

BIBLIOTEKA GŁÓWNA  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ  
Warszawa

P O L S K A A K A D E M I A N A U K  
Instytut Podstawowych Problemów Techniki  
Instytut Podstawowych Problemów Techniki

# ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

R A D A R E D A K C Y J N A  
WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY  
JULIAN BONDER JERZY LITWINISZYN  
JERZY NOWIŃSKI WACŁAW OLSZAK  
BOHDAN STEFANOWSKI STANISŁAW TURSKI  
WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y  
JERZY NOWIŃSKI - REDAKTOR  
TADEUSZ IWŃSKI JÓZEF JANICZEK

TOM VIII WARSZAWA 1956 ZESZYT 2  
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## NAPRĘŻENIA MONTAŻOWE W PŁYTACH

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Należy rozróżnić dwa rodzaje błędów montażowych w płytach:

(1) płyta stanowi idealną płaszczyznę, natomiast podpory, na których ma być oparta, nie leżą w płaszczyźnie; nasunięcie płyty na podpory wymaga użycia siły, co powoduje powstanie naprężeń w płycie;

(2) podpory leżą w płaszczyźnie, natomiast płyta w swym wykonaniu odbiega od płaszczyzny — jest płytą lekko zakrzywioną; i tu nałożenie brzegu powierzchni płyty na podpory wymaga użycia siły.

Błędy montażowe typu pierwszego prowadzą do rozwiązania równania biharmonicznego  $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$  dla niejednorodnych warunków brzegowych. Zagadnienie to jest już dla wielu typów płyt i podpór rozwiązane i nie będziemy się nim zajmowali w niniejszej pracy.

Rozwiązanie zagadnienia naprężeń wywołanych błędami wykonania typu (2) oprzemy na wyrażeniu całkowym, [1],

$$(1.1) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \int \int \int (\bar{\sigma}_x \epsilon_x^{(0)} + \bar{\sigma}_y \epsilon_y^{(0)} + \bar{\tau}_{xy} \epsilon_{xy}^{(0)}) dV.$$

Wzór ten otrzymamy z równania pracy wirtualnej przy rozważaniu dwu stanów: stanu wirtualnego obciążenia  $\bar{P} = \bar{1}$  i stanu rzeczywistych odkształceń. W związku (1.1)  $w(\xi, \eta)$  oznacza ugięcie płyty,  $\epsilon_x^{(0)}(x, y)$ ,  $\epsilon_y^{(0)}(x, y)$  oraz  $\epsilon_{xy}^{(0)}(x, y)$  oznaczają składowe stanu odkształcenia płyty, powstałe w trakcie jej formowania (np. w płycie żelbetowej w procesie jej wykonania), wreszcie  $\bar{\sigma}_x(x, y; \xi, \eta)$ ,  $\bar{\sigma}_y(x, y; \xi, \eta)$  oraz  $\bar{\tau}_{xy}(x, y; \xi, \eta)$  oznaczają składowe stanu naprężeń, wywołane w punkcie  $(x, y)$  płyty działaniem siły skupionej  $\bar{P} = \bar{1}$ , przyłożonej do punktu  $(\xi, \eta)$  w kierunku osi  $z$ .

Funkcje  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  oraz  $\bar{\tau}_{xy}$  są funkcjami Greena; traktować je można jako powierzchnie wpływowe naprężeń. Związane są one z funkcjami przedstawiającymi ugięcie płyty i występują w następujących związkach:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right), \\ \bar{\sigma}_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right), \\ \bar{\tau}_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Tutaj  $E$  jest modułem sprężystości, a  $\nu$  liczbą P o i s s o n a. Zakładamy, że odkształcenia początkowe płyty określone są następującymi zależnościami:

$$(1.3) \quad \varepsilon_x^{(0)} = z g(x, y), \quad \varepsilon_y^{(0)} = z h(x, y), \quad \varepsilon_{xy}^{(0)} = z 2 k(x, y).$$

Wprowadzając związki (1.2) i (1.3) do równania (1.1) i całkując w granicach od  $-h/2$  do  $+h/2$  (gdzie  $h$  jest grubością płyty), otrzymamy

$$(1.4) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = -N \int_{\Omega} \int \left[ g \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) + h \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) + 2 k (1 - \nu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right] d\Omega.$$

Tutaj  $N = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  jest sztywnością płyty na zginanie.

Zważywszy że momenty zginające i skręcające, wywołane w płycie idealnie płaskiej działaniem stanu  $\bar{P} = \bar{1}$ , określone są związkami

$$(1.5) \quad \begin{cases} \bar{M}_x = -N \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right), \\ \bar{M}_y = -N \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right), \\ \bar{M}_{xy} = -N (1 - \nu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

możemy napisać związek (1.1) w postaci

$$(1.6) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \iint [g(x, y) \bar{M}_x(x, y; \xi, \eta) + h(x, y) \bar{M}_y(x, y; \xi, \eta) + 2 k(x, y) \bar{M}_{xy}(x, y; \xi, \eta)] dx dy.$$

Funkcje  $\bar{M}_x$ ,  $\bar{M}_y$  i  $\bar{M}_{xy}$  można traktować jako funkcje G r e e n a dla stanu  $\bar{P} = \bar{1}$ , przedstawiają one bowiem powierzchnie wpływowe momentów zginających i skręcających dla punktu  $(x, y)$  przy sile  $\bar{P} = \bar{1}$  posuwającej się po płycie.

Znajomość funkcji  $\bar{w}$  lub funkcji  $\bar{M}_x$ ,  $\bar{M}_y$ ,  $\bar{M}_{xy}$  dla rozmaitych typów płyt i warunków brzegowych pozwala już przy danych funkcjach  $g$ ,  $h$  i  $k$  na wyznaczenie powierzchni ugięcia  $w(\xi, \eta)$  ze wzorów (1.4) lub (1.6). Po wyznaczeniu powierzchni  $w(\xi, \eta)$  obliczymy wielkości statyczne z następujących wzorów:

$$(1.7) \quad \begin{cases} M_{\xi} = -N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + g + \nu h \right), \\ M_{\eta} = -N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + h + \nu g \right), \\ M_{\xi\eta} = -N(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + k \right), \\ Q_{\xi} = \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta}, \quad Q_{\eta} = \frac{\partial M_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi}. \end{cases}$$

Przechodząc od płyty do pręta prostego z osią pokrywającą się z osią  $x$  otrzymamy ze wzorów (1.4), (1.6) i (1.7) wzory następujące:

$$(1.8) \quad \begin{cases} \bar{1} w(\xi) = -EI \int \frac{d^2 \bar{w}(x, \xi)}{dx^2} g(x) dx, \\ \bar{1} w(\xi) = \int \bar{M}_x(x, \xi) g(x) dx, \\ M_{\xi} = -EI \left( \frac{d^2 w}{d\xi^2} + g \right). \end{cases}$$

Wzory powyższe słuszne będą również dla nieskończenie długiego pasma płytowego w postaci walca. Zamiast  $EI$  należy wstawić w tym przypadku  $N$ , a ponadto uzupełnić wzory (1.8) związkiem  $M_{\eta} = -N \nu g$ .

