot (2 - \beta) - 2]$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2} \Big|_{y_1=b} = -a_n \cdot \sin \alpha x \cdot \alpha^2 \cdot [e^{-\beta} \cdot (1 + \beta) + 1]$$

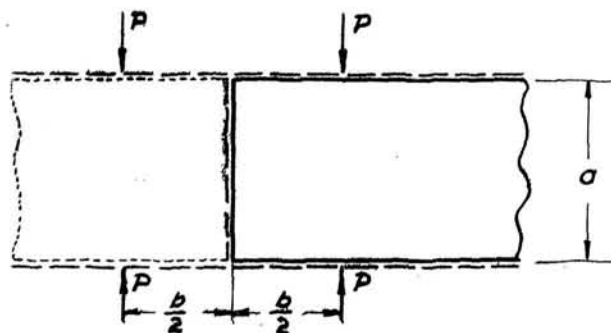
następującą wartość siły krytycznej dla $n=1$

$$P_k = \frac{4N \cdot \pi}{a} \cdot \frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi b}{a}} \cdot (1 + \frac{\pi b}{a})} \quad \dots (16)$$

Dla $b \rightarrow 0$; tzn. w wypadku wyboczenia płyty siłą $2P$ otrzymamy $P_{k, \min} = \frac{12N \cdot \pi}{a}$ dla $b \rightarrow \infty$: $P_{k, \min} = \frac{4N \cdot \pi}{a}$
Przyjmując:

$$w_1 = a_n \cdot \sin \alpha x \cdot [e^{-\alpha y_1} \cdot (1 + \alpha y_1) - e^{-\alpha y_1 - \beta} \cdot (1 + \beta - \alpha y_1)] \quad 0 \leq y_1 \leq b$$

$$w_2 = a_n \cdot \sin \alpha x \cdot [e^{-\alpha y_2} \cdot (1 + \alpha y_2) - e^{-\alpha y_2 - \beta} \cdot (1 + \beta + \alpha y_2)] \quad y_2 \geq 0$$



Rys. 10.

dojdziemy do wypadku wyboczenia płyty obciążonej siłą P w odległości $\frac{b}{2}$ od krawędzi $y_1 = \frac{b}{2}$ w której znikają ugięcia i momenty zginające (patrz rys.10.)

Z równania (15) otrzymamy:

$$P_K = \frac{4N\pi n}{a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{n\pi b}{a}} \cdot (1 + \frac{n\pi b}{a})} \quad \dots (17)$$

Wielkości $P_{K,min}$ ze wzorów (16) i (17) naniesiono na rys. 11a i 11b.

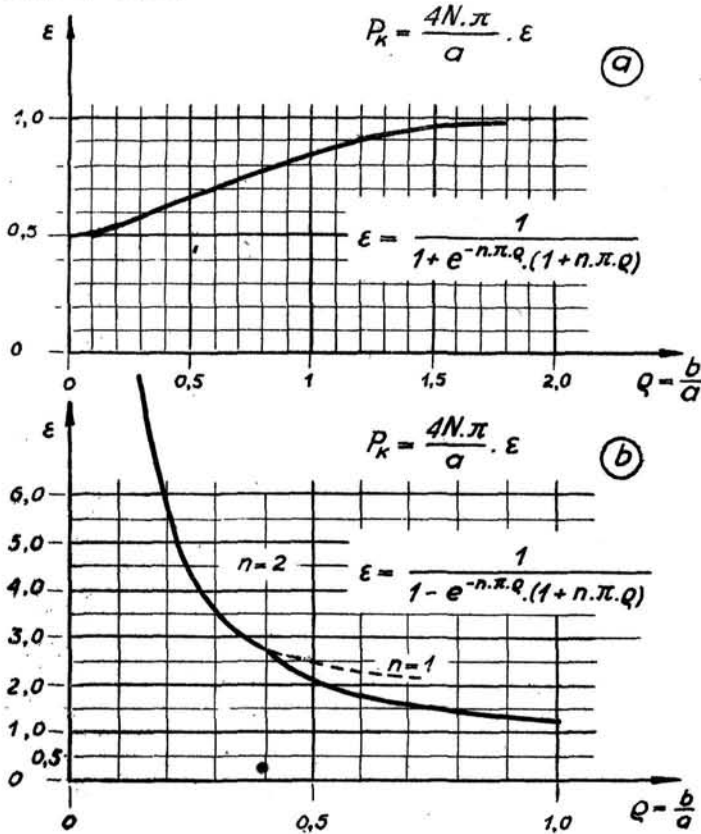


Tabela IV.

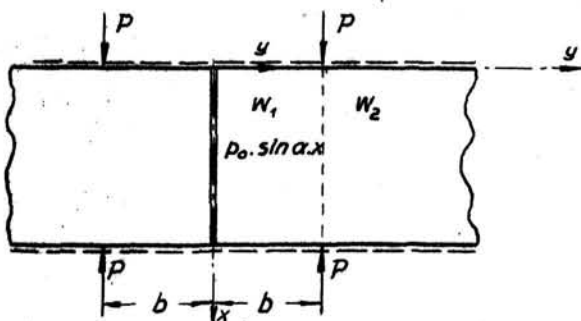
Q	ε	Q	ε
0,10	0,511	1,0	0,850
0,20	0,536	1,20	0,910
0,40	0,608	1,40	0,945
0,60	0,697	1,60	0,970
0,80	0,779	1,80	0,980

Tabela V.

Q	ε	Q	ε
0,10	15,17	0,60	1,28
0,20	5,60	0,70	1,35
0,30	3,56	0,80	1,40
0,40	2,79	0,90	1,29
0,50	2,13	1,0	1,22
		2,0	1,16

Rys. 11.

