

# ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

R A D A R E D A K C Y J N A

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER JERZY LITWINISZYN

JERZY NOWIŃSKI WACŁAW OLSZAK

BOHDAN STEFANOWSKI STANISŁAW TURSKI

WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

JERZY NOWIŃSKI - REDAKTOR

TADEUSZ IWŃSKI JÓZEF JANICZEK

# PLYTA KOŁOWA NA OBWODZIE CZĘŚCIOWO UTWIERDZONA ZUPEŁNIE I CZĘŚCIOWO SWOBODNIE PODPARTA

WITOLD NOWACKI I ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp. Zagadnienie zginania płyty kołowej na pewnej części obwodu utwierdzonej zupełnie, a na pozostałej swobodnie podpartej przy obciążeniu statycznym rozpatrywane było przez D. J. Szermana [1], przy użyciu metod funkcji analitycznych.

W pracy naszej zajmujemy się zagadnieniem ogólniejszym, mianowicie drganiami wymuszonymi płyty kołowej przy obciążeniu wymuszającym okresowym, działającym prostopadle do płaszczyzny płyty, i obciążeniu stałym ściskającym  $q$ , działającym w płaszczyźnie środkowej płyty. W szczególnym przypadku, gdy nie ma drgań ( $\omega = 0$ ), otrzymamy zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania płyty, a gdy  $q = 0$ , zagadnienie statyczne D. J. Szermana. Wreszcie rozpatrzmy problem drgań własnych płyty przy  $q = 0$  oraz zagadnienie wyboczenia płyty (gdy  $\omega = 0$ ). Rozwiązanie tak postawionego zagadnienia o nieciągłych warunkach brzegowych podamy na odmiennej niż w pracy [1] drodze, mianowicie przez doprowadzenie problemu do równania całkowego Fredholla pierwszego rodzaju.

Równanie różniczkowe problemu ma postać:

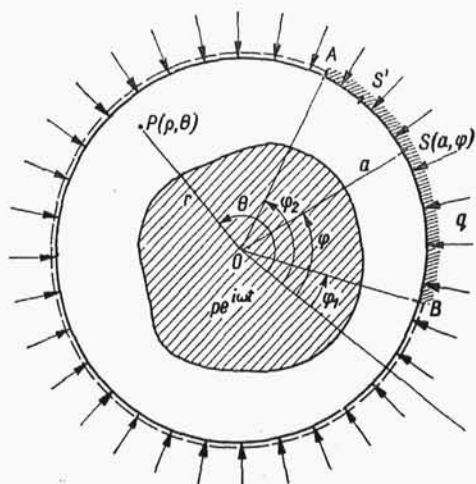
$$(1.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 \xi(\varrho, \Theta, t) + \mu h \frac{\partial^2 \xi(\varrho, \Theta, t)}{\partial t^2} + q \nabla^2 \xi(\varrho, \Theta, t) = p(\varrho, \Theta) e^{i\omega t}$$

$$\left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right),$$

gdzie  $N$  oznacza płytową sztywność zginania  $Eh^3/12(1-\nu^2)$ ,  $h$  grubość płyty,  $\omega$  częstość drgań wymuszających,  $\mu$  gęstość materiału płyty,  $\nu$  liczbę Poissona oraz  $\varrho = r/a$ .

Normalna droga rozwiązywania takich zagadnień, to znaczy całkowanie równanie różniczkowe oraz wyznaczanie stałych z warunków brzegowych i początkowych, z powodu złożoności problemu nie daje rezultatu. Korzystając z zasady superpozycji możemy postąpić w sposób następujący. Ugięcie płyty  $\xi(\varrho, \Theta, t)$  pod działaniem wyszczególnionych obciążeń ze-

wewnętrznych w dowolnym punkcie  $P(\rho, \theta)$  płyty na części obwodu zamocowanej zupełnie, a na pozostałej podpartej możemy złożyć z ugięcia  $\xi_0(\rho, \theta, t)$



Rys. 1

w tym samym punkcie płyty, lecz na całym obwodzie swobodnie podpartej, oraz z ugięcia  $\bar{\xi}(\rho, \theta, t)$  płyty również na całym obwodzie podpartej oraz poddanej działaniu momentu zamocowania  $M(\varphi, t)$  traktowanego jako obciążenie zewnętrzne (rys. 2):

$$(1.2) \quad \xi(\rho, \theta, t) = \xi_0(\rho, \theta, t) + \bar{\xi}(\rho, \theta, t).$$

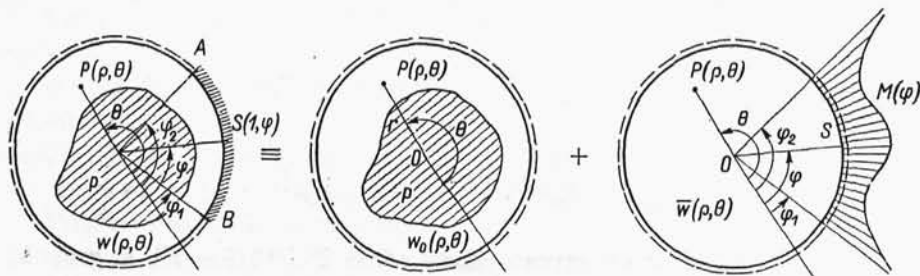
Przyjmując, że mamy do czynienia z drganiami harmonicznymi prostymi, otrzymamy dla odpowiedniej amplitudy ugięć

$$(1.3) \quad w(\rho, \theta) = w_0(\rho, \theta) + \bar{w}(\rho, \theta).$$

Funkcję  $\bar{w}(\rho, \theta)$  możemy zapisać w postaci

$$(1.4) \quad \bar{w}(\rho, \theta) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) w_1(\rho, \theta; \varphi) d\varphi,$$

gdzie  $\bar{w}_1(\rho, \theta; \varphi)$  jest amplitudą ugięcia punktu  $P(\rho, \theta)$  spowodowanego działaniem jednostkowego skupionego momentu amplitudalnego, przyło-



Rys. 2

żonego w punkcie  $S(1, \varphi)$  na brzegu płyty  $AB$ , a  $M(\varphi)$  jest momentem utwierdzenia brzegu w przedziale  $(AB)$ .

Zakładamy, że funkcje  $w_0(\rho, \theta)$  i  $w_1(\rho, \theta; \varphi)$  wyznaczymy w naszym układzie podstawowym, tj. w płycie na całym obwodzie swobodnie pod-

partej. Nieznaną funkcję momentu utwierdzenia  $M(\varphi)$  wyznaczymy wykorzystując warunek brzegowy utwierdzenia zupełnego płyty na odcinku (AB). Wykonajmy na funkcji (1.3) różniczkowanie  $\partial/\partial \varrho$  i przejdźmy z punktem  $P(\varrho, \Theta)$  do punktu  $S(1, \Theta)$  leżącego w przedziale (AB) na brzegu płyty. Zważywszy, że w tym przedziale jest

$$\left[ \frac{\partial w(\varrho, \Theta)}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=1} = \frac{\partial w(1, \Theta)}{\partial \varrho} = 0,$$

otrzymamy następujące równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju, [2]:

$$(1.5) \quad \frac{\partial w_0(1, \Theta)}{\partial \varrho} + a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) \frac{\partial w_1(1, \Theta; \varphi)}{\partial \varrho} d\varphi = 0.$$

Rozwiązanie tego równania całkowego daje funkcję  $M(\varphi)$ . Wstawiając ją do równania (1.3) otrzymamy

$$(1.6) \quad w(\varrho, \Theta) = w_0(\varrho, \Theta) + a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) w_1(\varrho, \Theta; \varphi) d\varphi,$$

a znając już odkształcenie płyty (powierzchnie amplitud odkształcenia) znajdujemy

$$\xi(\varrho, \Theta, t) = w(\varrho, \Theta) e^{i\omega t}.$$

Znajomość ugięcia  $\xi(\varrho, \Theta, t)$  pozwala na wyznaczenie wszelkich wielkości dynamicznych, momentów zginających, skręcających i sił poprzecznych.