W wielu przypadkach będzie wygodniej operować powierzchnią początkowego odkształcenia płyty  $w_0(x, y)$ . Jest ona związana z wielkościami początkowych odkształceń następującymi związkami:

$$(1.9) \quad \begin{cases} \varepsilon_x^{(0)} = zg(x, y) = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y^{(0)} = zh(x, y) = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy}^{(0)} = 2zk(x, y) = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Podstawiając powyższe zależności do wzoru (1.1) i korzystając ze związków (1.5) otrzymamy

$$(1.10) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = - \int \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \bar{M}_x + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \bar{M}_y + 2 M_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

Zasadnicze wzory służące do wyznaczenia powierzchni ugięcia  $w(\xi, \eta)$  przedstawiają całki powierzchniowe. Postawmy pytanie, czy przez przekształcenie tych całek na krzywoliniowe i powierzchniowe nie otrzymamy prostej drogi do wyznaczenia powierzchni ugięcia  $w(\xi, \eta)$ .

Z przekształcenia Greena na płaszczyźnie wynika, że

$$(1.11) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \int f \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} d\Omega = \int_s \left[ f \left( \frac{\partial v}{\partial n} \cos^2 \alpha - \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) - \right. \\ \quad \left. - v \left( \frac{\partial f}{\partial n} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial s} \sin 2\alpha \right) \right] ds + \int_{\Omega} \int v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\Omega, \\ \int_{\Omega} \int f \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\Omega = \int_s \left[ f \left( \frac{\partial v}{\partial n} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial s} \sin 2\alpha \right) - \right. \\ \quad \left. - v \left( \frac{\partial f}{\partial n} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial s} \sin 2\alpha \right) \right] ds + \int_{\Omega} \int v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} d\Omega, \\ \int_{\Omega} \int f \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} d\Omega = \int_s \left[ f \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial n} \sin 2\alpha + \frac{\partial v}{\partial s} \cos^2 \alpha \right) - v \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial n} \sin^2 \alpha - \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \frac{\partial f}{\partial s} \sin^2 \alpha \right) \right] ds + \int_{\Omega} \int v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} d\Omega = \int_s \left[ f \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial n} \sin 2\alpha - \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \frac{\partial v}{\partial s} \sin^2 \alpha \right) - v \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial n} \sin 2\alpha + \frac{\partial f}{\partial s} \cos^2 \alpha \right) \right] ds + \int_{\Omega} \int v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} d\Omega \end{cases}$$

W powyższych związkach  $\partial v/\partial n$  i  $\partial f/\partial n$  oznaczają pochodne w kierunku normalnej (przy normalnej skierowanej na zewnątrz obszaru),  $\partial v/\partial s$  i  $\partial f/\partial s$  pochodne w kierunku stycznej do brzegu obszaru;  $\alpha$  oznacza kąt, jaki tworzy normalna z osią  $x$ . Zastosujmy powyższe związki do całki występującej we wzorze (1.4):

$$(1.12) \quad \bar{I} w(\xi, \eta) = -N \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} f_1 + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} f_2 + 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} f_{1,2} \right) d\Omega,$$

gdzie  $f_1 = g + \nu h$ ,  $f_2 = h + \nu g$  oraz  $f_{1,2} = k$ .

Po prostych przeliczeniach otrzymamy

$$(1.13) \quad \bar{I} w(\xi, \eta) = N \int_s \left[ \left( \bar{w} \frac{\partial f_n}{\partial n} - f_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) - \left( \bar{w} \frac{\partial f_{n,s}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} f_{n,s} \right) \right] ds - \\ - N \int_{\Omega} \int \bar{w} \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f_{1,2}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

We wzorach powyższych przyjęto oznaczenia:

$$\begin{aligned} f_n &= f_1 \cos^2 \alpha + f_2 \sin^2 \alpha + f_{1,2} \sin 2\alpha, \\ f_{n,s} &= -(f_2 - f_1) \frac{\sin 2\alpha}{2} - f_{1,2} \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Wielkości  $f_n$  oraz  $f_{n,s}$  traktować można jako rzuty wektorów na kierunek normalnej i stycznej do brzegu.

Wzór (1.13) jest słuszny dla dowolnych warunków brzegowych płyty. Szczególnie prostą postać przyjmie on dla płyty swobodnie podpartej i dla płyty na brzegach utwierdzonej zupełnie.

Dla płyty swobodnie podpartej znikają na brzegu wielkości  $\bar{w}$  i  $\partial\bar{w}/\partial s$ .

Dla tego przypadku wzór (1.13) uprości się do postaci

$$(1.14) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = -N \int_s f_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} ds - N \int_{\Omega} \bar{w} \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f_{1,2}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

Jeśli ponadto funkcje  $g$ ,  $h$  oraz  $k$ , a tym samym  $f_1$ ,  $f_2$  oraz  $f_{1,2}$  są funkcjami liniowymi, to zniknie w wyrażeniu (1.14) całka powierzchniowa. Otrzymamy wówczas

$$(1.15) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = -N \int_s f_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} ds.$$

Dla płyty na brzegu zupełnie utwierdzonej jest  $\bar{w} = 0$ ,  $\partial\bar{w}/\partial s = 0$ , a ponadto  $\partial\bar{w}/\partial n = 0$ . Tak więc

$$(1.16) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = -N \int_{\Omega} \bar{w} \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f_{1,2}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

W przypadku szczególnym funkcji liniowych  $g$ ,  $h$  i  $k$  otrzymamy ze wzoru (1.16)  $\bar{1} w(\xi, \eta) = 0$ .