Wreszcie przypadek działania siły P w odległości b od brzegu utwierdzonego zupełnie zrealizować możemy przez superpozycję powierzchni ugięcia, powstałych wskutek działania dwóch sił w odległości $2b$ i obciążenia według rys.12.



Rys. 12.

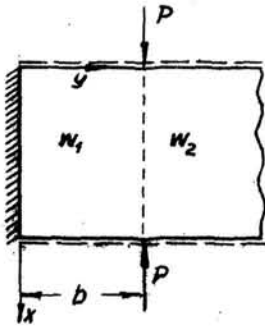
Równanie 14a i 14b napiszemy w postaci odmiennej, mianowicie:

$$w_1 = a_n \sin \alpha x \cdot e^{-\beta x} \cdot [(1 + \beta) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y]; \quad \dots (18a)$$

$y < b$

$$w_2 = a_n \cdot \sin \alpha \cdot x \cdot e^{-\alpha \cdot y} \cdot [(1 + \alpha \cdot y) \cdot \cosh \beta - \beta \cdot \sinh \beta] \quad \dots (18b)$$

Obciążenie $p_0 \cdot \sin \alpha \cdot x$ daje powierzchnię ugięcia:



Rys. 13.

$$w_0 = \frac{p_0 \cdot a^3}{4N \cdot \pi^3 \cdot \eta^3} \cdot \sin \alpha \cdot x \cdot e^{-\alpha \cdot y} \cdot (1 + \alpha \cdot y)$$

Z przyrównania ugięcia $w = w_1 + w_0$ w prostej $y=0$ do zera, uzyskujemy:

$$p_0 = - \frac{4N \cdot \pi^3 \cdot \eta^3}{a^3} \cdot a_n \cdot \sin \alpha \cdot x \cdot e^{-\beta} \cdot (1 + \beta)$$

Stąd równanie powierzchni ugięcia płyty utwierdzonej zupełnie w krawędzi $y=0$

(rys.13):

$$w_1' = a_n \cdot \sin \alpha \cdot x \cdot e^{-\beta} \cdot [(1 + \beta) \cdot \cosh \alpha \cdot y - \alpha \cdot y \cdot \sinh \alpha \cdot y - (1 - \beta)^2 \cdot e^{-\beta}] \quad \dots (19a)$$

$$y \leq b$$

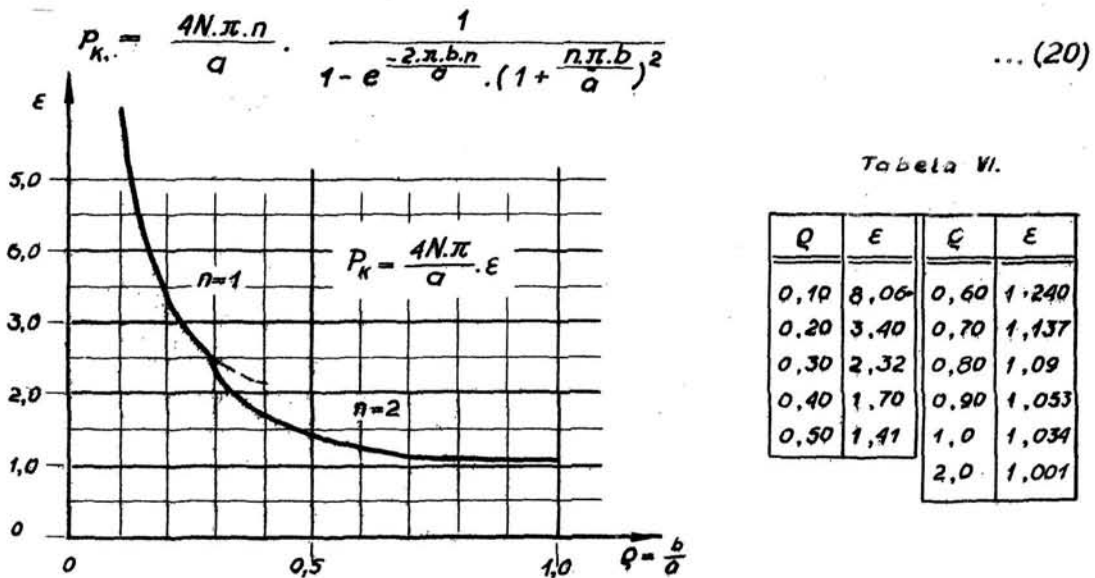
$$w_2 = a_n \cdot \sin \alpha \cdot x \cdot [e^{-\alpha \cdot y} \cdot (1 + \alpha \cdot y) \cdot \cosh \beta - \beta \cdot \sinh \beta - (1 + \beta)^2 \cdot e^{-2\beta}] \quad \dots (19b)$$

$$y \geq b$$

Z warunku brzegowego:

$$N \cdot \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y_1^3} - \frac{\partial^3 w_2}{\partial y_2^3} \right) = P \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad \text{dla: } y=0$$

uzyskamy po prostych przeliczeniach:



Rys. 14.

Tabela VI.

Q	ε	Q	ε
0,10	8,06	0,60	1,240
0,20	3,40	0,70	1,137
0,30	2,32	0,80	1,09
0,40	1,70	0,90	1,053
0,50	1,41	1,0	1,034
		2,0	1,001

Wielkość ^{ngl} mniejszej siły krytycznej wyliczono i zestawiono w tabeli VI.

Zauważymy, że wpływ utwierdzenia zupełnego (w krawędzi $y=0$) w stosunku do swobodnego podparcia płyty w tej samej krawędzi jest tym większy im siła P znajduje się bliżej krawędzi; w odległości $> 2b$ siłę krytyczną dla obu wypadków przyjąć można z dostateczną dokładnością dla celów praktycznych na $P_k = \frac{4N\pi}{a}$.