2. Zadanie pomocnicze. Wyznaczyć należy funkcję  $w_1(\varrho, \Theta; \varphi)$ , która dla  $\varrho = 1$  staje się jądrem równania całkowego (1.5). Funkcja ta powinna spełniać jednorodne równanie różniczkowe

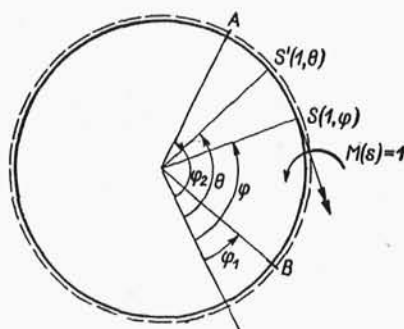
$$(2.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w_1(\varrho, \Theta; \varphi) + \frac{q}{N} \nabla^2 w_1(\varrho, \Theta; \varphi) - \frac{\mu h \omega^2}{N} w_1(\varrho, \Theta; \varphi) = 0$$

z następującymi warunkami na brzegu  $\varrho = 1$ :

$$(2.2) \quad [w_1(\varrho, \Theta)]_{\varrho=1} = 0$$

oraz

$$(2.3) \quad \begin{cases} M(\Theta) = 0 & \text{dla } \Theta \neq \varphi, \\ M(\Theta) = 1 & \text{dla } \Theta = \varphi, \\ M(\Theta) = -\frac{N}{a^2} \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho^2} + \nu \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \Theta^2} \right) \right]_{\varrho=1}. \end{cases}$$



Rys. 3

Ostatnie warunki brzegowe zapisać możemy za pomocą jednego wzoru rozwijając  $M(\Theta)$  w parzysty szereg F o u r i e r a:

$$(2.3.1) \quad M(\Theta) = \frac{1}{\pi a} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\Theta - \varphi) \right].$$

Równanie (2.1) przekształcimy do postaci

$$(2.4) \quad \nabla^2 \nabla^2 w_1(\varrho, \Theta) + (\beta_2^2 - \beta_1^2) \nabla^2 w_1(\varrho, \Theta) - \beta_1^2 \beta_2^2 w_1(\varrho, \Theta) = 0$$

albo

$$(2.4.1) \quad (\nabla^2 + \beta_2^2)(\nabla^2 - \beta_1^2) w_1(\varrho, \Theta) = 0,$$

gdzie

$$\beta_2^2 - \beta_1^2 = 2a^2 = \frac{q}{N}, \quad \beta_1^2 \beta_2^2 = \delta^4 = \frac{\mu h \omega^2}{N}.$$

Stąd

$$\beta_1^2 = -a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4\delta^4}, \quad \beta_2^2 = a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4\delta^4}.$$

Rozwiązania równania różniczkowego (2.4) poszukiwać będziemy w postaci

$$(2.5) \quad w_1(\varrho, \Theta; \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\varrho) \cos n(\Theta - \varphi).$$

Wstawiając powyższy szereg do równania (2.4.1) otrzymamy

$$(2.6) \quad (\nabla^2 + \beta_2^2) w_1(\varrho, \Theta; \varphi) =$$

$$= \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ R_n''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} R_n'(\varrho) - \frac{n^2 R_n(\varrho)}{\varrho^2} + v^2 R_n(\varrho) \right] \cos n(\Theta - \varphi) = 0,$$

$$(\nabla^2 - \beta_1^2) w_1(\varrho, \Theta; \varphi) =$$

$$= \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ R_n''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} R_n'(\varrho) - \frac{n^2 R_n(\varrho)}{\varrho^2} - u^2 R_n(\varrho) \right] \cos n(\Theta - \varphi) = 0,$$

gdzie  $u = \beta_1 a$ ,  $v = \beta_2 a$ .

Ponieważ powyższy związek słuszny jest dla dowolnej liczby  $(\Theta - \varphi)$ , zatem otrzymamy układ dwu równań różniczkowych, które prostym podstawieniem  $x_1 = v\varrho$  oraz  $x_2 = u\varrho$  można sprowadzić do równań B e s s e l a. Rozwiązania tych równań są całkami szczególnymi równania różniczkowego (2.4). Zatem

$$(2.7) \quad R_n = A_n J_n(\varrho v) + B_n J_n(\varrho i u) + C_n Y_n(\varrho v) + D_n Y_n(\varrho i u).$$

Zważywszy, że dla  $\varrho = 0$  funkcja  $w_1(\varrho, \Theta; \varphi)$  powinna mieć wartość skończoną, przyjmiemy w równaniu (2.7)  $C_n = 0, D_n = 0$ .

Ostatecznie rozwiązanie równania (2.4) ma postać:

$$w_1(\varrho, \Theta; \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(\varrho v) + B_n J_n(\varrho i u)] \cos n(\Theta - \varphi).$$

Warunek brzegowy (2.2) prowadzi do następującej zależności między  $A_n$  i  $B_n$ :

$$(2.8) \quad B_n = -A_n \frac{J_n(v)}{J_n(iu)}.$$

Warunek brzegowy (2.3) prowadzi do zależności

$$(2.9) \quad -\frac{N}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n v^2 \frac{J_{n-2}(v) - 2J_n(v) + J_{n+2}(v)}{4} - \right. \\ \left. - B_n u^2 \frac{J_{n-2}(iu) - 2J_n(iu) + J_{n+2}(iu)}{4} + v \left( A_n v \frac{J_{n-1}(v) - J_{n+1}(v)}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + B_n i u \frac{J_{n-1}(iu) - J_{n+1}(iu)}{2} \right) \right] \cos n(\Theta - \varphi) = \frac{1}{\pi a} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\Theta - \varphi) \right].$$

Jest rzeczą widoczną, że otrzymamy odmienne rozwiązania dla  $n = 0$  i  $n \geq 1$ . Znajdujemy mianowicie dla  $n = 0$

$$(2.10) \quad A_0 = -\frac{a I_0(u)}{\pi N \Delta_0}, \quad B_0 = \frac{a J_0(v)}{\pi N \Delta_0}$$

oraz dla  $n \geq 1$

$$A_n = -\frac{a I_n(u)}{\pi N \Delta_n}, \quad B_n = \frac{a J_n(v)}{\pi N \Delta_n},$$

gdzie  $I_n(u)$  są funkcjami Bessela urojonego argumentu pierwszego rodzaju, a wielkości  $\Delta_0$  i  $\Delta_n$  wyrażają się następującymi wzorami:

$$(2.11) \quad \begin{cases} \Delta_0 = 2 \{ v^2 J_0''(v) I_0(u) - u^2 J_0(v) I_0''(u) + v [v J_0'(v) I_0(u) - u I_0(u) J_0'(v)] \}, \\ \Delta_n = v^2 J_n''(v) I_n(u) - u^2 J_n(v) I_n''(u) + v [v J_n'(v) I_n(u) - u I_n'(u) J_n(v)] \end{cases}$$

Ostatnie związki doprowadzimy do dogodniejszej postaci korzystając z następujących tożsamości, [4]:

$$v J_n'(v) = \frac{1}{2} v [J_{n-1}(v) - J_{n+1}(v)] = n J_n(v) - v J_{n+1}(v),$$

$$v^2 J_n''(v) = \frac{1}{4} v^2 [J_{n-2}(v) - 2J_n(v) + J_{n+2}(v)] = (n^2 - n - v^2) J_n(v) +$$

$$u I_n'(u) = \frac{1}{2} u [I_{n-1}(u) + I_{n+1}(u)] = n I_n(u) + u I_{n+1}(u),$$

$$u^2 I_n''(u) = \frac{1}{4} u^2 [I_{n-2}(u) + 2I_n(u) + I_{n+2}(u)] = (n^2 - n + u^2) I_n(u) - u I_{n+1}(u).$$

Ostatecznie otrzymamy

$$(2.12) \quad \begin{cases} \Delta_0 = -2(v^2 + u^2) I_0(u) J_0(v) + 2(1-v) [u J_0(v) I_1(u) + v I_1(v) I_0(u)], \\ \Delta_n = -(v^2 + u^2) J_n(v) I_n(u) + (1-v) [u J_n(v) I_{n+1}(u) + v I_n(u) J_{n+1}(v)]. \end{cases}$$