Przekształćmy teraz przy użyciu związków (1.11) całkę powierzchniową występującą w związku (1.10). Po prostych przeliczeniach znajdziemy

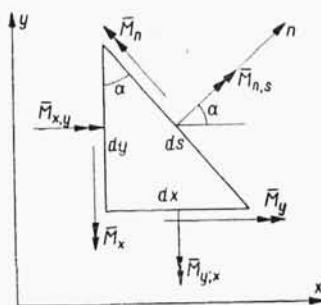
$$(1.17) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \int_s \left[ \left( w_0 \frac{\partial \bar{M}_n}{\partial n} - \bar{M}_n \frac{\partial w_0}{\partial n} \right) - \left( w_0 \frac{\partial \bar{M}_{n,s}}{\partial s} - \frac{\partial w_0}{\partial s} \bar{M}_{n,s} \right) \right] ds - \\ - \int_{\Omega} w_0 \left( \frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{M}_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

We wzorach tych przyjęte zostały oznaczenia:

$$\bar{M}_n = \bar{M}_x \cos^2 \alpha + \bar{M}_y \sin^2 \alpha + \bar{M}_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$\bar{M}_{n,s} = -\frac{1}{2} (\bar{M}_y - \bar{M}_x) \sin 2\alpha - \bar{M}_{xy} \cos 2\alpha.$$

Wielkości te posiadają prostą interpretację mechaniczną:  $\bar{M}_n$  przedstawia moment zginający o wektorze w kierunku stycznej, a  $\bar{M}_{n,s}$  jest momentem skręcającym o wektorze w kierunku normalnej.



Rys. 1

Zauważmy wreszcie [por. wzory (1.5)], że

$$(1.18) \quad \frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{M}_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}}{\partial x \partial y} = -N \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} = -p(x, y).$$

W naszym przypadku  $\bar{w}$  jest ugięciem wywołanym jedynie obciążeniem siłą skupioną  $\bar{P} = 1$  w punkcie  $(\xi, \eta)$ . Na pozostałej części płyty, wyłączając punkt  $(\xi, \eta)$ , obciążenie  $p(x, y)$  jest równe zeru. Zatem

$$-\iint_{\Omega} w_0 (-N \nabla^2 \nabla^2 \bar{w}) dx dy = \bar{1} w_0(\xi, \eta).$$

Tak więc wzór (1.17) napisać możemy w postaci

$$(1.19) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \bar{1} w_0(\xi, \eta) + \int_s \left[ \left( w_0 \frac{\partial \bar{M}_n}{\partial n} - \bar{M}_n \frac{\partial w_0}{\partial n} \right) - \left( w_0 \frac{\partial \bar{M}_{n,s}}{\partial s} - \frac{\partial w_0}{\partial s} \bar{M}_{n,s} \right) \right] ds.$$

Rozważmy przypadki szczególne. Niech brzeg płyty będzie swobodnie podparty. Wtedy

$$(1.20) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \bar{1} w_0(\xi, \eta) - \int_s \left( w_0 \frac{\partial \bar{M}_{n,s}}{\partial s} - \frac{\partial w_0}{\partial s} \bar{M}_{n,s} \right) ds,$$

gdyż moment zginający  $\bar{M}_n$  jest wzdłuż brzegu równy zeru. Jeśli powierzchnia początkowa  $w_0$  jest tak ukształtowana, że na brzegu  $w_0 = 0$ , to znika całka krzywoliniowa i mamy  $w(\xi, \eta) = w_0(\xi, \eta)$ .

Oczywiście, w tym przypadku znikają wszelkie wielkości statyczne, jak łatwo przekonać się można ze wzorów (1.7) przyjmując w nich

$$g = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad h = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad k = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.$$

W przypadku brzegu płyty utwierdzonego zupełnie otrzymamy przy  $\bar{M}_{n,s} = 0$  na brzegu

$$(1.21) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \bar{1} w_0(\xi, \eta) + \int_s \left( w_0 \frac{\partial \bar{M}_n}{\partial n} - \bar{M}_n \frac{\partial w_0}{\partial n} \right) ds.$$

Jeśli powierzchnia początkowa  $w_0$  posiada taki kształt, że na brzegu jej znika  $w_0$ , to ugięcie  $w$  wyznaczymy ze wzoru

$$(1.22) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \bar{1} w_0(\xi, \eta) - \int_s \bar{M}_n \frac{\partial w_0}{\partial n} ds.$$

Jeśli ponadto wzdłuż brzegu jest  $\partial w_0 / \partial n = 0$ , to  $w(\xi, \eta) = w_0(\xi, \eta)$  i płyta znajduje się w stanie beznaprężeniowym.

Niech teraz dana będzie płyta, której brzeg składa się z krzywych, przedziałami regularnych. Niech płyta będzie w przedziałach  $s_1, \dots, s_k$  swo-

bodnie podparta, a w przedziałach  $s_{k+1}, \dots, s_n$  utwierdzona zupełnie. Wtedy ugięcia płyty określają następujące wzory:

$$(1.23.1) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \\ = -N \left[ \sum_{i=1}^{i=k} \int_{s_i} f_n^{(i)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n_i} ds_i + \int_{\Omega} \bar{w} \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f_{1,2}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega \right]$$

lub

$$(1.23.2) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \bar{1} w_0(\xi, \eta) - \sum_{i=1}^{i=k} \int_{s_i} \left( w_0 \frac{\partial \bar{M}_{n,s}^{(i)}}{\partial s_i} - \frac{\partial w_0}{\partial s_i} \bar{M}_{n,s}^{(i)} \right) ds_i + \\ + \sum_{i=k+1}^{i=n} \int_{s_i} \left( w_0 \frac{\partial \bar{M}_n^{(i)}}{\partial n_i} - \bar{M}_n^{(i)} \frac{\partial w_0}{\partial n_i} \right) ds_i.$$

Zbadajmy jeszcze szczególną klasę odkształceń, mianowicie kiedy  $g = h$  oraz  $k = 0$ . W tym przypadku

$$f_1 = f_2 = (1 + \nu)g = f_n, \quad f_{1,2} = 0, \quad f_{n,s} = 0.$$

Tak więc ze wzoru (1.13) mamy

$$(1.24) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = N(1 + \nu) \int_s \left( \bar{w} \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) ds - N(1 + \nu) \int_{\Omega} \bar{w} \nabla^2 g d\Omega.$$

Zauważmy, że w przypadku odkształcenia płyty wskutek nierównomiernego wzrostu temperatury jest  $\varepsilon_x^{(0)} = \alpha \tau$ ,  $\varepsilon_y^{(0)} = \alpha \tau$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(0)} = 0$ .

Tutaj  $\tau(x, y) = (1/h)[t_1(x, y) - t_2(x, y)]$ , gdzie  $t_1$  i  $t_2$  są temperaturami na dolnej i górnej powierzchni płyty oraz  $\alpha$  jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej.

