

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Warszawa

Pl. Jedności Robotniczej 1

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

R A D A R E D A K C Y J N A

WITOLD NOWACKI – PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER JERZY LITWINISZYN

JERZY NOWIŃSKI WACŁAW OLSZAK

BOHDAN STEFANOWSKI STANISŁAW TURSKI

WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

JERZY NOWIŃSKI – REDAKTOR

TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

TOM VIII

WARSZAWA 1956

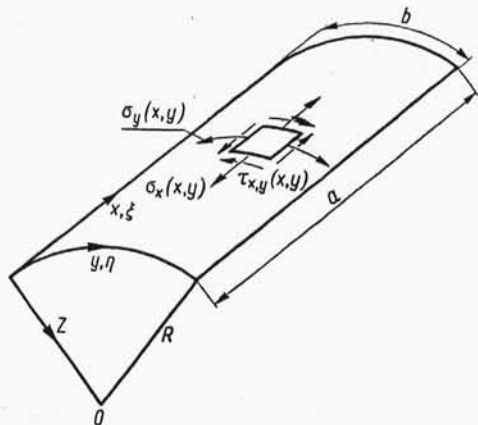
ZESZYT 4

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Z ZAGADNIEŃ STATECZNOŚCI POWŁOKI WALCOWEJ

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Dana jest powłoka walcowa o stałej krzywiznie na wszystkich swych czterech brzegach podparta (rys. 1). Niech na powłokę działają siły $q_x = \sigma_x h$, $q_y = \sigma_y h$, $q_{xy} = \tau_{xy} h$ (h oznacza grubość powłoki) będące funkcjami zmiennych x i y , ale niezależne od zmiennej z . Zakładamy, że siły te są znane oraz że zostały już uprzednio wyznaczone jako wynik rozwiązania odpowiedniego zagadnienia membranowego stanu naprężenia. Zadanie, jakie sobie stawiamy, to podanie ścisłego rozwiązania zagadnień stateczności powłoki walcowej o stałej krzywiznie. Droga postępowania będzie następująca: równania różniczkowe zagadnienia zastąpimy równaniem całkowym, a rozwiązanie tego równania doprowadzimy do nieskończonego układu równań liniowych jednorodnych.



Rys. 1

Ugięcie powłoki walcowej podane jest w technicznej teorii powłok W. Z. W ł a s o w a, [1], (tę teorię przyjmujemy za punkt wyjścia naszych rozwiązań) następującym układem równań różniczkowych:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{R}{Eh} \nabla^4 \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N \nabla^4 w = - \left(q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 q_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{cases}$$

W równaniach tych w oznacza ugięcie powłoki, φ funkcję naprężenia, N sztywność powłoki na zginanie, E moduł sprężystości. Przyjęty układ współrzędnych oraz obciążenie działające na powłokę przedstawiono na rys. 1.

Dzięki podstawieniu W. Z. W ł a s o w a

$$w = \nabla^4 F, \quad \varphi = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

sprowadzimy układ równań (1.1) do jednego równania różniczkowego

$$(1.2) \quad N \nabla^8 F + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = - \left(q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 q_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego przedstawić możemy w postaci całki

$$(1.3) \quad F = - \int_{\Omega} \int \bar{F} \left(q_{\xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + q_{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 q_{\xi\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta.$$

Funkcja $\bar{F}(x, y; \xi, \eta)$ jest tu funkcją G r e e n a dla jednorodnego równania różniczkowego (1.2) w przypadku obciążenia powłoki siłą skupioną $P = 1$, działającą w punkcie (ξ, η) , a skierowaną wzdłuż osi z .

Wykonując na obu stronach związku (1.3) operację

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

i zważywszy, że

$$\nabla^4 F(x, y) = w(x, y), \quad \nabla^4 \bar{F}(x, y; \xi, \eta) = \bar{w}(x, y; \xi, \eta),$$

doprowadzimy równanie (1.3) do postaci

$$(1.4) \quad w(x, y) = - \int_{\Omega} \int \bar{w}(x, y; \xi, \eta) \left[q_{\xi}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + q_{\eta}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2 q_{\xi\eta}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\xi d\eta.$$

Stosując przekształcenie G r e e n a na płaszczyźnie możemy nadać równaniu (1.4) postać

$$(1.5) \quad w(x, y) = \int_s \left[\left(w \frac{\partial \bar{Q}_n}{\partial n} - \bar{Q}_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) - \left(w \frac{\partial \bar{Q}_{n,s}}{\partial s} - \bar{Q}_{n,s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] ds - \\ - \int_{\Omega} \int w \left(\frac{\partial^2 \bar{Q}_{\xi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{Q}_{\eta}}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{Q}_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta.$$

Wprowadziliśmy tu następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n &= \bar{w} q_n = \bar{w} (q_{\xi} \cos^2 \alpha + q_{\eta} \sin^2 \alpha + q_{\xi\eta} \sin 2\alpha) = \\ &= \bar{Q}_{\xi} \cos^2 \alpha + \bar{Q}_{\eta} \sin^2 \alpha + \bar{Q}_{\xi\eta} \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{n,s} &= -\bar{w} \left[(q_\eta - q_\xi) \frac{\sin 2\alpha}{2} + q_{\xi\eta} \cos 2\alpha \right] = \bar{w} q_{n,s} = \\ &= - \left[(\bar{Q}_\eta - \bar{Q}_\xi) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \bar{Q}_{\xi\eta} \cos 2\alpha \right].\end{aligned}$$

W pierwszej całce obliczonej wzdłuż konturu powłoki symbolem $\partial/\partial n$ oznaczamy pochodną w kierunku normalnej do brzegu, a $\partial/\partial s$ pochodną wzdłuż brzegu.

W ramach niniejszej pracy ograniczymy się do rozpatrzenia stateczności powłok walcowych na brzegu podpartych swobodnie lub utwierdzonych zupełnie.