Tak więc rozwiązanie zadania pomocniczego ma postać

$$(2.13) \quad w_1(\varrho, \Theta; \varphi) = \frac{a}{\pi N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} [I_n(u \varrho) J_n(v) - I_n(u) J_n(v \varrho)] \cos n(\Theta - \varphi).$$

3. Drgania wymuszone i własne płyty. W p. 1 podaliśmy równanie całkowe (1.5) naszego zagadnienia. Korzystając z funkcji  $w_1(\varrho, \Theta; \varphi)$  wyznaczonej w poprzednim ustępie napiszemy je w postaci

$$(3.1) \quad \frac{\partial w_0(1, \Theta)}{\partial \varrho} + \frac{a^2}{\pi N} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} [u J_n(v) I_{n+1}(u) + v I_n(u) J_{n+1}(v)] \cos n(\Theta - \varphi) d\varphi = 0.$$

W sposób szczegółowy zajmiemy się drganiami wymuszonymi i własnymi płyty w przypadku braku sił ściskających  $q$ . Z postaci równania (2.4) łatwo zauważyć, że to uproszczenie pociąga za sobą zależność  $\beta_1 = \beta_2$  albo  $u = v$ .

Równanie (3.1) uprości się do postaci

$$(3.2) \quad \frac{\partial w_0(1, \Theta)}{\partial \varrho} + \frac{a^2}{N\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u}{\Delta_n} [J_n(u) I_{n+1}(u) + I_n(u) J_{n+1}(u)] \cos n(\Theta - \varphi) d\varphi = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= -4u^2 I_0(u) J_0(u) + 2(1-v)u [J_0(u) I_1(u) + I_0(u) J_1(u)], \\ \Delta_n &= -2u^2 I_n(u) J_n(u) + (1-v)u [J_n(u) I_{n+1}(u) + I_n(u) J_{n+1}(u)] \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (3.2) podamy w sposób przybliżony zastępując całkę sumą i sprowadzając je do układu niejednorodnych równań algebraicznych liniowych. Przy rozwiązywaniu układu równań wartość  $C_1 = \partial w_0(1, \Theta)/a \partial \varrho$  równą kątowi nachylenia stycznej na brzegu płyty kołowej na całym obwodzie swobodnie podpartej znajdziemy z tablic lub obliczymy ze wzorów podanych w podręcznikach teorii sprężystości.

Układ równań liniowych przyjmie tu postać:

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^{2m} M_i K_{ik} = C_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, 2m),$$

gdzie

$$K_{ik} = -\frac{1}{2} \frac{J_0(u) I_1(u) + I_0(u) J_1(u)}{2u I_0(u) J_0(u) - (1-\nu) [J_0(u) I_1(u) + I_0(u) J_1(u)]} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(i-k) \frac{\varphi_0 n}{2m}}{(2n+2) a_n + 1 - \nu},$$

$$a_n = \frac{2u I_n(u) J_n(u)}{(2n+2) [I_{n+1}(u) J_n(u) + I_n(u) J_{n+1}(u)]}, \quad C_k = C_1 \frac{\pi N}{a^3 \Delta \varphi_i}, \quad \Delta \varphi_i = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2m}.$$

Podzieliśmy tu przedział  $(AB)$  na  $2m$  jednakowych odcinków  $a \Delta \varphi_i$ . Załóżmy, że obciążenie zewnętrzne działające na płytę jest kołowo symetryczne względem środka płyty. Obciążenie takie obejmuje dość szeroką klasę obciążeń jak siła skupiona w środku, obciążenie równomierne całej płyty, obciążenie pierścieniowe, stożkowe z wierzchołkiem w środku itd. Wtedy wielkość  $C_1$  jak również  $C_k$  jest wielkością stałą na obwodzie płyty. Zauważmy, że przy takim założeniu odnośnie obciążenia wykres  $M(\varphi)$  będzie symetryczny, a układ  $2m$  równań zredukuje się do liczby  $m$ . Przyjmujemy  $C_k = 5$ .

Jądro naszego równania całkowego dane jest w postaci szeregu. Pozostaje do rozważenia sprawa jego zbieżności. Musimy rozpatrzyć dwa przypadki, pierwszy gdy  $i \neq k$ . Wtedy w zależności od różnicy  $(i-k)$  wyrazy szeregu co kilka zmieniają znak. Ponadto z łatwością można udowodnić, że  $n$ -ty wyraz szeregu dąży jednostajnie do zera, co jest już wystarczającym warunkiem zbieżności takiego szeregu. W przypadku gdy  $i = k$ , szereg możemy rozbić na sumę trzech szeregów:

$$(3.4) \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2m} \varphi_0 (i-k)}{(2n+2) a_n + \nu - 1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2m} \varphi_0 (i-k)}{n a_n} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2m} \varphi_0 (i-k)}{n [(2n+2) a_n + \nu - 1]} - \frac{1-\nu}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2m} \varphi_0 (i-k)}{n a_n [(2n+2) a_n + \nu - 1]}.$$

Z powyżej wypisanych szeregów drugi i trzeci są jednostajnie zbieżne. Przekonamy się o tym majoryzując je i przyjmując, że od pewnego  $n$  liczby  $a_n$  są np. nie mniejsze od  $1/2$ . Szeregi te są typu  $1/n^2$ . W rzeczywistości wartość  $a_n$  ze wzrostem  $n$  bardzo szybko zbliża się do jedności, tak np. dla  $u = 1$  i dla  $n = 5$  błąd nie przekracza 0,5%. Ponieważ zachodzi tożsamość

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2m} \varphi_0 (i-k)}{n} = -\frac{1}{2} \ln \left( 2 \sin \varphi_0 \frac{i-k}{4m} \right),$$

to pierwszy szereg możemy oszacować w następujący sposób:

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2m} \varphi_0 (i-k)}{n a_n} \right| \leq \left| \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 \frac{\cos \frac{n}{2m} (i-k) \varphi_0}{n a_n} \right| -$$

$$- \left| \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 \frac{\cos \frac{n}{2m} \varphi_0 (i-k)}{n} \right| - \left| \frac{1}{2 a_5} \ln \left( 2 \sin \varphi_0 \frac{i-k}{4m} \right) \right|,$$

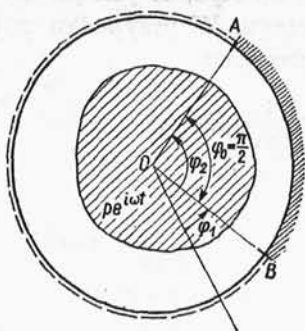
gdzie  $1/a_5$  nie przekracza 1,05.

W punkcie  $i=k$  wyraz  $\ln 2 \sin \varphi_0 (i-k)/4m$  wzrasta nieograniczenie, dlatego zastąpimy tę wartość średnią wartością funkcji w przedziale  $\Delta \varphi_i$  równą

$$\frac{\Delta \varphi_i}{2} \int_0^{\frac{\Delta \varphi_i}{2}} \ln \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi.$$

Wówczas

$$(3.5) \quad \int_0^{\frac{\Delta \varphi_i}{2}} \ln \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{\Delta \varphi_i}{2} \ln 2 + 2L \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta \varphi_i}{2} \right) - 2L \left( \frac{\pi}{2} \right),$$



Rys. 4

gdzie  $L(x)$  jest funkcją Ł o b a c z e w s k i e g o, [5],

$$L(x) = - \int_0^x \ln \cos \varphi d\varphi.$$

Przyjmijmy, że płyta kołowa jest na odcinku  $AB = a\pi/2$  zupełnie utwierdzona, na pozostałym swobodnie podparta. Przy podziale odcinka  $AB$  na 14 równych przedziałów mamy  $\Delta \varphi_i/2 = \pi/56$ , a wartość średnia  $\ln (2 \sin \varphi/2)$  w tym przedziale wynosi — 1,921.