Tak więc wzór (1.24) pozwala określić powierzchnię ugięcia płyty wywołaną nierównomiernym wzrostem temperatury. W przypadku stacjonarnego pola jest  $\nabla^2 \tau = \nabla^2 g = 0$ . Równanie (1.24) przyjmuje szczególnie prostą postać:

$$(1.25) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = N(1 + \nu) \alpha \int_s \left( \bar{w} \frac{\partial \tau}{\partial n} - \tau \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) ds,$$

zgodną ze znanymi rozwiązaniami, [2].

Stwierdzić należy, że szczególnie proste wzory otrzymaliśmy dla płyt na brzegach zupełnie utwierdzonych, (1.16). To stwierdzenie pozwoli na opracowanie odmiennego sposobu rozwiązania dla płyty na swym obwodzie swobodnie podpartej.

Ugięcie w tej płycie niech składa się z dwu części:  $w_1$  i  $w_2$ . Ugięcie  $w_1$  odnosić się będzie do płyty o tym samym konturze, ale o brzegach zupełnie utwardzonych:

$$w_1 = -N \int_{\Omega} \int_{\Omega} \bar{w} \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f_{1,2}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

Dla płyty na brzegach zupełnie utwardzonej wyznaczamy momenty  $M_{\xi}^{(1)}$ ,  $M_{\eta}^{(1)}$  i  $M_{\xi\eta}^{(1)}$  przy użyciu związków (1.7). Tworzymy z nich momenty brzegowe  $M_n^{(1)}$  o wektorach posiadających kierunek stycznej do brzegu. Dla uzyskania warunków swobodnego podparcia należy momenty  $M_n^{(1)}$  zniewelować. Rozpatrujemy zatem płytę swobodnie podpartą dla warunków  $g = h = k = 0$  oraz obciążoną na brzegu momentami —  $M_n^{(1)}$ . Wyznaczamy powierzchnię  $w_2$  wywołaną tym obciążeniem oraz wielkości  $M_{\xi}^{(2)}$ ,  $M_{\eta}^{(2)}$ , ... na podstawie wzorów (1.7) przyjmując w nich  $g = h = k = 0$ .

Ostatecznie wielkości statyczne wywołane błędami wykonania płyty swobodnie na brzegach podpartej uzyskamy z superpozycji

$$(1.26) \quad w = w_1 + w_2, \quad M_{\xi} = M_{\xi}^{(1)} + M_{\xi}^{(2)}, \dots$$

Powyższy sposób postępowania rozszerzyć można i na przypadki, w których na brzegu  $s_1$  płyta jest zupełnie utwardzona, a na brzegu  $s_2$  swobodnie podparta. Ugięcie składamy z dwu części  $w_1$  i  $w_2$ , z których pierwsza odnosi się do płyty zupełnie utwardzonej na brzegu  $s_1$ , a obciążonej momentami —  $M_n$  na brzegu  $s_2$ . Powierzchnię ugięcia  $w_2$  wyznaczyć możemy na następującej drodze.

Na ugięcie  $w_2(P)$  punktu  $P$  płyty wpływa moment —  $M_n(S_2)$  na brzegu  $s_2$  i moment nieznan —  $M_n(S_1) = f(S_1)$  na brzegu  $s_1$ . W ten sposób

$$(1.27) \quad w_2(P) = - \int_{s_2} M_n(S_2) w_M(P, S_2) ds_2 + \int_{s_1} f(S_1) w_M(P, S_1) ds_1.$$

Tutaj  $w_M(P, S_2)$  oznacza ugięcie punktu  $P$  wywołane działaniem momentu skupionego  $M_n(S_2) = 1$ , przyłożonego w punkcie  $S_2$  brzegu  $s_2$ ;  $w_M(P, S_1)$  oznacza ugięcie punktu  $P$  wywołane działaniem momentu skupionego  $f(S_1) = 1$ , przyłożonego w punkcie  $S_1$  brzegu  $s_1$ . Pierwszą całkę wzoru (1.20) można bez trudu wyznaczyć; oznaczamy ją przez  $w_{2,0}(P)$ . Z warunku  $\partial w_2(S'_1)/\partial n_1 = 0$  na brzegu  $s_1$  otrzymamy

$$(1.28) \quad \frac{\partial w_2(S'_1)}{\partial n_1} = 0 = \frac{\partial w_2(S'_1)}{\partial n_1} + \int_{s_1} f(S_1) \frac{\partial w_M(S'_1, S_1)}{\partial n_1} ds_1.$$

Otrzymaliśmy równanie całkowe Fredhola pierwszego rodzaju. Z równania (1.28) wyznaczmy funkcję  $f(S_1)$ , a z równania (1.27) ugięcie  $w_2(P)$ . Powyższy sposób rozwiązania daje się oczywiście rozszerzyć na płyty o brzegu składającym się z funkcji przedziałami regularnych,

przy czym brzeg jest na kilku odcinkach swobodnie podparty, na pozostałych utwierdzony zupełnie.

Jest rzeczą widoczną, że powyższe rozważania rozwinąć można i na przypadki, w których część brzegu jest utwierdzona, część swobodnie podparta, a część swobodna, [3] i [4].

Szczególnie nieskomplikowane rozwiązanie otrzymamy dla pręta prostego oraz dla nieskończonego długiego pasma płytowego [dla  $g = g(x)$  oraz  $h = k = 0$ ].

Rozważmy pręt prosty o długości  $l$  na końcach podparty lub swobodny.

Wykonując całkowanie przez części, otrzymamy z pierwszego wzoru grupy (1.8)

$$(1.29) \quad w(\xi) = -EI \left[ \left| g(x) \frac{d\bar{w}(x, \xi)}{dx} \right|_0^l - \left| \bar{w}(x, \xi) \frac{dg(x)}{dx} \right|_0^l + \int_0^l \bar{w}(x, \xi) \frac{d^2 g(x)}{dx^2} dx \right].$$

Dla belki na brzegu  $x = 0$  utwierdzonej zupełnie, na brzegu  $x = l$  swobodnie podpartej jest  $\bar{w}(0, \xi) = 0$ ,  $d\bar{w}(0, \xi)/dx = 0$ ,  $\bar{w}(l, \xi) = 0$ .

Zatem

$$(1.30) \quad w(\xi) = -EI \left[ g(l) \frac{dw(l, \xi)}{dx} + \int_0^l \bar{w}(x, \xi) \frac{d^2 g(x)}{dx^2} dx \right].$$

W przypadku liniowej funkcji  $g$  znika całka występująca w ostatnim wzorze. Dla belki obustronnie utwierdzonej otrzymamy

$$w(\xi) = -EI \int_0^l \bar{w}(x, \xi) \frac{d^2 g(x)}{dx^2} dx.$$

W wielu przypadkach wygodnie będzie skorzystać z drugiego wzoru grupy (1.8).