W obu przypadkach całka krzywoliniowa w równaniu (1.5) jest równa zeru, gdyż na brzegu zarówno w , jak i \bar{w} jest równe zeru. Równanie (1.5) uprości się zatem do postaci

$$(1.6) \quad w(x, y) = - \int_{\Omega} \int w(\xi, \eta) \left(\frac{\partial^2 \bar{Q}_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{Q}_\eta}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{Q}_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta,$$

albo też do postaci

$$\begin{aligned}(1.7) \quad w(x, y) = - \int_{\Omega} \int w(\xi, \eta) & \left[q_\xi \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + q_\eta \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + 2 q_{\xi\eta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial q_\xi}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + \frac{\partial q_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + \frac{\partial q_{\xi\eta}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + \frac{\partial q_{\xi\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right) + \\ & \left. + \bar{w} \left(\frac{\partial^2 q_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 q_\eta}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 q_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Zagadnienie stateczności powłoki walcowej o brzegach podpartych doprowadziliśmy zatem do rozwiązania równania całkowego F r e d h o l m a drugiego rodzaju [wzór (1.7)] o złożonym i w najogólniejszym przypadku obciążeń niesymetrycznym jądrze.

2. Powłoka walcowa na brzegach swobodnie podparta. Wyznamy przede wszystkim funkcję G r e e n a $\bar{w}(x, y; \xi, \eta)$ dla przypadku swobodnego podparcia brzegów powłoki walcowej. Rozwiązać należy równanie różniczkowe

$$(2.1) \quad \nabla^8 \bar{F} + \lambda \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial x^4} = p, \quad \lambda = \frac{Eh}{R^2}.$$

Tutaj p oznacza obciążenie powłoki, które ogranicza się do siły skupionej $P = 1$ działającej w punkcie (ξ, η) .

Zakładając, że

$$\bar{F} = \sum_{n,m}^{\infty} \bar{F}_{n,m} \sin a_n x \sin \beta_m y, \quad a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b},$$

co pozwala spełnić wszelkie warunki brzegowe równania (2.1), oraz przedstawiając obciążenie stanowiące siłę skupioną szeregiem trygonometrycznym

$$p = \frac{4}{ab} \sum_{n,m}^{\infty} \sin a_n \xi \sin \beta_m \eta \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

uzyskamy rozwiązanie równania (2.1) w postaci

$$(2.2) \quad \bar{F}(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin \beta_m \eta}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^4 + \lambda \alpha_n^4} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Wobec zależności $\nabla^4 \bar{F} = \bar{w}$, znajdziemy

$$(2.3) \quad w(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin \beta_m \eta}{\Delta_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$\Delta_{n,m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 + \lambda \frac{\alpha_n^4}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}.$$

Przyjmijmy dalej, że rozwiązanie równania całkowego (1.7) daje się przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego

$$(2.4) \quad w(x, y) = \sum_{i,k}^{\infty} A_{ik} \sin a_i x \sin \beta_k y.$$

Założenie to spełnia warunki brzegowe zagadnienia, a współczynniki A_{ik} dobierzemy w ten sposób, aby równanie całkowite (1.7) było spełnione.

Wstawiamy zatem wyrażenia (2.3) i (2.4) do równania (1.7).

Po wykonaniu określonych całkowań oraz przegrupowaniu sum otrzymamy nieskończony układ równań

$$(2.5) \quad A_{ik} = \frac{4}{ab} \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} G_{nimk} \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Tutaj przy wprowadzeniu oznaczeń

$$q_{\xi}(\xi, \eta) = q_{\xi}^{(0)} r(\xi, \eta), \quad q_{\eta}(\xi, \eta) = q_{\eta}^{(0)} t(\xi, \eta), \quad q_{\xi\eta}(\xi, \eta) = q_{\xi\eta}^{(0)} s(\xi, \eta),$$

oraz całek

$$a_{nimk} = \int_0^a \int_0^b r(\xi, \eta) \sin \alpha_i \xi \sin \alpha_n \xi \sin \beta_k \eta \sin \beta_m \eta d\xi d\eta,$$

$$b_{nimk} = \int_0^a \int_0^b t(\xi, \eta) \sin \alpha_i \xi \sin \alpha_n \xi \sin \beta_k \eta \sin \beta_m \eta d\xi d\eta,$$

$$c_{nimk} = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \sin \alpha_i \xi \sin \alpha_n \xi \sin \beta_k \eta \sin \beta_m \eta d\xi d\eta,$$

$$d_{nimk} = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \sin \alpha_i \xi \sin \alpha_n \xi \sin \beta_k \eta \sin \beta_m \eta d\xi d\eta,$$

$$e_{nimk} = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 s}{\partial \xi \partial \eta} \sin \alpha_i \xi \sin \alpha_n \xi \sin \beta_k \eta \sin \beta_m \eta d\xi d\eta$$

$$f_{nimk} = \int_0^a \int_0^b s(\xi, \eta) \cos \alpha_i \xi \sin \alpha_n \xi \cos \beta_k \eta \sin \beta_m \eta d\xi d\eta,$$

$$g_{nimk} = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial r}{\partial \eta} \cos \alpha_i \xi \sin \beta_k \eta \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta d\xi d\eta,$$

$$i_{nimk} = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial s}{\partial \eta} \cos \alpha_i \xi \sin \beta_k \eta \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta d\xi d\eta,$$

$$j_{nimk} = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial t}{\partial \eta} \sin \alpha_i \xi \cos \beta_k \eta \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta d\xi d\eta,$$

$$k_{nimk} = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial s}{\partial \xi} \sin \alpha_i \xi \cos \beta_k \eta \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta d\xi d\eta,$$

wielkość G_{nimk} wyrazi się następującym związkiem:

$$(2.6) \quad G_{nimk} = q_{\xi}^{(0)} \alpha_i^2 a_{nimk} + q_{\eta}^{(0)} \beta_k^2 b_{nimk} - q_{\xi}^{(0)} c_{nimk} - q_{\eta}^{(0)} d_{nimk} - 2 q_{\xi\eta}^{(0)} e_{nimk} - \\ - 2 \alpha_i \beta_k q_{\xi\eta}^{(0)} f_{nimk} - 2 \alpha_i (q_{\xi}^{(0)} g_{nimk} + q_{\xi\eta}^{(0)} i_{nimk}) - 2 \beta_k (q_{\xi}^{(0)} j_{nimk} + q_{\xi\eta}^{(0)} k_{nimk}).$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (2.5) przy jednoznacznym ustaleniu dwu z trzech parametrów $q_{\xi}^{(0)}$, $q_{\eta}^{(0)}$ i $q_{\xi\eta}^{(0)}$ jest warunkiem wyboczenia powłoki walcowej.