Poniżej podajemy wartości jądra  $K_{lk}$  dla poszczególnych punktów przedziału  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Wartości te obliczone dla argumentu

$$u = \beta_1 a = \sqrt[4]{\frac{\mu \hbar \omega^2}{N}} a = 1$$

zestawione są w tablicy 1.

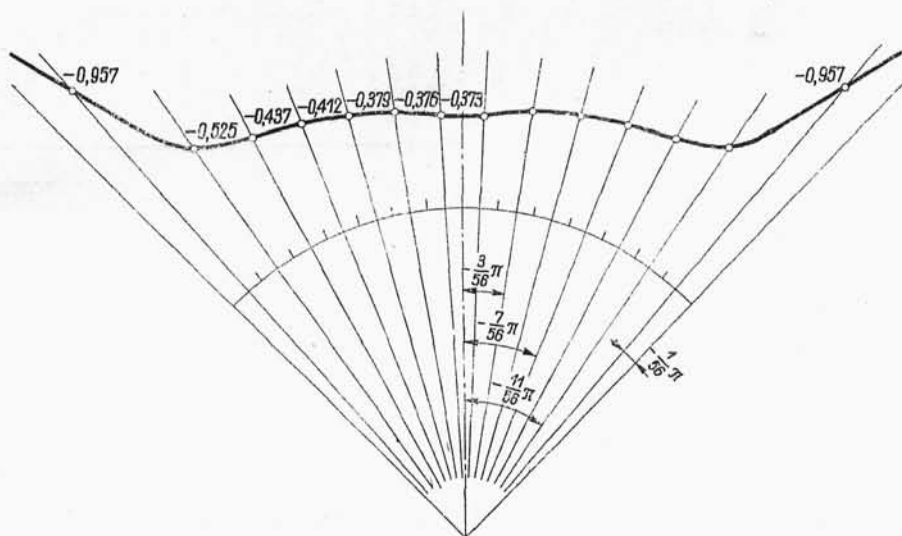
Tablica 1

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	-2,319	-1,472	-1,195	-1,047	-0,969	-0,929	-0,904
2		-2,350	-1,520	-1,241	-1,099	-1,033	-1,011
3			-2,395	-1,571	-1,305	-1,180	-1,139
4				-2,496	-1,652	-1,412	-1,309
5					-2,566	-1,781	-1,582
6						-2,738	-2,054
7							-3,208

Rozwiązanie układu równań (3.3) daje wartości momentów utwierdzenia; zestawiono je w tablicy 2.

Tablica 2

$\varphi_k$	$\pm \frac{13}{56} \pi$	$\pm \frac{11}{56} \pi$	$\pm \frac{9}{56} \pi$	$\pm \frac{7}{56} \pi$	$\pm \frac{5}{56} \pi$	$\pm \frac{3}{56} \pi$	$\pm \frac{1}{56} \pi$
$M_k(\varphi_k)$	-0,957	-0,525	-0,437	-0,412	-0,379	-0,376	-0,373



Rys. 5

Charakterystyczny jest tu bardzo silny wzrost momentów dla punktów  $\varphi_2$  i  $\varphi_1$ ; wynika to z nieciągłości pochodnej, a ściślej rozwiązanie równania całkowego dałoby tu wartości nieskończenie duże. Wyznaczenie wartości  $M_k(\varphi_k)$  pozwala na wyznaczenie powierzchni odkształcenia płyty, a co za tym idzie wszystkich niewiadomych wielkości. Ponieważ równanie

całkowe (3.2) zostało rozwiązane w sposób przybliżony, to zamiast wpływu momentów utwierdzenia płyty wyrażonych wzorem (1.4) otrzymamy wartości  $M_k$ , które należy traktować jako momenty skupione w poszczególnych punktach przedziału  $\varphi_2 - \varphi_1$ :

$$(3.6) \quad \bar{w}(\varrho, \theta) = \sum_{k=1}^{2m} M_k w_1(\varrho, \theta; \varphi_k).$$

Podajemy jeszcze rozwiązanie przybliżone równania całkowego (3.2) dla wartości parametru  $u = 5$ . Stałą  $C_k$  przyjmujemy tu jak poprzednio ( $C_k = 5$ ).

Otrzymujemy wartości jądra zestawione w tablicy 3.

Tablica 3

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	-1,618	-1,025	-0,827	-0,366	-0,274	-0,302	-0,419
2		-2,109	-1,430	-1,208	-1,162	-1,202	-1,219
3			-2,489	-2,226	-2,136	-2,079	-2,003
4				-3,417	-3,143	-2,936	-2,862
5					-4,218	-3,926	-3,796
6						-5,077	-4,860
7							-6,141

Rozwiązanie układu równań daje wartości momentów utwierdzenia, które zestawiono w tablicy 4.

Tablica 4

$\varphi_k$	$\pm \frac{13}{56} \pi$	$\pm \frac{11}{56} \pi$	$\pm \frac{9}{56} \pi$	$\pm \frac{7}{56} \pi$	$\pm \frac{5}{56} \pi$	$\pm \frac{3}{56} \pi$	$\pm \frac{1}{56} \pi$
$M_k(\varphi_k)$	-0,476	-0,118	+0,034	-0,128	-0,062	-0,006	-0,016

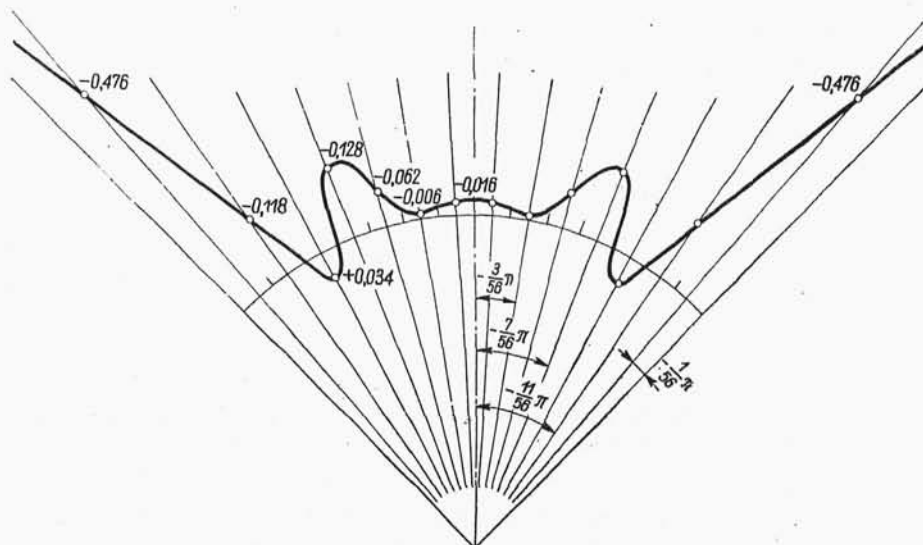
Wykres momentów  $M\varphi$  podano na rys. 6.

W niniejszym przykładzie pozostają w mocy rozważania poprzedniego przykładu odnoszące się do zbieżności szeregu, wyznaczania średniej wartości wyrazu  $\ln [2 \sin \varphi_0 (i - k)/4m]$  oraz rozważania o silnym wzroście momentów na brzegach przedziału i zastąpieniu wykresu momentów momentami skupionymi przyłożonymi w poszczególnych punktach przedziału.