Jeśli początkowa postać pręta określona jest funkcją  $w_0(x)$ , to wstawiając  $g(x) = -d^2 w_0/dx^2$  do wzoru (1.8) otrzymamy po scałkowaniu przez części

$$(1.31) \quad w(\xi) = EI \left[ \left| \frac{d^2 \bar{w}(x, \xi)}{dx^2} \frac{dw_0(x)}{dx} \right|_0^l - \left| w_0(x) \frac{d^3 \bar{w}(x, \xi)}{dx^3} \right|_0^l + \int_0^l w_0(x) \frac{d^4 \bar{w}(x, \xi)}{dx^4} dx \right].$$

Całkę występującą w ostatnim wzorze, zważywszy że  $EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x)$ , napiszemy w postaci

$$EI \int_0^l w_0(x) \frac{d^4 \bar{w}(x, \xi)}{dx^4} dx = 1 w_0(\xi),$$

ponieważ dla ugięcia  $\bar{w}$  jedynym obciążeniem jest siła skupiona przyłożona do punktu  $\xi$ . Tak więc wzór (1.31) przyjmuje postać

$$(1.32.1) \quad w(\xi) = w_0(\xi) + EI \left[ \left| \frac{d^2 \bar{w}(x, \xi)}{dx^2} \frac{dw_0(x)}{dx} \right|_0^l - \left| w_0(x) \frac{d^3 \bar{w}(x, \xi)}{dx^3} \right|_0^l \right]$$

albo

$$(1.32.2) \quad w(\xi) = w_0(\xi) - \left[ \left| \bar{M}_x(x, \xi) \frac{dw_0(x)}{dx} \right|_0^l - \left| w_0(x) \bar{Q}_x(x, \xi) \right|_0^l \right].$$

Dla belki swobodnie podpartej, zważywszy że funkcje  $\bar{M}_x(x, \xi)$  oraz  $w_0$ , są na końcach belki równe zeru, otrzymamy  $w(\xi) = w_0(\xi)$ . W tym przypadku oczywiście nie występują naprężenia w przęcie. Dla belki obustronnie utwierdzonej, dla  $w_0(0) = w_0(l) = 0$ , mamy

$$(1.33) \quad w(\xi) = w_0(\xi) - \left| \bar{M}_x(x, \xi) \frac{dw_0(x)}{dx} \right|_0^l.$$

Jeśli ponadto jest  $dw_0/dx = 0$  na końcach belki, to  $w(\xi) = w_0(\xi)$ ; wtedy w belce nie powstaną naprężenia.

2. Zastosujemy wyprowadzone w pierwszej części pracy związki do rozwiązania kilku najprostszych przykładów. Ograniczymy się przy tym jedynie do płyt prostokątnych.

(1) Niech dana będzie płyta prostokątna na brzegach swych swobodnie podparta. Odształcenie pierwotne płyty niech charakteryzują funkcje  $\varepsilon_x^{(0)} = g(x, y)z$ ,  $\varepsilon_y^{(0)} = \varepsilon_{xy}^{(0)} = 0$ .

Ugięcie płyty siłą nałożonej na brzegi wyraża wzór

$$(2.1) \quad \bar{w}(\xi, \eta) = -N \int_{\Omega} \int_{\Omega} g \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \int_{\Omega} g(x, y) \bar{M}_x(x, y; \xi, \eta) d\Omega.$$

Powierzchnia  $\bar{w}(x, y; \xi, \eta)$  jest znana i ma postać

$$(2.2) \quad \bar{w}(x, y; \xi, \eta) = 1 \frac{4}{Nab} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta \sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{D_{n,m}},$$

gdzie

$$D_{n,m} = (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$

Założmy, że  $g(x, y)$  jest równe zeru na całym obszarze płyty z wyjątkiem prostokąta  $\Delta x \Delta y$ , przy czym niech  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (g \Delta x \Delta y) = 1$ . Wtedy

$$(2.3) \quad 1 w(\xi, \eta) = 1 \bar{M}_x(x, y; \xi, \eta) = \\ = \frac{4}{ab} \sum_{n,m} \frac{(\alpha_n^2 + \beta_m^2 \nu)}{D_{n,m}} \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta \sin \alpha_n x \sin \beta_m y$$

przedstawia powierzchnię wpływową ugięcia płyty, wywołaną działaniem jednostkowego odkształcenia płyty, przyłożonego w punkcie  $(x, y)$ .

Dla funkcji  $g(x, y)$  ciągłej w obszarze płyty otrzymamy

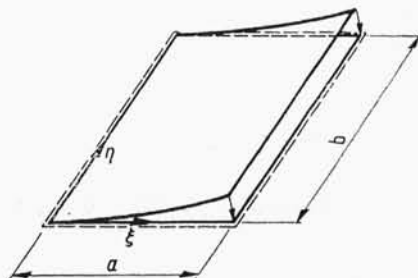
$$(2.4) \quad w(\xi, \eta) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m} \frac{(\alpha_n^2 + \nu \beta_m^2)}{D_{n,m}} \times \\ \times \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y dx dy.$$

Niech  $g = \text{const}$ . Odpowiada to początkowemu wygięciu płyty według walca parabolicznego (rys. 2). Wtedy

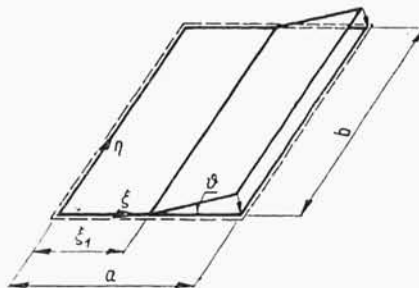
$$(2.5.1) \quad w(\xi, \eta) = \frac{16g}{ab} \sum_{n,m} \frac{(\alpha_n^2 + \nu \beta_m^2)}{\alpha_n \beta_m D_{n,m}} \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta$$

lub też

$$(2.5.2) \quad w(\xi, \eta) = \frac{4g}{a} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin \alpha_n \xi}{\alpha_n^3} \left\{ 1 - \frac{1}{\cosh \frac{\alpha_n b}{2}} \left[ \left( 1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{\alpha_n b}{2} \tanh \frac{\alpha_n b}{2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cosh \alpha_n \left( \eta - \frac{b}{2} \right) - \frac{(1-\nu)}{2} \alpha_n \left( \eta - \frac{b}{2} \right) \sinh \alpha_n \left( \eta - \frac{b}{2} \right) \right] \right\}.$$