Warto zauważyć, że układ równań (2.5) jest identyczny z układem równań, jaki otrzymuje się przy użyciu metody energetycznej R i t z a-T i m o s z e n k i przy założeniu, że ugięcie płyty wyraża się szeregiem (2.4).

3. Powłoka walcowa o brzegach swobodnie podpartych lub utwierdzonych. Rozważmy powłokę na wszystkich krawędziach swobodnie podpartą, poddaną działaniu sił normalnych i stycznych q_x , q_y , q_{xy} oraz momentami zginającymi

$$M(y) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin \beta_k y,$$

działającymi na brzegu $x=0$. Ugięcie płyty przyjmie tu postać

$$(3.1) \quad w(x, y) = - \int_{\Omega} \int w \left(q_{\xi}^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + q_{\eta}^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \dots + \right. \\ \left. + 2 \bar{w} \frac{\partial^2 q_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta + w_M(x, y),$$

gdzie $w_M(x, y)$ jest ugięciem powłoki wywołanym działaniem momentu $M(y)$ na brzegu $x=0$ przy założeniu, że $q_{\xi} = q_{\eta} = q_{\xi\eta} = 0$.

Ugięcie to przyjmie postać, [2],¹⁾

$$(3.2) \quad w_M(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{i,k}^{\infty} \frac{M_k \alpha_i}{\Delta_{ik}} \sin \alpha_i x \sin \beta_k y.$$

Wstawiając szeregi (2.4) i (3.2) do równania otrzymamy po wykonaniu całkowań i uporządkowaniu następujący układ równań:

$$(3.3) \quad A_{ik} = \frac{4}{ab \Delta_{ik}} \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} G_{nimk} + \frac{2}{a} \frac{M_k \alpha_i}{\Delta_{ik}} \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Dobierzmy teraz funkcję $M(y)$ w ten sposób, aby na brzegu $x=0$ spełniony był warunek zupełnego utwierdzenia powłoki, to jest warunek

$$(3.4) \quad \frac{\partial w(0, y)}{\partial y} = 0.$$

Dzięki szeregowi (2.4) warunek ten zapiszemy jako

$$\sum_{i,k}^{\infty} A_{ik} \alpha_i \sin \beta_k y = 0.$$

Ponieważ powyższa suma ma być równa zeru dla dowolnego y , zatem jako warunek utwierdzenia otrzymamy następującą sumę

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_{ik} \alpha_i = 0.$$

¹⁾ Por. wzór (1.8) cytowanej pracy.

Mnożąc równanie (3.3) przez a_i i sumując względem i uzyskamy

$$(3.6) \quad \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Delta_{ik}} \sum_{n,m} A_{nm} G_{nimk} + \frac{2}{a} M_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{\Delta_{ik}} = 0.$$

Z ostatniego równania wyznaczamy M_k i zamieniamy sumowanie względem i sumowaniem względem r . Wstawiając M_k do układu równań (3.3) otrzymamy po prostych przekształceniach następujący układ równań:

$$(3.7) \quad A_{ik} = \frac{4}{ab \Delta_{ik}} \sum_{n,m} A_{nm} \left(G_{nimk} - a_i \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r}{\Delta_{rk}} G_{nrnk}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r^2}{\Delta_{rk}}} \right) \\ (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Przyrównanie do zera wyznacznika powyższego układu równań jest warunkiem wyboczenia powłoki zupełnie utwierdzonej na krawędzi $x = 0$ oraz swobodnie podpartej na pozostałych krawędziach.

Do układu równań (3.7) możemy dojść i na innej drodze. Przyjmijmy równanie całkowite jednorodne jako punkt wyjścia naszych rozważań:

$$(3.8) \quad w(x, y) = - \iint_{\Omega} w \left(q_{\xi} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + q_{\eta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \dots + 2 \bar{w} \frac{\partial^2 q_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta.$$

W równaniu tym $\bar{w}(x, y; \xi, \eta)$ oznacza ugięcie powłoki w punkcie (x, y) wywołane działaniem siły skupionej $P = 1$ przyłożonej w punkcie (ξ, η) , przy czym funkcja \bar{w} winna być tak dobrana, aby spełnione były warunki utwierdzenia zupełnego wzdłuż brzegu $x = 0$ i swobodnego podparcia na brzegach $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Funkcję \bar{w} zapisać należy w postaci

$$(3.9) \quad \bar{w}(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m} \frac{\sin a_n \xi \sin \beta_m \eta}{\Delta_{nm}} \sin a_n x \sin \beta_m y + \\ + \frac{2}{a} \sum_{n,m} \frac{\bar{M}_m a_n \sin \beta_m \eta}{\Delta_{nm}} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Tutaj \bar{M}_m jest współczynnikiem rozwinięcia na szereg Fouriera momentu utwierdzenia powłoki wzdłuż brzegu $x = 0$:

$$\left[\bar{M}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{M}_m \sin \beta_m y \right].$$

Z warunku utwierdzenia zupełnego powłoki na brzegu znajdziemy

$$\bar{M}_m = -\frac{2}{b} \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r \sin a_r \xi}{\Delta_{rm}}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r^2}{\Delta_{rm}}}.$$

Wstawiając powyższą wartość do wzoru (3.9) otrzymamy ostatecznie

$$(3.10) \quad \bar{w}(x, y; \xi, \eta) = \\ = \frac{4}{ab} \sum_{n,m} \frac{\sin \beta_m \eta}{\Delta_{nm}} \sin a_n x \sin \beta_m y \left(\sin a_n \xi - a_n \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r \sin a_r \xi}{\Delta_{rm}}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r^2}{\Delta_{rm}}} \right).$$

Podstawiając do równania całkowego (3.8) szereg (2.4) oraz funkcję (3.10) uzyskamy po wykonaniu przepisanych całkowań układ równań (3.7).