W przypadku drgań swobodnych znika w równaniu całkowym (3.2) wyraz  $\partial w_0(1, \theta)/\partial \varrho$  ze względu na brak obciążenia wymuszającego. Mamy

do czynienia z jednorodnym równaniem całkowym Fredhola pierwszego rodzaju

$$(3.7) \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u}{\Delta_n} [J_n(u) I_{n+1}(u) + J_{n+1}(u) I_n(u)] \cos n(\Theta - \varphi) d\varphi = 0.$$



Rys. 6

W jądrze tego równania występuje parametr

$$u = a\delta = a \sqrt[4]{\frac{\mu h \omega^2}{N}}.$$

Przybliżone rozwiązanie równania całkowego otrzymamy przez zastąpienie całki sumą i sprowadzenie do układu równań jednorodnych, [3],

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^{2m} M_i K_{ik}(u) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, 2m).$$

Układ powyższych  $2m$  równań, który przy założeniu symetrycznej postaci drgań sprowadzi się do  $m$  równań, posiada niezerowe rozwiązania tylko w tym przypadku, gdy wyznacznik podstawowy układu równań jest równy zero. Jest to równoznaczne z możliwością powstania drgań własnych. Mamy więc

$$W = \begin{vmatrix} K_{11}(u) & K_{12}(u) & \cdots & K_{1m}(u) \\ K_{21}(u) & K_{22}(u) & \cdots & K_{2m}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m1}(u) & K_{m2}(u) & \cdots & K_{mm}(u) \end{vmatrix} = 0.$$

Wartości własne drgań wyznaczmy w przybliżeniu drogą prób w ten sposób, że przyjmujemy dwie wartości pośrednie pomiędzy wartościami drgań własnych dla płyty całkowicie utwierdzonej oraz na całym obwodzie swobodnie podpartej. Odpowiednie wartości argumentu wynoszą, [6] i [7]: dla płyty swobodnie podpartej  $u = 3,01$ , dla płyty całkowicie utwierdzonej  $u = 6,30$ .

Powyższe wartości podano dla  $n = 0$  (liczba węzłowych średnic) oraz  $m = 1$  (liczba węzłowych kół). Wartości drgań własnych są związane z wartościami argumentu zależnością

$$\omega_{n,m} = u_{n,m}^2 \sqrt{\frac{E h^2}{12 a^4 (1 - \nu^2) \mu}}.$$

Następnie bierzemy na próbę dwie pośrednie wartości argumentu i dla każdej z nich obliczamy wartości wyznacznika. O ile okaże się, że wartość wyznacznika zmienia znak, prowadzimy pomiędzy punktami wyznaczonymi przez wartości wyznaczników proste, a punkt przecięcia z osią  $u$  daje przybliżoną wartość argumentu, a tym samym wartość drgań własnych. Możemy z kolei dla odczytanej wartości argumentu obliczyć wyznacznik i znów połączyć tak otrzymany punkt z punktem wyznacznika o przeciwnym znaku. Możemy tak postępować kilka razy otrzymując coraz dokładniejszą wartość argumentu. Przykład wykonano dla  $2m = 6$  oraz  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ , co dzięki symetrii daje wyznaczniki 3 stopnia. Ponieważ obliczone wartości wyznaczników nie są zbyt dokładne ze względu na małą liczbę podziałów łuku ( $2m = 6$ ) i z powodu trudności z oszacowaniem błędu, poprzestaniemy na pierwszym przybliżeniu. Dla  $u = 3,4$  otrzymujemy  $W = +2,87$ , a dla  $u = 5$   $W = -4,105$ . Wartość przybliżona argumentu  $u$  odpowiadająca podstawowej częstotliwości drgań własnych płyty wyniesie  $u = 3,98$ .

4. Jednoczesne zginanie i ściskanie oraz wyboczenie płyty. Równanie różniczkowe ugięcia płyty ma tu postać

$$(4.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w(\varrho, \theta) + q \nabla^2 w(\varrho, \theta) = p(\varrho, \theta).$$

Rozwiązaniem naszego zadania będzie wyrażenie całkowe

$$(4.2) \quad w(\varrho, \theta) = w_0(\varrho, \theta) + a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) w_1(\varrho, \theta; \varphi) d\varphi,$$

przy czym funkcję  $M(\varphi)$  wyznaczyć należy z równania całkowego

$$(4.3) \quad \frac{\partial w_0(1, \theta)}{\partial \varrho} + a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) \frac{\partial w_1(1, \theta; \varphi)}{\partial \varrho} d\varphi = 0.$$

Funkcję  $w_1(\varrho, \Theta; \varphi)$  otrzymać możemy bezpośrednio ze wzoru (2.13), jeśli przyjąć

$$(4.4) \quad \beta_1 a = u = 0, \quad \beta_2 a = a a = v.$$

Wstawiając jednak do wzoru (2.13)  $u = 0$  otrzymamy wyrażenie nieoznaczone; korzystając z reguły de l'Hospitala oraz stosując wzór Leibniza na  $n$ -tą pochodną iloczynu dwu funkcji

$$(y z)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} y^{(n-k)} z^{(k)},$$

otrzymamy dla  $n$ -tej pochodnej licznika wzoru (2.13) następujące wyrażenie:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n [J_n(v) \varrho^n - J_n(v \varrho)].$$

Dla  $n$ -tej pochodnej mianownika mamy natomiast wyrażenie

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n [v^2 J_n(v) - (1-v) v J_{n+1}(v)]$$

i ostatecznie znajdziemy

$$(4.5) \quad w_1(\varrho, \Theta; \varphi) = \frac{a}{\pi N} \left\{ \frac{J_0(v) - J_0(v \varrho)}{2v^2 J_0(v) - 2(1-v) v J_1(v)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[J_n(v) \varrho^n - J_n(v \varrho)] \cos n(\Theta - \varphi)}{v^2 J_n(v) - (1-v) v J_{n+1}(v)} \right\}.$$

Równanie całkowe (4.3) możemy zapisać w postaci

$$(4.6) \quad \frac{\partial w_0(1, \Theta)}{\partial \varrho} - \frac{a^2}{\pi N} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v}{\Delta_n} J_{n+1}(v) \cos n(\Theta - \varphi) d\varphi = 0,$$

gdzie

$$\Delta_n = v^2 J_n(v) - (1-v) v J_{n+1}(v) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\Delta_0 = 2v^2 J_0(v) - 2(1-v) v J_1(v) \quad (n = 0).$$

Podobnie jak w przypadku drgań podamy i tu rozwiązanie przybliżone równania całkowego (4.6) zastępując je układem równań algebraicznych liniowych niejednorodnych. Otrzymamy w tym przypadku

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^{2m} M_i K_{ik} = C_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, 2m),$$

gdzie

$$K_{ik} = -\frac{1}{2} \frac{J_1(v)}{v J_0(v) - (1-v) J_1(v)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2m} \varphi_0 (i-k)}{(2n+2) a_n + 1 - v},$$

$$a_n = \frac{v J_n(v)}{(2n+2) J_{n+1}(v)}.$$

Podobnie jak w p. 3 należałoby rozważyć zagadnienie zbieżności dla jądra równania całkowego (4.6). Analogicznie jak to zostało uczynione w przypadku drgań wykazać można, że jądro równania całkowego jest zbieżne dla  $i \neq k$  i posiada nieciągłość typu logarytmicznego dla  $i = k$ . Dlatego też dla wyrażenia  $K_{ii}$  w układzie równań (4.7) przyjmujemy średnią wartość funkcji w przedziale  $\Delta \varphi_i$ . Załóżmy, że obciążenie zewnętrzne jest osiowo symetryczne i dla rozwiązania przykładu przyjmijmy, że

$$C_k = \frac{\partial w_0(1, \theta)}{a \partial \varrho} \frac{\pi N}{a \Delta \varphi_i} = 20, \quad v = \sqrt{\frac{q}{n}} a = 1.$$

Przy utwierdzeniu pełnym płyty na  $1/4$  części obwodu i dla  $m=7$  [podział odcinka  $a\pi/2$  na 14 części przy symetrycznej postaci  $M(\varphi)$ ] otrzymamy układ siedmiu równań o siedmiu niewiadomych. Wartości jądra  $K_{ik}$  podajemy w tablicy 5.