Rys. 2



Rys. 3

Niech płyta w stanie początkowym będzie tak wykonana, że wzdłuż prostej  $x = \xi$  powstaje zgięcie (rys. 3). Wtedy

$$(2.6.1) \quad w(\xi, \eta) = \frac{8\vartheta}{ab} \sum_{n,m} \frac{(\alpha_n^2 + \beta_m^2 \nu)}{\beta_m D_{n,m}} \sin \alpha_n \xi_1 \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta.$$

Przy użyciu pojedynczych szeregów trygonometrycznych otrzymamy

$$(2.6.2) \quad w(\xi, \eta) = 2 \vartheta b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta \sinh \beta_m \xi'}{(\beta_m b)^2 \sinh \beta_m a} \sinh \beta_m \xi_1 \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} + \beta_m \xi' \operatorname{ctgh} \beta_m \xi' + \right. \\ \left. + \beta_m \xi_1 \operatorname{ctgh} \beta_m \xi_1 - \beta_m a \operatorname{ctgh} \beta_m a \right) \quad (\xi_1 \leq \xi \leq a).$$

Dla  $0 \leq \xi \leq \xi_1$  należy we wzorze (2.6.2) zamienić literę  $\xi_1$  na  $\xi$ .

(2) Niech teraz odkształcenie pierwotne płyty określone będzie dwiema funkcjami  $\varepsilon_x^{(0)} = g(x, y)$  i  $\varepsilon_y^{(0)} = h(x, y)$ . Wtedy w przypadku płyty na brzegach swobodnie podpartej ugięcie  $w(\xi, \eta)$  wyrazi wzór

$$(2.7) \quad w(\xi, \eta) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} \times \\ \times \left[ (a_n^2 + \nu \beta_m^2) \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin a_n x \sin \beta_m y \, dx \, dy + \right. \\ \left. + (\beta_m^2 + \nu a_n^2) \int_0^a \int_0^b h(x, y) \sin a_n x \sin \beta_m y \, dx \, dy \right].$$

W przypadku szczególnym  $g = h = \text{const}$  otrzymamy

$$(2.8.1) \quad w(\xi, \eta) = \frac{16 g (1 + \nu)}{ab} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin \beta_m \eta}{a_n \beta_m (a_n^2 + \beta_m^2)}$$

lub

$$(2.8.2) \quad w(\xi, \eta) = \frac{4(1+\nu)g}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi}{a_n^3} \left[ 1 - \frac{1}{\cosh \frac{a_n b}{2}} \cosh a_n \left( \eta - \frac{b}{2} \right) \right].$$

Stan  $g = h = \text{const}$ ,  $k = 0$  charakteryzuje powierzchnię początkową  $w_0$  w postaci obrotowego paraboloidu. W przyjętym układzie współrzędnych powierzchnię tę wyraża wzór

$$w_0(\xi, \eta) = \frac{4f}{a^2 + b^2} \left[ \left( \xi - \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \eta - \frac{b}{2} \right)^2 \right].$$

Tutaj  $f$  oznacza rzędną powierzchni  $w_0$  w narożach brzegu (rys. 4) podporowego. Ponadto

$$g = h = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} = -\frac{8f}{a^2 + b^2}.$$

Jeśli przy użyciu siły nałożyć brzegi powierzchni  $w_0$  na kontur  $ABCD$  płyty, tak aby wzdłuż brzegów ugięcie  $w$  było równe zeru, to

$$w(\xi, \eta) = -\frac{32(1+\nu)f}{a(a^2 + b^2)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi}{a_n^3} \left[ 1 - \frac{1}{\cosh \frac{a_n b}{2}} \cosh a_n \left( \eta - \frac{b}{2} \right) \right].$$

Otrzymaliśmy stan tym się charakteryzujący, że ugięcie  $w(\xi, \eta)$  oraz momenty zginające są ujemne. Wprowadziliśmy w ten sposób do płyty wstępne naprężenia ujemne. Jest rzeczą widoczną, że zabieg ten podwyższyć może znacznie nośność płyty przy poddaniu jej obciążeniom zewnętrznym  $p(x, y)$  skierowanym prostopadle do powierzchni środkowej płyty i działającym w kierunku osi  $z$ .

(3) Niech dana będzie płyta na swym obwodzie zupełnie utwierdzona. Niech odkształcenie pierwotne płyty określone będzie funkcjami  $\varepsilon_x^{(0)} = g(x)$ ,  $\varepsilon_y^{(0)} = h(y)$  i  $\varepsilon_{xy}^{(0)} = 0$ .

Podamy tu jeszcze jedną drogę rozwiązania tego zadania, które przy użyciu podwójnych szeregów trygonometrycznych szczególnie będzie wygodne.

Ugięcie  $w$  złożymy z ugięcia  $w_1$ , wywołanego wskutek błędów wykonania w płycie swobodnie podpartej, i z ugięcia  $w_2$ , wywołanego działaniem zginających momentów brzegowych w płycie idealnie płaskiej i również na brzegach swobodnie podpartej.

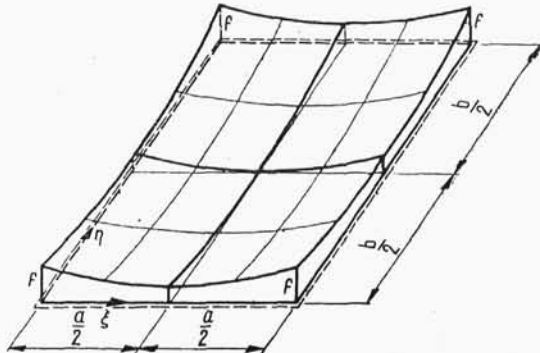
Ze wzoru (2.7) mamy

$$(2.9) \quad w(\xi, \eta) = \frac{8}{ab} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} \times \\ \times \left( \frac{a_n^2 + \nu \beta_m^2}{\beta_m} \int_0^a g(x) \sin a_n x dx + \frac{\beta_m^2 + \nu a_n^2}{a_n} \int_0^b h(y) \sin \beta_m y dy \right).$$

Powierzchnię  $w_2$  określimy wzorem

$$(2.10) \quad w_2(\xi, \eta) = \frac{2}{aN} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{[A_m - (-1)^n C_m] a_n + \frac{a}{b} [B_n - (-1)^m D_n] \beta_m}{D_{n,m}} \times \\ \times \sin a_n \xi \sin \beta_m \eta.$$

Tutaj  $A_m$ ,  $B_n$ ,  $C_m$  i  $D_n$  oznaczają współczynniki rozwinięcia Fouriera momentów brzegowych działających wzdłuż brzegów  $\xi=0$ ,  $\eta=0$ ,  $\xi=a$  i  $\eta=b$ . Założymy, że  $g(x)$  jest funkcją symetryczną względem prostej  $x=a/2$ , a  $h(y)$  symetryczną względem prostej  $y=b/2$ . W tym przypadku  $A_m = C_m$ ,  $B_n = D_n$ .