Wracając do układu równań (3.3) i (3.6) zauważmy, że w przypadku gdy $G_{nimk} = 0$ dla $n \neq i$, $m \neq k$ (a posiada wartość skończoną dla $i = n$, $m = k$), możemy z wymienionych równań wyeliminować współczynniki A_{ik} i doprowadzić układy równań do nader prostej postaci

$$(3.11) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{\Delta_{ik} - \frac{4}{ab} G_{iikh}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Łatwo wykazać zważywszy na wzór (2.5), że do postaci (3.11) dojdziemy tylko w tym przypadku, gdy $r = \text{const}$, $t = \text{const}$. Wtedy

$$\frac{4}{ab} G_{ii,kk} = q_{\xi}^{(0)} a_i^2 + q_{\eta}^{(0)} \beta_k^2.$$

Dla przykładu rozpatrzmy dwa przypadki szczególne układu równań (3.7).

(a) Niech na powłokę działa jedynie obciążenie $q_{\xi} = q_{\xi}^{(0)} = \text{const}$. Wtedy

$$G_{nimk} = q_{\xi}^{(0)} a_i^2 \frac{ab}{4}, \quad G_{nrmk} = q_{\xi}^{(0)} a_r^2 \frac{ab}{4}, \quad n = i, \quad m = k.$$

Układ równań (3.7) przyjmie postać

$$A_{ik} = -\frac{a_i q_{\xi}^{(0)}}{\Delta_{ik} - a_i^2 q_{\xi}^{(0)}} \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r^3}{\Delta_{rk}} A_{rk}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r^2}{\Delta_{rk}}} \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Układ ten zastąpić możemy korzystając ze wzoru (3.11) następującą sumą, [2]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^2}{\Delta_{ik} - \alpha_i^2 q_{\xi}^{(0)}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \infty).$$

(b) Niech na powłokę działają siły styczne $q_{\xi\eta} = q_{\xi\eta}^{(0)} = \text{const.}$ W tym przypadku znajdziemy

$$G_{nimk} = -2 \alpha_i \beta_k q_{\xi\eta}^{(0)} f_{nimk} = 2 \alpha_i \beta_k q_{\xi\eta}^{(0)} \frac{4 \alpha_n \beta_m}{(\alpha_n^2 - \alpha_i^2)(\beta_m^2 - \beta_k^2)},$$

jeśli $n \pm i, m \pm k$ jest nieparzyste, $G_{nimk} = 0$, jeśli $n \pm i, m \pm k$ jest parzyste.

Układ równań (3.7) przyjmie zatem postać

$$(3.12) \quad A_{ik} = - \frac{32 \alpha_i \beta_k q_{\xi\eta}^{(0)}}{ab \Delta_{ik}} \sum_{n,m} A_{nm} \frac{\alpha_n \beta_m}{(\beta_m^2 - \beta_k^2)} \left[\frac{1}{\alpha_n^2 - \alpha_i^2} - \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha_r^2}{\Delta_{rk} (\alpha_n^2 - \alpha_r^2)}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha_r^2}{\Delta_{rk}}} \right] \\ (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Przedstawiony sposób postępowania dla powłoki o jednym brzegu utwierdzonym rozszerzyć można na przypadki utwierdzenia zupełnego dwu, trzech i czterech brzegów powłoki.

Rozpatrzmy najpierw przypadek utwierdzenia zupełnego dwu przeciwnych brzegów, na przykład brzegów $x = 0, x = a$. Oznaczamy przez

$$M(y) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin \beta_k y \quad \text{ i } \quad M'(y) = \sum_{k=1}^{\infty} M'_k \sin \beta_k y$$

momenty utwierdzenia wywołane na brzegach $x = 0, x = a$ powstaniem w powłoce sił większych niż krytyczne.

Równanie całkowe zagadnienia przyjmie tu postać

$$(3.13) \quad w(x, y) = \\ = - \int_{\Omega} \int w \left(q_{\xi} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \dots + 2 \bar{w} \frac{\partial^2 q_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta + w_M(x, y) + w_{M'}(x, y),$$

a warunki brzegowe

$$(3.14) \quad \frac{\partial w(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(a, y)}{\partial x} = 0.$$

W równaniu (3.13) oznaczają

$$w_M = \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_k a_i}{\Delta_{ik}} \sin a_i x \sin \beta_k y,$$

$$w_{M'} = -\frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M'_k a_i \cos i \pi}{\Delta_{ik}} \sin a_i x \sin \beta_k y.$$

Wstawiając do równania (3.13) wyrażenie (2.4), (2.3), w_M oraz $w_{M'}$ otrzymamy układ równań

$$(3.15) \quad A_{ik} = \frac{4}{ab \Delta_{ik}} \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} G_{nimk} + \frac{2}{a \Delta_{ik}} (M_k a_i - M'_k a_i \cos i \pi)$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Biorąc pod uwagę wyrażenia (2.4) zapiszmy warunki brzegowe (3.14) w postaci

$$(3.16) \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_{ik} a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_{ik} a_i \cos i \pi = 0.$$

Wstawiając do wzorów (3.16) wartość A_{ik} z układu równań (3.15) otrzymamy układ równań

$$(3.17) \quad \begin{cases} \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Delta_{ik}} \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} G_{nimk} + \frac{2}{a} \left(M_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{\Delta_{ik}} - M'_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2 \cos i \pi}{\Delta_{ik}} \right) = 0, \\ \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cos i \pi}{\Delta_{ik}} \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} G_{nimk} + \\ + \frac{2}{a} \left(M_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2 \cos i \pi}{\Delta_{ik}} - M'_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2 \cos^3 i \pi}{\Delta_{ik}} \right) = 0. \end{cases}$$

Eliminując z równań (3.17) współczynniki M_k , M'_k otrzymamy jeden układ równań. Przyrównany do zera wyznacznik tego układu równań jest warunkiem wyboczenia powłoki.