Tablica 5

$i \backslash$	1	2	3	4	5	6	7
1	-2,308	-1,863	-1,547	-1,329	-1,176	-1,133	-1,124
2		-2,545	-1,908	-1,586	-1,376	-1,245	-1,194
3			-2,584	-1,954	-1,655	-1,436	-1,316
4				-2,653	-2,015	-1,726	-1,557
5					-2,724	-2,136	-1,967
6						-2,965	-2,546
7							-3,544

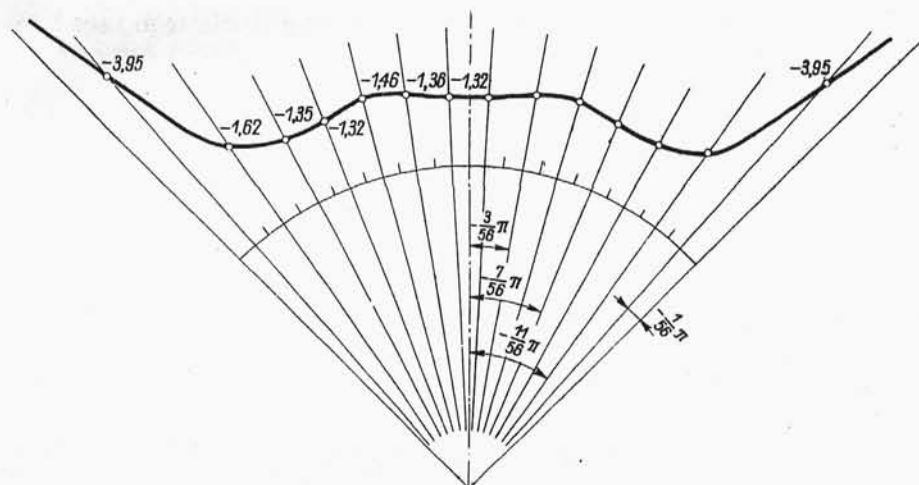
Rozwiązanie układu równań (4.7) daje wartości momentów utwierdzenia zestawione w tablicy 6.

Tablica 6

$\varphi_k$	$\pm \frac{13}{56} \pi$	$\pm \frac{11}{56} \pi$	$\pm \frac{9}{56} \pi$	$\pm \frac{7}{56} \pi$	$\pm \frac{5}{56} \pi$	$\pm \frac{3}{56} \pi$	$\pm \frac{1}{56} \pi$
$M_k(\varphi_k)$	-3,95	-1,62	-1,35	-1,32	-1,46	-1,36	-1,32

Ze względu na nieciągłość warunków brzegowych na końcach przedziałów utwardzenia zupełnie płyty otrzymamy w punktach A i B nieskończone wartości momentu utwardzenia. Po wyznaczeniu wielkości  $M_i$  wyznaczmy powierzchnię ugięcia płyty ze wzoru

$$(4.8) \quad w(\varrho, \Theta) = w_0(\varrho, \Theta) + \sum_{k=1}^{2m} M_k w_1(\varrho, \Theta; \varphi_k).$$



Rys. 7

W przypadku stateczności płyty równanie różniczkowe (4.1) staje się jednorodne, a równanie całkowe (4.6) przyjmuje dla  $p = 0$  następującą postać:

$$(4.9) \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v}{\Delta_n} J_n(v) \cos n(\Theta - \varphi) d\varphi = 0.$$

Tutaj wielkość  $v$  gra rolę nieoznaczonego parametru. Zastępując całkę sumą otrzymamy z równania (4.9) układ równań algebraicznych liniowych jednorodnych:

$$(4.10) \quad \sum_{i=1}^{2m} M_i K_{ik}(v) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, 2m).$$

Układ ten posiada rozwiązanie niezerowe tylko wtedy, gdy podstawowy wyznacznik układu równań jest równy zero. Wartość obciążenia krytycznego poszukiwać będziemy drogą prób. Zauważmy, że dla płyty na całym obwodzie swobodnie podparte wartości siły krytycznej, [7], otrzymamy dla wartości argumentu  $v = 2,041$ , natomiast dla płyty na całym

swym obwodzie utwardzonej zupełnie mamy  $v = 3,8317$ . W przypadku płyty na  $1/4$  obwodu zupełnie utwardzonej, a na pozostałym swobodnie podpartej otrzymamy  $2,041 < v < 3,8317$ . Postępując analogicznie jak w przypadku wyznaczania drgań własnych drogą prób otrzymaliśmy z wyznacznika trzeciego stopnia dla  $2m = 6$

$$v \approx 3,13, \text{ a zatem } q_{kr} \approx \frac{9,81 N}{a^2}.$$

5. Zginanie statyczne płyty. Równanie różniczkowe dla tego zagadnienia ma tu szczególnie prostą postać

$$(5.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w(\varrho, \Theta) = p(\varrho, \Theta),$$

a odpowiednie równanie całkowe jest

$$(5.2) \quad \frac{\partial w_n(1, \Theta)}{\partial \varrho} + a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) \frac{\partial w_1(1, \Theta; \varphi)}{\partial \varrho} d\varphi = 0.$$

Jądro równania całkowego otrzymać można ze wzoru (2.13) przyjmując w nim  $u = 0$  i  $v = 0$ .

Rozpatrzmy zatem wyrażenie występujące pod znakiem sumy we wzorze (2.13)

$$(5.3) \quad \frac{I_n(u, \varrho) J_n(v) - I_n(u) J_n(v, \varrho)}{\Delta_n^2}.$$

Zastosujmy do obliczenia wartości tego wyrażenia regułę de l'Hospitala i zróżniczkujmy licznik i mianownik  $2n + 2$  razy. Korzystając ponadto ze wzoru na  $n$ -tą pochodną iloczynu 3 zmiennych

$$(xyz)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^{(n-k)} \sum_{j=0}^{j=k} \binom{k}{j} y^{(k-j)} z^{(j)},$$

obliczymy pochodną licznika w otoczeniu  $u = v = 0$  dla  $n \geq 1$ .

Otrzymamy

$$2 \binom{2n+2}{n} \frac{n+2}{2^{2n+2}} i^n \varrho^n (\varrho^2 - 1).$$

Różniczkując  $2n + 2$  razy mianownik wyrażenia (5.3) w otoczeniu  $u = v = 0$  dla  $n \geq 1$  znajdziemy

$$-4 \binom{2n+2}{n} \frac{n+2}{2^{2n+2}} i^n (2n+1+v).$$

Dla  $n = 0$  wyrażenie (5.3) przyjmie postać  $1/2 (1+v)$ . Tak więc

$$(5.4) \quad w_1(\varrho, \Theta) = -\frac{a}{2\pi N} \left[ \frac{\varrho^2 - 1}{2(1+v)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n (\varrho^2 - 1)}{1+v+2n} \cos n(\Theta - \varphi) \right],$$

a równanie całkowe (5.2) zapisać możemy w postaci

$$(5.5) \quad \frac{\partial w_0(1, \Theta)}{\partial \varrho} - \frac{\alpha^2}{\pi N} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) \left[ \frac{1}{2(1+\nu)} - \frac{1}{2} \ln \left( 2 \sin \frac{\Theta - \varphi}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1+\nu}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\Theta - \varphi)}{n(1+\nu+2n)} \right] d\varphi = 0.$$

Również to równanie całkowe rozwiążemy w sposób przybliżony zastępując całkę sumą

$$(5.6) \quad \sum_{i=1}^{2m} M_i K_{ik} = C_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, 2m),$$

gdzie

$$K_{ik} = -\frac{1}{2(1+\nu)} + \ln \left[ 2 \sin \frac{\varphi_0}{2m} (i-k) \right] + \frac{1+\nu}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2m} \varphi_0 (i-k)}{n(1+\nu+2n)}$$

oraz

$$K_{ii} = -\frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{2}{\Delta \varphi_i} \int_0^{\frac{\Delta \varphi_i}{2}} \ln \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + \frac{1+\nu}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\nu+2n)}.$$

Przyjęliśmy tu średnią wartość wyrażenia  $\ln \{2 \sin [\varphi_0 (i-k)/2m]\}$  dla  $i=k$  w przedziale  $\Delta \varphi_i$ . Przy podziale odcinka utwierdzenia płyty  $AB = a\pi/2$  na 14 części i przy symetrycznej postaci  $M(\varphi)$  oraz przy założeniu, że płyta obciążona jest kołowo symetrycznie, a zatem że

$$C_k = \frac{\pi N}{a \Delta \varphi_i} \frac{\partial w_0(1, \Theta)}{a \partial \varrho} = \text{const} = 20,$$

otrzymamy układ siedmiu równań algebraicznych liniowych niejednorodnych. Rozważań dotyczących zbieżności szeregu jako będącego szczególnym przypadkiem poprzednich (drgania i jednocześnie zginanie i ściskanie) nie powtarzamy. Wartości jądra  $K_{ik}$  układu równań (5.6) podane są w tablicy 7.