Rys. 4

Z warunków utwierdzenia zupełnego

$$(2.11) \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0,$$

gdzie  $w = w_1 + w_2$ , otrzymamy układ równań:

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{D_{n,m}} + \frac{a}{b} \beta_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n a_n}{D_{n,m}} + \frac{2N}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{D_{n,m}} \times \\ & \times \left[ \frac{a_n^2 + \nu \beta_m^2}{\beta_m} \int_0^a g(x) \sin a_n x dx + \frac{\beta_m^2 + \nu a_n^2}{a_n} \int_0^b h(y) \sin \beta_m y dy \right] = 0, \\ & a_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m A_m}{D_{n,m}} + \frac{a}{b} B_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} + \frac{2N}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{D_{n,m}} \times \\ & \times \left[ \frac{a_n^2 + \nu \beta_m^2}{\beta_m} \int_0^a g(x) \sin a_n x dx + \frac{\beta_m^2 + \nu a_n^2}{a_n} \int_0^b h(y) \sin \beta_m y dy \right] = 0 \end{aligned} \right.$$

( $n, m = 1, 3, 5, \dots$ ).

W powyższym układzie równań jest, [5],

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} = \frac{b}{8 a_n} \left( \operatorname{tgh} \frac{a_n b}{2} + \frac{a_n b}{2 \cosh^2 \frac{a_n b}{2}} \right),$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_n^2}{D_{n,m}} = \frac{a}{8 \beta_m} \left( \operatorname{tgh} \frac{\beta_m a}{2} + \frac{\beta_m a}{2 \cosh^2 \frac{\beta_m a}{2}} \right).$$

Z rozwiązania tego układu równań otrzymamy współczynniki  $A_m, \dots, D_n$  i możemy wyznaczyć powierzchnię  $w_2$ . W przypadku szczególnym  $g = h = \text{const}$  można wykazać, że układ (2.1.2) będzie spełniony, jeśli

$$A_m = -\frac{4N(1+\nu)g}{\beta_m b}, \quad B_n = -\frac{4N(1+\nu)g}{a_n a},$$

oraz że  $w = w_1 + w_2 = 0$  zgodnie ze wzorem (1.2.4), w którym przyjąć należy  $\nabla^2 g = 0$ ,  $\bar{w} = \partial \bar{w} / \partial n = 0$ .

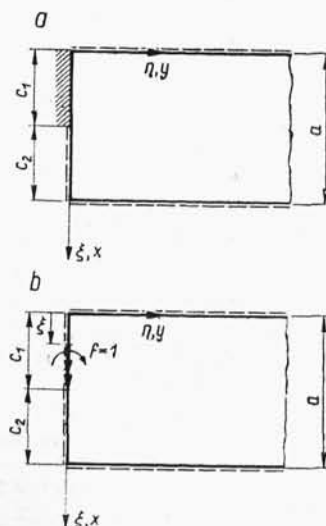
(4) Mamy pasmo płytowe swobodnie podparte na brzegach  $\xi = 0$ ,  $\xi = a$  oraz na odcinku  $c_2$  brzegu  $y = 0$ ; na odcinku  $c_1$  brzegu utwierdzone jest zupełnie (rys. 5). Niech  $g = \text{const}$ ,  $h = k = 0$ .

Rozważmy najpierw system podstawowy, czyli pasmo płytowe na wszystkich brzegach swobodnie podparte.

Powierznię ugięcia tego pasma oznaczamy przez  $W$ . Składać się ona będzie z dwu części, z ugięcia  $w_1$  wywołanego błędem wykonania w pasmie na brzegach zupełnie utwierdzonych oraz z ugięcia  $w_2$  wywołanego

w pasmie na brzegach swobodnie podpartych działaniem momentów brzegowych —  $M_n$ . Ponieważ  $g = \text{const}$  oraz  $\nabla^2 g = 0$ , zatem  $w_1 = 0$ , a  $M_n = -Ng$  na brzegach  $\xi = 0$ ,  $\xi = a$  oraz  $M_n = -Nrg$  na brzegu  $\eta = 0$ . Powierzchnia  $w_2$  przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad w_2(\xi, \eta) &= \frac{4g}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n^3} \times \\
 &\times \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{2} a_n \eta \right) e^{-a_n \eta} \right] \sin a_n \xi + \\
 &+ \frac{2g\nu}{a} \eta \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} e^{-a_n \eta} \sin a_n \xi = \\
 &= \frac{4g}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n^3} \times \\
 &\times \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{1}{2} a_n \eta (1 - \nu) \right] e^{-a_n \eta} \right\} \times \\
 &\times \sin a_n \xi = W(\xi, \eta).
 \end{aligned}$$



Rys. 5

Ugięcie pasma płytowego na odcinku  $c_1$  dodatkowo utwierdzonego przedstawić możemy w postaci

$$(2.14) \quad w(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) + \int_0^{c_1} f(x) G(x, 0; \xi, \eta) dx.$$

Tutaj  $f(x)$  jest nieznaną funkcją momentu zginającego  $M_x$  na brzegu  $c_1$ , a  $G(x, 0; \xi, \eta)$  ugięciem płyty na wszystkich brzegach swobodnie podpartej, wywołanym działaniem momentu skupionego  $f = 1$  w punkcie  $(x, 0)$ , (rys. 5b):

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad G(x, 0; \xi, \eta) &= \frac{\eta}{\pi N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-a_n \eta}}{n} \sin a_n x \sin a_n \xi = \\
 &= \frac{\eta}{4\pi N} \ln \frac{\cosh \frac{\pi \eta}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (\xi - x)}{\cosh \frac{\pi \eta}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (\xi + x)}.
 \end{aligned}$$

Ponieważ na odcinku  $c_1$  jest

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0,$$

zatem

$$(2.16.1) \quad \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \eta} = \frac{\partial W(\xi, 0)}{\partial \eta} + \int_0^{\xi} f(x) \frac{\partial G(\xi, 0; x, 0)}{\partial \eta} dx = 0$$

albo

$$(2.16.2) \quad \int_0^{\xi} f(x) \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(\xi - x)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(\xi + x)} dx = \frac{8\pi N(1+\nu)g}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} \sin a_n \xi.$$

Z rozwiązania powyższego równania całkowego wyznaczmy funkcję  $f(x)$ , a ze związku (2.14) powierzchnię  $w(\xi, \eta)$ .