W przypadku symetrii sił działających na powłokę w stosunku do linii $x = a/2$ (w rachubę wchodzi jedynie siły q_x i q_y przy $q_{xy} = 0$) należy przyjąć dla symetrycznej postaci wyboczenia $M_k = M'_k$, a dla antysymetrycznej postaci $M_k = -M'_k$.

W przypadku szczególnym $q_{\xi} = q_{\xi}^{(0)}$ oraz $q_{\eta} = q_{\eta}^{(0)}$ doprowadzić możemy układy równań (3.15) i (3.17) do nader prostego związku eliminując z tych układów wielkości A_{ik} :

$$(3.18) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2 (M_k - M'_k \cos i\pi)}{\Delta_{ik} - (q_{\xi}^{(0)} a_i^2 + q_{\eta}^{(0)} \beta_k^2)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, \infty).$$

Dla symetrycznej postaci wyboczenia powłoki przy $M_k = M'_k$ warunkiem wyboczenia będzie suma z parametrami

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a_i^2}{\Delta_{ik} - (q_{\xi}^{(0)} a_i^2 + q_{\eta}^{(0)} \beta_k^2)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, \infty).$$

Dla antysymetrycznej postaci wyboczenia uzyskamy przy $M_k = -M'_k$

$$\sum_{i=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a_i^2}{\Delta_{ik} - (q_{\xi}^{(0)} a_i^2 + q_{\eta}^{(0)} \beta_k^2)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, \infty).$$

Zajmijmy się jeszcze przypadkiem zupełnego utwierdzenia powłoki wzdłuż krawędzi $x=0$, $y=0$. Równanie całkowe problemu przyjmie tu postać

$$(3.19) \quad w(x, y) = - \int_{\Omega} \int w \left[q_{\xi} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \dots + 2 \bar{w} \frac{\partial^2 q_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\xi d\eta + w_M(x, y) + w_{M'}(x, y),$$

$$\frac{\partial w(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0.$$

Tutaj

$$(3.20) \quad \begin{cases} w_M = \frac{2}{a} \sum_{i,k}^{\infty} \frac{M_k a_i}{\Delta_{ik}} \sin a_i x \sin \beta_k y, \\ w_{M'} = \frac{2}{b} \sum_{i,k}^{\infty} \frac{M'_k \beta_k}{\Delta_{ik}} \sin a_i x \sin \beta_k y. \end{cases}$$

Wstawiając szeregi (2.4), (2.3) oraz (3.20) do równania całkowego (3.19) uzyskamy po wykonaniu odpowiednich całkowań następujący układ równań:

$$(3.21) \quad A_{ik} = \frac{4}{ab \Delta_{ik}} \sum_{n,m} A_{nm} G_{nimk} + \frac{2}{a} \frac{M_k a_i}{\Delta_{ik}} + \frac{2}{b} \frac{M'_k \beta_k}{\Delta_{ik}} \quad (i, k=1, 2, \dots, \infty).$$

Z warunków brzegowych zadania, które ostatecznie sprowadzają się do związków

$$(3.22) \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_{ik} a_i = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \beta_k = 0,$$

uzyskamy dwa układy równań

$$(3.23) \quad \begin{cases} \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\Delta_{ik}} \sum_{n,m} A_{nm} G_{nimk} + \frac{2}{a} M_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^2}{\Delta_{ik}} + \frac{2\beta_k}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M'_i \alpha_i}{\Delta_{ik}} = 0, \\ \frac{4}{ab} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\Delta_{ik}} \sum_{n,m} A_{nm} G_{nimk} + \frac{2\alpha_i}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \beta_k}{\Delta_{ik}} + \frac{2M'_i}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{\Delta_{ik}} = 0 \end{cases}$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

W ogólnym przypadku nie udaje się doprowadzić układu równań (3.21) i (3.23) do jednego układu równań. Udaje się to jedynie w przypadku szczególnym, gdy $q_{\xi} = q_{\xi}^{(0)}$ oraz $q_{\eta} = q_{\eta}^{(0)}$. W tym przypadku jest $G_{nimk} = (ab/4) (q_{\xi}^{(0)} \alpha_i^2 + q_{\eta}^{(0)} \beta_k^2)$ dla $n = i, m = k$.

Również układ (3.21) przyjmuje postać

$$A_{ik} = \frac{2}{aD_{ik}} \left(M_k \alpha_i + \frac{a}{b} M'_i \beta_k \right) \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty),$$

gdzie

$$D_{ik} = \Delta_{ik} - (q_{\xi}^{(0)} \alpha_i^2 + q_{\eta}^{(0)} \beta_k^2).$$

Wstawiając A_{ik} do równań (3.23) otrzymamy

$$\begin{aligned} M_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^2}{D_{ik}} + \frac{b}{a} \beta_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M'_i \alpha_i}{D_{ik}} &= 0, \\ \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \beta_k}{D_{ik}} + \frac{b}{a} M'_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{D_{ik}} &= 0, \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Eliminujemy z powyższych równań M'_{ki} i ostatecznie otrzymamy

$$(3.24) \quad M_k - \sum_{r=1}^{\infty} M_r K_{kr} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \infty),$$

gdzie

$$K_{kr} = \frac{\beta_k \beta_r}{E_k} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\alpha_t^2}{F_t D_{tr} D_{tk}},$$

oraz

$$E_k = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha}^2}{D_{\alpha k}}, \quad F_t = \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{\beta_{\beta}^2}{D_{\beta t}}.$$

Przyrównanie wyznacznika układu równań (3.24) do zera jest warunkiem wyboczenia powłoki.

4. Powłoka walcowa wzmocniona żebrami. Rozpatrzmy powłokę walcową na brzegach swobodnie podpartą, poddaną działaniu sił q_x , q_y i q_{xy} oraz stężoną żebrem umieszczonym równolegle do osi x w odstępzie \bar{y} od tej osi. Zakładamy, że żebro umieszczone jest symetrycznie w stosunku do powłoki oraz że żebro ma bardzo małą sztywność na skręcanie.