Tablica 7

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	-2,293	-1,446	-1,169	-1,021	-0,943	-0,903	-0,878
2		-2,324	-1,494	-1,215	-1,073	-1,007	-0,985
3			-2,369	-1,545	-1,279	-1,154	-1,113
4				-2,434	-1,626	-1,386	-1,283
5					-2,540	-1,755	-1,556
6						-2,710	-2,028
7							-3,182

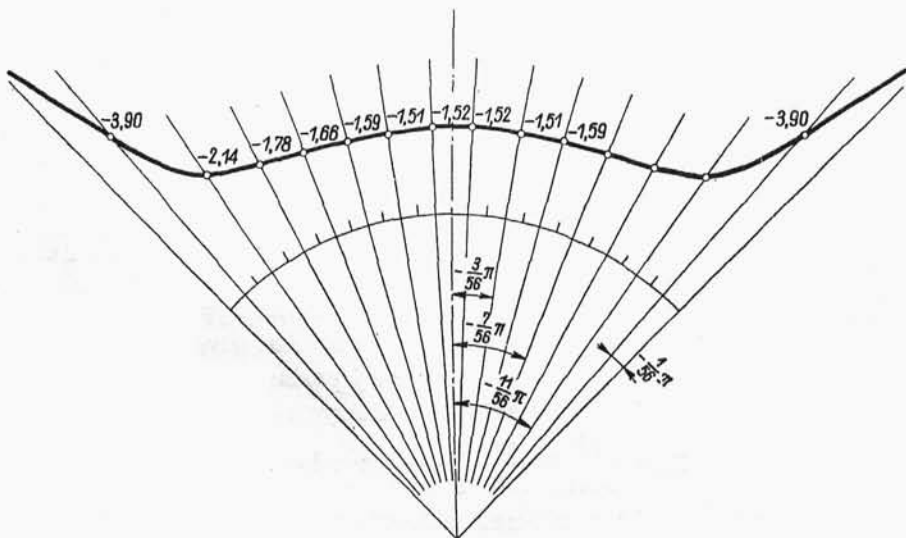
Rozwiązanie układu równań (5.6) daje wartości momentów utwierdzenia zestawione w tablicy 8.

Tablica 8

$\varphi_k$	$\pm \frac{13}{56}\pi$	$\pm \frac{11}{56}\pi$	$\pm \frac{9}{56}\pi$	$\pm \frac{7}{56}\pi$	$\pm \frac{5}{56}\pi$	$\pm \frac{3}{56}\pi$	$\pm \frac{1}{56}\pi$
$M_k(\varphi_k)$	-3,90	-2,14	-1,78	-1,66	-1,59	-1,51	-1,52

Wykres momentów  $M(\varphi)$  ilustruje rys. 8. Znając momenty utwierdzenia wyznaczyć możemy ugięcie dowolnego punktu płyty ze wzoru

$$(5.7) \quad w(\varrho, \Theta) = w_0(\varrho, \Theta) + a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) w_1(\varrho, \Theta; \varphi) d\varphi$$



Rys. 8

lub w naszym przypadku rozwiązania przybliżonego ze wzoru

$$(5.8) \quad w_0(\varrho, \Theta) = w_0(\varrho, \Theta) + \sum_{k=1}^{2m} M_k w_1(\varrho, \Theta; \varphi_k).$$

**6. Uogólnienie.** Przedstawiony sposób postępowania rozszerzyć można na płytę kołową, która na  $s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) odcinkach swego obwodu jest utwierdzona zupełnie, a na pozostałych swobodnie podparta. Ugięcie punktu  $P$  płyty wyrazi wzór

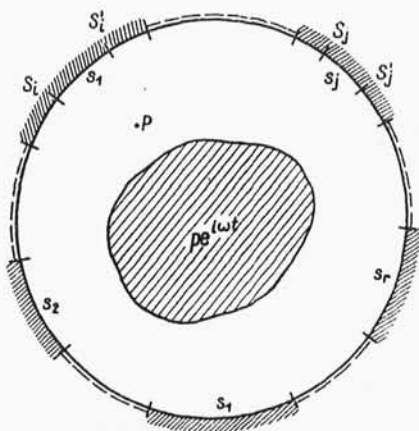
$$(6.1) \quad w(P) = w_0(P) + \sum_{j=1}^{j=r} \int_{s_j} M_j(S_j) w_1(P, S_j) ds_j.$$

Tutaj  $M_j(S_j)$  oznacza wartość funkcji momentów utwierdzenia w punkcie  $S_j$  odcinka brzegu  $s_j$ ,  $w_1(P_1 S_j)$  ugięcie punktu  $P$  płyty wywołane działaniem momentu jednostkowego skupionego  $M_j(S_j) = 1$ , przyłożonego w punkcie  $S_j$ ,  $w_0(P)$  ugięcie punktu  $P$  spowodowane działaniem obciążenia zewnętrznego w układzie podstawowym, tj. w płycie na całym swym brzegu swobodnie podpartej. Z warunków brzegowych utwierdzenia zupełnego płyty na odcinkach.  $i = 1, 2, \dots, r$  jej brzegu

$$(6.2) \quad \frac{\partial w(S'_i)}{\partial r} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

otrzymamy układ  $r$  równań całkowych

$$(6.3) \quad \frac{\partial w(S'_i)}{\partial r} = \frac{\partial w_0(S'_i)}{\partial r} + \\ + \sum_{j=1}^r \int_{s_j} M_j(S_j) \frac{\partial w_1(S'_i S_j)}{\partial r} ds_j = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, r).$$



Rys. 9

Rozwiązanie tego układu równań daje funkcje  $M_j(S_j)$ , które wstawione do związku (6.1) pozwolą na wyznaczenie ugięcia płyty. W przypadku drgań płyty przy jednoczesnym jej ściskaniu lub w przypadku jej wyboczenia znika wyraz  $w_0(P)$ , a układ równań (6.3) staje się układem jednorodnym.

7. Rozwiązanie ściśle. Dotychczasowy tok postępowania był taki, że po wyprowadzeniu równania całkowego (3.1), (3.2), (4.6) i (5.5) zastępowaliśmy je układem równań algebraicznych liniowych niejednorodnych, który rozwiązywaliśmy otrzymując przybliżone wartości momentu utwierdzenia w poszczególnych punktach. Zagęszczając punkty, dla których wyznaczaliśmy wartości momentów utwierdzenia, otrzymalibyśmy układ równań o coraz większej liczbie niewiadomych, a wartości momentów coraz bliższe dokładnym. Obecnie postąpimy w odmienny sposób, mianowicie napiszemy funkcję  $M(\varphi)$  w postaci rozwinięcia w szereg trygonometryczny, dzięki czemu otrzymamy wartości  $M(\varphi)$  nie w poszczególnych punktach, a w całym przedziale  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Uwzględniając coraz to większą liczbę wyrazów szeregu rozwinięcia otrzymamy krzywą coraz bliższą dokładnego przebiegu momentu utwierdzenia.