Ugięcie powłoki stężonej żebrem, wywołane działaniem siły większej niż krytyczna, przedstawimy niejednorodnym równaniem całkowym

$$(4.1) \quad w(x, y) = - \int_{\Omega} \int w \left(q_{\xi} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \dots + 2 \bar{w} \frac{\partial^2 q_{\xi \eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta + w_p(x, y).$$

W równaniu tym $w_p(x, y)$ oznacza ugięcie powłoki wywołane odporem żebra na powłokę. Odpór ten, $p = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \sin a_i x$, działa wzdłuż prostej $y = \bar{y}$, a ugięcie powłoki wywołane nim wyniesie, [2],

$$(4.2) \quad w_p(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{i,k} \frac{p_i \sin \beta_k \bar{y}}{\Delta_{ik}} \sin a_i x \sin \beta_k y.$$

Wstawiając szeregi (2.4), (2.3) i (4.2) do równania (4.1) przekształcimy to równanie na układ równań liniowych

$$(4.3) \quad A_{ik} = \frac{4}{ab \Delta_{ik}} \sum_{n,m} A_{nm} G_{nimk} + \frac{2 p_i \sin \beta_k \bar{y}}{b \Delta_{ik}} \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Ugięcie żebra wyraża równanie różniczkowe

$$(4.4) \quad EI \frac{d^4 w_R}{dx^4} + A q \frac{d^2 w_R}{dx^2} = -p.$$

Tutaj EI oznacza sztywność na zginanie żebra, A przekrój oraz q obciążenie ściskające na jednostkę przekroju żebra. Rozwiązanie równania (4.4) przedstawimy w postaci szeregu trygonometrycznego

$$(4.5) \quad w_R = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i \sin a_i x}{EI a_i^4 - A q a_i^2}.$$

Ponieważ powłoka i żebro doznają wzdłuż prostej $y = \bar{y}$ wspólnego ugięcia, zatem

$$w(x, \bar{y}) = w_R(x)$$

albo

$$\sum_{i,k} A_{ik} \sin \alpha_i x \sin \beta_k \bar{y} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i \sin \alpha_i x}{EI \alpha_i^4 - Aq \alpha_i^2}.$$

Ponieważ powyższa zależność jest słuszna dla dowolnej wartości x , zatem

$$(4.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \sin \beta_k \bar{y} + \frac{p_i}{EI \alpha_i^4 - Aq \alpha_i^2} = 0.$$

Wstawiając do ostatniego związku A_{ik} z równania (4.3), otrzymamy

$$(4.7) \quad \frac{4}{ab} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_k \bar{y}}{\Delta_{ik}} \sum_{n,m} A_{nm} G_{nimk} + \frac{2}{b} p_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_k \bar{y}}{\Delta_{ik}} + \frac{p_i}{EI \alpha_i^4 - Aq \alpha_i^2} = 0$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Eliminując z równań (4.3) i (4.7) współczynnik p_i uzyskamy układ równań

$$(4.8) \quad A_{ik} = \frac{4}{ab \Delta_{ik}} \sum_{n,m} A_{nm} \left(G_{nimk} - \sin \beta_k \bar{y} \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{G_{nimr} \sin \beta_r \bar{y}}{\Delta_{ir}}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_r \bar{y}}{\Delta_{ir}} + \frac{1}{EI \alpha_i^4 - Aq \alpha_i^2}} \right)$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Do powyższego układu równań dojść można i odmienną drogą. Jeśli przez $\bar{w}(x, y; \xi, \eta)$ oznaczyć funkcję *G r e e n a* dla powłoki swobodnie podpartej i wzmocnionej żebrem, to zagadnienie stateczności sprowadzi się do rozwiązania jednorodnego równania całkowego

$$(4.9) \quad w(x, y) = - \int_{\Omega} w \left(q_{\xi} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + q_{\eta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \dots + 2 \bar{w} \frac{\partial^2 q_{\xi \eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta.$$

Tutaj funkcja *G r e e n a* przyjmie postać

$$(4.10) \quad \bar{w}(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m} \frac{\sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{\Delta_{nm}} \sin \alpha_n \xi \left(\sin \beta_m \eta - \right.$$

$$\left. - \sin \beta_m \bar{y} \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_r \eta \sin \beta_r \bar{y}}{\Delta_{nr}}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_r \bar{y}}{\Delta_{nr}} + \frac{1}{EI \alpha_n^4 - Aq \alpha_n^2}} \right) \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Wstawiając szeregi (2.4) i (4.10) do równania (4.9) otrzymujemy po wykonaniu określonych całkowań układ równań (4.8).

Rozpatrzmy dwa zadania szczególne.

(a) Niech na powłokę działa jedynie obciążenie $q_\xi = q_\xi^{(0)} = \text{const}$. Wtedy

$$G_{nimk} = q_\xi^{(0)} \alpha_i^2 \frac{ab}{4}, \quad G_{nimr} = q_\xi^{(0)} \alpha_i^2 \frac{ab}{4}, \quad n = i, \quad m = k.$$

Układ równań (4.8) przyjmuje tu postać

$$(4.11) \quad A_{ik} = - \frac{q_\xi^{(0)} \sin \beta_k \bar{y} \alpha_i^2}{\Delta_{ik} - q_\xi^{(0)} \alpha_i^2} \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_r \bar{y}}{\Delta_{ir}} A_{ir}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_r \bar{y}}{\Delta_{ir}} + \frac{1}{EI \alpha_i^4 - q A \alpha_i^2}} \\ (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Układ ten można doprowadzić do innej postaci. Ze wzoru (4.3) otrzymujemy

$$A_{ik} = \frac{2}{b} p_i \frac{\sin \beta_k \bar{y}}{\Delta_{ik} - \alpha_i^2 q_\xi^{(0)}},$$

a wstawiając A_{ik} do związku (4.6) mamy, [2], [3], ²⁾

$$(4.12) \quad \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_k \bar{y}}{\Delta_{ik} - \alpha_i^2 q_\xi^{(0)}} + \frac{1}{EI \alpha_i^4 - A q \alpha_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \infty).$$

(b) Niech dane będzie obciążenie $q_{\xi\eta} = q_{\xi\eta}^{(0)} = \text{const}$, $q_\xi = q_\eta = 0$. W tym przypadku jest

$$G_{nimk} = - \frac{8 \alpha_n \beta_m \alpha_i \beta_k}{(\alpha_n^2 - \alpha_i^2)(\beta_m^2 - \beta_k^2)} q_{\xi\eta}^{(0)}$$

dla $n \pm i$, $m \pm k$ nieparzystych, a $G_{nimk} = 0$ dla parzystych wartości $n \pm i$, $m \pm k$.

Analogicznie znajdziemy

$$G_{nimr} = - \frac{8 \alpha_n \beta_m \alpha_i \beta_r}{(\alpha_n^2 - \alpha_i^2)(\beta_m^2 - \beta_r^2)} q_{\xi\eta}^{(0)}$$

dla $n \pm i$, $m \pm r$ nieparzystych, a $G_{nimr} = 0$ dla parzystych wartości $n \pm i$, $m \pm r$. Wstawiając powyższe wartości do układu równań (4.8) otrzymamy

²⁾ Por. wzór (8.1.1) w pracy [3] oraz wzór (1.31) w pracy [2].

$$(4.13) \quad A_{ik} = -\frac{32 a_i q_{\xi\eta}^{(0)}}{a b \Delta_{ik}} \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} \frac{\alpha_n \beta_m}{(\alpha_n^2 - \alpha_i^2)} \left(\frac{\beta_k}{(\beta_m^2 - \beta_k^2)} - \right. \\ \left. - \sin \beta_k \bar{y} \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta_r \sin \beta_r \bar{y}}{\Delta_{ir} (\beta_m^2 - \beta_r^2)}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_r \bar{y}}{\Delta_{ir}} + \frac{1}{EI \alpha_i^4 - q A \alpha_i^2}} \right) \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Wróćmy do układu równań (4.8) przyjmując $EI = \infty$, $A = \infty$. W tym przypadku mamy do czynienia z niepodatnym, doskonale sztywnym żebrzem. Przyporównany do zera wyznacznik układu równań (4.8) przy $EI = \infty$, $A = \infty$ daje warunek wyboczenia dwuprzęsłowej powłoki walcowej ze środkową podporą w odległości $y = \bar{y}$ od osi x .

W przypadku szczególnym rozkładu sił działających na powłokę, symetrycznego względem osi $y = b/2$ i przy symetrycznej postaci wyboczenia powłoki otrzymamy dla osi symetrii $w = 0$ i $\partial w / \partial y = 0$. Mamy zatem do czynienia z wyboczeniem powłoki o bokach a i $b/2$ na brzegach $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ swobodnie podpartej, a wzdłuż prostej $y = b/2$ utwierdzonej zupełnie.

Zauważmy jeszcze, że od przypadku powłoki wzmocnionej żebrzem możemy przejść do przypadku powłoki wzdłuż prostej $y = 0$ utwierdzonej. Przyjmując w układzie równań (4.8) $EI = \infty$, $A = \infty$ przesuwamy żebro ku podporze $y = 0$.

Dla małych wartości \bar{y} możemy przyjąć $\sin \beta_k \bar{y} \rightarrow \beta_k \bar{y}$. Układ równań (4.8) przyjmie następującą postać:

$$(4.14) \quad A_{ik} = \frac{4}{a b \Delta_{ik}} \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} \left(G_{nimk} - \beta_k \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta_r}{\Delta_{ir}} G_{nimr}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta_r^2}{\Delta_{ir}}} \right) \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Jest to wzór analogiczny do wzoru (3.7), który wyprowadziliśmy dla zupełnego utwierdzenia powłoki na krawędzi $x = 0$. Przedstawione rozważania dotyczące jednego żebra dadzą się rozszerzyć na przypadek wielu żeber zarówno podłużnych, jak i poprzecznych.

Celem naszych rozważań było przedstawienie rozwiązania ścisłego zagadnienia stateczności powłoki walcowej na brzegach swych swobodnie podpartej, utwierdzonej zupełnie lub też wzmocnionej żebrami. Cel ten został osiągnięty przez doprowadzenie rozwiązania równania całkowego do nieskończonego układu równań liniowych sekularnych. Wyniki nasze są w całej rozciągłości słuszne również dla płyt prostokątnych;

przejście od powłoki do płyty otrzymamy przyjmując w wyrażeniu Δ_{ik} wartość $\lambda = Eh/R^2$ równą zero ($R \rightarrow \infty$).

W pracy niniejszej naszkicowaliśmy jedynie możliwość zastosowań wyprowadzonych związków na kilku prostych przykładach, odkładając szersze zastosowanie do prac następnych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Z. Własow, *Obszczaja teorja obołoczek*, Moskwa 1949.
- [2] W. Nowacki, *Wyboczenie i drgania własne powłoki walcowej*, Arch. Mech. Stos. 1 (1955).
- [3] J. R. M. Radok, *Die Stabilität der versteiften Platten und Schalen*, Groningen.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе приводится точное решение вопроса устойчивости цилиндрической оболочки кругового сечения, свободно опертой по контуру, полностью защемленной или подкрепленной ребрами жесткости. Эта цель была достигнута путем замены дифференциальных уравнений задачи (1.1) эквивалентным им интегральным уравнением Фредгольма второго рода, (1.6) и (1.7), и впоследствии, путем приведения этого уравнения к бесконечной системе секулярных линейных уравнений.

Во второй части работы рассматривается наиболее простой случай выпучивания, а именно выпучивание цилиндрической оболочки, свободно опертой по всем краям. Пользуясь функцией Грина $w(x, y; \xi, \eta)$ и формулой (2.3) и принимая $w(x, y)$ в виде двойного тригонометрического ряда (2.4), сводится интегральное уравнение (1.7) к бесконечной системе линейных уравнений. Равенство нулю детерминанта этой системы является условием неустойчивости. Следует подчеркнуть, что полученная система уравнений (2.5) тождественна системе уравнений, получаемой при использовании вариационного метода Ритца-Тимошенко, при предположении, что изгиб оболочки выражается формулой (2.4).