Niech będzie dane równanie całkowe (3.1). Przy założeniu, że kąt  $\varphi$  mierzy się od prostej połowiącej odcinek  $AB$  utwierdzenia zupełnego oraz że  $f(\theta)$  jest symetryczne względem tej prostej, otrzymamy

$$(7.1) \quad \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} M(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cos n \Theta \cos n \varphi d \varphi = -\frac{N \pi}{4 a^2} \frac{\partial w_0(1, \Theta)}{a \partial \varrho} = f(\Theta),$$

gdzie

$$Q_n = \frac{1}{\Delta_n} [u J_n(v) I_{n+1}(u) + v I_n(u) J_{n+1}(v)].$$

Przyjmijmy, że  $M(\varphi)$  oraz  $f(\Theta)$  można rozwinąć w szeregi cosinusowe

$$(7.2) \quad M(\varphi) = \sum_{\beta=0}^{\infty} M_{\beta} \cos \beta \varphi, \quad f(\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos n \Theta.$$

Pomnożymy po wstawieniu powyższych wartości obie strony równania (7.1) przez  $\cos a \Theta$  ( $a = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ) i scałkujemy w granicach od 0 do  $\varphi_0/2$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \left[ \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \left( \sum_{\beta=0}^{\infty} M_{\beta} \cos \beta \varphi \right) \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cos n \Theta \cos n \varphi d \varphi \right] \cos a \Theta d \Theta = \\ = \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos n \Theta \right) \cos a \Theta d \Theta, \\ \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cos n \Theta \sum_{\beta=0}^{\infty} M_{\beta} \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \cos \beta \varphi \cos n \varphi d \varphi \right) \cos a \Theta d \Theta = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \cos n \Theta \cos a \Theta d \Theta. \end{aligned}$$

Stąd

$$(7.3) \quad \sum_{\beta=0}^{\infty} M_{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n a_{n\beta} a_{na} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n a_{na} \quad (a = 0, 1, 2, \dots, \infty),$$

gdzie dla  $n \neq \beta$  mamy

$$\begin{aligned} a_{n\beta} &= \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \cos n \varphi \cos \beta \varphi d \varphi = \frac{\sin(n-\beta) \frac{\varphi_0}{2}}{2(n-\beta)} + \frac{\sin(n+\beta) \frac{\varphi_0}{2}}{2(n+\beta)}, \\ a_{na} &= \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \cos n \Theta \cos a \Theta d \Theta, \end{aligned}$$

oraz dla  $n = \beta$

$$a_{nn} = \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \cos^2 n \Theta d\Theta = \frac{1}{4n} \sin n \varphi_0 + \frac{1}{4} \varphi_0.$$

W ten sposób otrzymaliśmy na wyznaczenie współczynników rozwinięcia  $M_\beta$  nieskończony układ równań (7.3) ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ). Znając wartości współczynników  $M_\beta$  funkcję momentu utwierdzenia znajdziemy ze wzoru (7.2). W praktyce poprzestajemy na pewnej skończonej liczbie wyrazów rozwinięcia. Jednak aby osiągnąć dostateczną dokładność rozwiązania, należy wziąć odpowiednio dużą liczbę wyrazów rozwinięcia, co jest równoznaczne z rozwiązaniem układu równań o dużej liczbie niewiadomych. Podany tu sposób postępowania jest w praktyce nader uciążliwy; wymaga (dla uzyskania dla celów technicznych dostatecznie dokładnego wyniku) rozwiązania układu równań o kilkunastu niewiadomymi<sup>1)</sup>.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] D. J. S z e r m a n, *Ob izgibie krugloj plastinki czasticzno zaszcemlennoj i czasticzno opiertoj po konturu*, Dokł. AN ZSRR, t. 101, 4 (1955), s. 623-626.
- [2] W. N o w a c k i, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., t. 3, 1951 i 2 (1953).
- [3] W. N o w a c k i, *Zagadnienia dynamiki i stateczności płyty prostokątnej o nieciągłych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos. 2 (1955).
- [4] A. G r a y i G. B. M a t h e w s, *A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics*, 1931.
- [5] I. M. R y ż i k i I. Š. G r a d s t i e j n, *Tablicy integralow, sum, riadow i proizwiedienij*, 1951, s. 328, 207, 443.
- [6] S. D. P o n o m a r i e w i i n n i, *Osnowy sowriemiennych mietodow rasczota na procznost' w maszynostrojenji*, t. 2.
- [7] *Maszynostrojenie — Encikłopediczeskij sprawocznik*, t. 1, cz. 2.
- [8] J a h n k e i E m d e, *Funktionentafeln*, Berlin, 1933.
- [9] W. N. F a d i e j e w a i M. K. G a w u r i n, *Tablicy funkcij Bessela cietych nomierow*, 1950.

#### Резюме

#### КРУГОВАЯ ПЛАСТИНКА ПО КОНТУРУ ЧАСТИЧНО ЗАЩЕМЛЕННАЯ, И ЧАСТИЧНО СВОБОДНО ОПЕРТАЯ

В работе рассматриваются вынужденные колебания круговой пластинки при участии постоянной сжимающей нагрузки, действующей в центральной плоскости пластинки. В случае, когда частота колебаний  $\omega$  стремится к нулю, переходим к задаче одновременного изгиба

<sup>1)</sup> Уkłady równań podane w przykładach w niniejszej pracy zostały rozwiązane za pomocą analizatora równań algebraicznych liniowych ARAL w IM PAN.

и сжатия пластинки. В особом случае  $p=0$  получаются внутренние колебания пластинки при участии сжимающей силы. Наконец, в предельном случае  $\omega \rightarrow 0$ , в сформулированной в общих чертах нашей задаче содержится случай выпучивания пластинки. Решение затруднено смешанными условиями по контуру. Решение проблемы разыскивается в виде интегрального выражения (1.3), причем в качестве неизвестной величины принимается функция моментов  $M(\varphi)$  в интервале полного защемления пластинки. Переходя с точкой  $P$  пластинки в точку  $S'$  края при одновременном использовании граничного условия  $[\partial w(S')/\partial \varrho]_{\varrho=1} = 0$  в интервале  $(AB)$  контура, получается интегральное уравнение (1.5), в котором неизвестная функция  $M(\varphi)$  находится исключительно под знаком интеграла (интегральное уравнение Фредгольма первого рода).

В третьей главе работы определяется ядро интегрального уравнения; при помощи формулы (3.2) представлена особая форма интегрального уравнения. Интегральное уравнение решается приближенным способом, приводя его решение к решению системы линейных уравнений (3.3).

Подробно разработан ряд примеров, касающихся: (а) вынужденных колебаний пластинки при  $q=0$ , (б) основной частоты колебаний пластинки при  $q=0$ , (в) одновременного изгиба и сжатия пластинки, (г) выпучивания пластинки и (д) статического изгиба пластинки.

В шестой главе работы обобщается формулировка проблемы на пластинку, защемленную на  $r$  отрезках контура, а на остальных свободно опертую.

В заключение, в седьмой главе, приводится решение интегрального уравнения проблемы в виде тригонометрического ряда.

### S u m m a r y

#### THE PROBLEM OF A CIRCULAR PLATE PARTIALLY CLAMPED AND PARTIALLY SIMPLY SUPPORTED ALONG THE PERIPHERY

Forced vibrations of a circular plate subjected to an additional compressive load acting in its middle plane are considered. When the frequency  $\omega$  tends to zero, we pass to the case of combined bending and compression. In the particular case of  $p = 0$ , we obtain the free vibration of a compressed plate. The limit case of  $\omega \rightarrow 0$  contains the particular case of buckling. An additional difficulty of solution is due to the mixed boundary conditions. The solution is sought in the form of the integral expression (1.3); the function  $M(\varphi)$  expressing the moments in the interval of clamping is taken as the unknown. Moving point  $P$  of the plate so

as to coincide with point  $S'$  of its edge and using the boundary condition  $[\partial w(S')/\partial \varphi]_{\varphi=1} = 0$  for the segment  $(AB)$  of the contour, we obtain the Fredholm integral equation of the first kind, (1.5), for the unknown function  $M(\varphi)$ .

In Para. 3, the kernel of the integral equation is found. Eq. (3.2) represents the detailed form of the integral equation, which is solved in an approximate manner reducing the problem to the solution of the system of linear equations (3.3).

Examples concerning the following cases are treated in detail: (1) forced vibrations of the plate ( $q = 0$ ), (2) fundamental frequency of vibrations of the plate ( $q = 0$ ), (3) combined bending and compression, (4) buckling, (5) bending.

In Para. 6, the statement of the problem is generalized to the case of a plate clamped along  $r$  segments of the periphery and simply supported on the remaining segments.

Finally, the solution of the integral equation of the problem in the form of a trigonometric series is proposed in Para. 7.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1956 r.*