В третьей части работы рассматриваются оболочки с свободно опертыми и полностью защемленными краями. Исходным пунктом рассуждений является неоднородное интегральное уравнение (3.1), в котором функция $w_m(x, y)$ учитывает влияние момента защемления оболочки на крае $x = 0$. Принимая, что форма выпученной оболочки выражена рядом (2.4), интегральное уравнение (3.1) сводится к системе линейных уравнений (3.3), в которых выступают неизвест-

ные коэффициенты A_{ik} и M_k . Согласно условию (3.4) на краю $x=0$, получается вторая система уравнений (3.6), в которых также выступают коэффициенты A_{ik} и M_k . Элиминируя из обеих систем уравнений величины M_k , получается бесконечная система уравнений (3.7). Равенство нулю детерминанта этой системы является условием неустойчивости оболочки. К такому же решению приводит использование однородного интегрального уравнения (3.8), в котором функция $\bar{w}(x, y; \xi, \eta)$ подобрана таким образом, что удовлетворяет условию полного защемления на краю $x=0$.

Приводится ход рассуждений в случае выпучивания оболочки, защемленной на двух противолежащих, либо двух прилежащих краях.

В четвертой части работы рассматривается выпучивание оболочки с продольным ребром жесткости. В этом случае исходной точкой является неоднородное интегральное уравнение (4.1), в котором член $w_p(x, y)$ обозначает изгиб, вызванный силами воздействия ребра на пластинку в сечении $y=\bar{y}$. Подставляя (2.4) и (4.2) в интегральное уравнение (4.1), получается бесконечная система уравнений, в которых выступают коэффициенты A_{ik} и p_i . Вторая система линейных уравнений с коэффициентами A_{ik} и p_i получается из условия общего прогиба оболочки и ребра в сечении $y=\bar{y}$ [формула (4.7)]. Элиминируя из (4.3) и (4.7) коэффициенты p_i , получается система уравнений (4.8). Равенство нулю детерминанта этой системы является условием неустойчивости оболочки. К тождественной системе уравнений приводит решение однородного интегрального уравнения (4.9), в котором функция Грина $\bar{w}(x, y; \xi, \eta)$ учитывает влияние подкрепления оболочки ребром.

Все результаты, полученные в работе, справедливы также и для прямоугольной пластинки, причем переход от оболочки к пластинке получается, полагая в выражении Δ_{ik} значение $\lambda = Eh/R^2$ (при $R \rightarrow \infty$) равным нулю.

В работе указывается лишь возможность применения общего решения к нескольким простым примерам; более широкое применение будет составлять тему дальнейших работ.

S u m m a r y

SOME STABILITY PROBLEMS OF CYLINDRICAL SHELLS

An accurate solution of the stability problem of a cylindrical shell simply supported or clamped along the edges, with or without ribs, is obtained in this paper. This is done by replacing the differential equa-

tions of the problem, (1.1), by a F r e d h o l m integral equation of the second kind, (1.6) and (1.7), and by reducing this equation to an infinite system of linear secular equations. In the second Article, the most simple case of buckling of a cylindrical shell simply supported on all edges is discussed, using G r e e n's function $w(x, y; \eta, \xi)$ from Eq. (2.3). Assuming $w(x, y)$ in the form of a double trigonometric series, (2.4) the integral equation (1.7) is also reduced to an infinite system of equations. Setting its determinant equal to zero we obtain the buckling condition. It should be observed that the system of equations (2.5) is identical with that obtained by the R i t z - T i m o s h e n k o variational method under the assumption that the deflection of the shell is expressed by Eq. (2.4).

In the third Article, simply supported or clamped shells are discussed. The starting point is the non-homogeneous integral equation, (3.1), in which the function $w_M(x, y)$ represents the influence of the clamping moment at the edge $x = 0$. Taking the mode of buckling as represented by the series (2.4), we reduce the integral equation (3.1) to the system of linear equations (3.3) with unknown coefficients A_{ik} and M_k . From the boundary condition (3.4) for the edge $x = 0$, we obtain another system of equations, (3.6), involving the same coefficients A_{ik} and M_k . Eliminating from these systems the coefficients M_k we obtain the infinite system of equations (3.7). Setting the determinant of this system equal to zero, we obtain the buckling condition of the shell. An identical solution can be obtained using the homogeneous integral equation (3.8) in which the function $\bar{w}(x, y; \xi, \eta)$ is chosen to satisfy the clamping condition at the edge $x = 0$.

Finally, the procedure in the case of buckling of a shell clamped along two opposite or adjacent edges is described.

In the fourth Article, the case of buckling of a plate with a longitudinal rib is discussed. The starting point is the non-homogeneous integral equation (4.1) in which the term $w_p(x, y)$ denotes the deflection caused by the force between the plate and the rib in the cross-section $y = \bar{y}$. Substituting (2.4) and (4.2) in the integral equation (4.1), we obtain an infinite system of equations, in which the coefficients A_{ik} and p_i appear. Another system of linear equations involving the coefficients A_{ik} and p_i may be obtained from the condition of identical deflection of the shell and the rib in the cross-section $y = \bar{y}$, [Eq. (4.7)]. Eliminating from (4.3) and (4.7) the coefficients p_i , we obtain the system of equations (4.8). Setting the determinant of this system equal to zero, we obtain the buckling condition of the shell. An identical system of equations may be obtained

by solving the homogeneous integral equation (4.9), in which the influence of the rib is taken into account in G r e e n's function $\bar{w}(x, y; \xi, \eta)$.

All results obtained are also valid for rectangular plates. The transition from a shell to a plate in the expression for Δ_{ik} is done by putting $\lambda = Eh/R^2$ equal to zero for $R \rightarrow \infty$.

The author's intention is to indicate the possibilities of application of the general solution to some simple cases, the broader application will be dealt with in further papers.

ZARŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lutego 1956 r.