(5) Rozważmy płytę prostokątną o powierzchni początkowej tym się charakteryzującą, że  $g = h = 0$  oraz  $k = \text{const}$ . Mamy tu do czynienia z hiperbolicznym paraboloidem

$$w_0 = \frac{4f}{ab} \left[ \left( \xi - \frac{a}{2} \right) \left( \eta - \frac{b}{2} \right) \right],$$

gdzie

$$k = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{4f}{ab}.$$

We wzorach tych  $f$  jest wartością  $w_0$  w narożach  $(0, 0)$  i  $(a, b)$ , zaś  $-f$  wartością  $w_0$  w narożach  $(a, 0)$  i  $(0, b)$ .

Skorzystamy tu ze wzoru (1.6)

$$(2.17) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = 2 \int_{\Omega} k \bar{M}_{xy}(x, y; \xi, \eta) dx dy.$$

Dla płyty prostokątnej o brzegu swobodnie podpartym jest

$$\begin{aligned} \bar{M}_{xy} &= -N(1-\nu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} = \\ &= -\frac{4(1-\nu)}{ab} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_m}{D_{n,m}} \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta \cos \alpha_n x \cos \beta_m y. \end{aligned}$$

Ze wzoru (2.17) otrzymamy

$$w(\xi, \eta) = -\frac{8(1-\nu)k}{ab} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_m \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} \int_0^a \int_0^b \sin \alpha_n x \sin \beta_m y = 0.$$

Przez nałożenie przy użyciu siły brzegów hiperbolicznego paraboloidu na brzeg podporowy zdeformowaliśmy tę powierzchnię do kształtu płaskiego.

Ze wzorów (1.7) otrzymamy

$$(2.18) \quad M_{\xi} = M_{\eta} = 0, \quad M_{\xi\eta} = -N(1-\nu)k.$$

Литература цитована в текście

- [1] W. Nowacki, *Напряжения теплые в телах анизотропных* (I), Arch. Mech. Stos. 3 (1954).
- [2] W. M. Majsiel, *Температурная задача теории упругости*, Kijów 1951.
- [3] W. Nowacki, *Плиты о смешанных условиях береговых*, Arch. Mech. Stos. 3-4 (1951).
- [4] W. Nowacki, *Плиты о смешанных условиях береговых* (II), Arch. Mech. Stos. 2 (1953).
- [5] K. Girkmann, *Flächentragwerke*, Wiedeń 1954.

Резюме

МОНТАЖНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАСТИНКАХ

В работе рассматривается не идеально плоско изготовленная, а слегка изогнутая пластинка.

Укладка краев пластинки на опоры, расположенные в одной плоскости, требует применения силы, вследствие чего в пластинке возникают напряжения.

Решение этой задачи основывается на интегральном выражении (1.1). Эта формула (приведенная автором в его работе [1]) получается из уравнения виртуальной работы, при обсуждении двух состояний: состояния виртуальной нагрузки  $P=1$ , действующей на идеально плоскую пластинку, и состояния действительных деформаций. В зависимости (1.1)  $w(\xi, \eta)$  обозначает прогиб пластинки, а  $\epsilon_x^{(0)}$ ,  $\epsilon_y^{(0)}$  и  $\epsilon_{xy}^{(0)}$  — составляющие деформации, возникшие во время ее формирования; наконец  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  и  $\bar{\tau}_{xy}$  обозначают составляющие напряженного состояния, вызванного в точке  $(x, y)$  пластинки действием сосредоточенной силы  $\bar{P}=1$ , приложенной в точке  $(\xi, \eta)$ .

Полагая, что  $\epsilon_x^{(0)}$ ,  $\epsilon_y^{(0)}$  и  $\epsilon_{xy}^{(0)}$  являются произвольными функциями  $x, y$ , но линейными по отношению к  $z$ , (1.3), приведем формулу (1.1) (проинтегрировав в пределах от  $-h/2$  до  $h/2$ ) к виду (1.4) или (1.6). Получив функцию  $w(\xi, \eta)$  из этих формул, можно определить все статические величины пластинки из уравнений (1.7).

Пользуясь преобразованием Грина на плоскости, можно представить прогиб или в виде (1.13), или же в виде (1.17). Первый вид выгоден в случае, когда даны функции  $g, h$  и  $k$ , второй — когда дана поверхность первоначальной деформации пластинки. Особенно просто можно представить при помощи этих формул прогиб  $w$  для пластинок свободно опертых на краях, (1.15) и (1.20), или защемленных, (1.16) и (1.21).

В заключение приводится способ решения задачи, когда пластинка частично свободно оперта по контуру, а частично защемлена, причем задача сводится к исследованию системы интегральных уравнений.

Во второй части работы приводятся несколько простых примеров определения статических величин в прямоугольных пластинках, обладающих предварительной кривизной.

### S u m m a r y

#### ASSEMBLAGE STRESSES IN PLATES

The author considers a plate which is not perfectly flat, having a slight initial curvature.

If the supports lie in the same plane the assemblage requires an external force and the plate will be stressed.

The solution of this problem is based on the integral expression (1.1). This expression (derived in the author's paper [1]) is obtained from the equation of virtual work, two states being considered: the virtual state of the load  $P = 1$  acting on a perfectly flat plate and that of real deformation. In Eq. (1.1)  $w(\xi, \eta)$  denotes the deflection of the plate,  $\varepsilon_x^{(0)}$ ,  $\varepsilon_y^{(0)}$  and  $\varepsilon_{xy}^0$  — the strain components of the plate originating from the process of plate forming and  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  and  $\bar{\tau}_{xy}$  the stress components at the point  $(x, y)$ , due to a concentrated force  $\bar{P} = 1$  at the point  $(\xi, \eta)$ .

Assuming that  $\varepsilon_x^{(0)}$ ,  $\varepsilon_y^{(0)}$  and  $\varepsilon_{xy}^0$  are functions of  $x$  and  $y$ , arbitrarily chosen but linear with respect to  $z$ , (1.3), Eq. (1.1) is transformed, by integration from  $-h/2$  to  $h/2$ , into Eq. (1.4) or (1.6).

Having found from these equations the function  $w(\xi, \eta)$ , we can determine from (1.7) all quantities concerning the plate.

Using Green's transformation on a plane we can represent the deflection in the form (1.13) or (1.17). The first is convenient in the case in which the functions  $g$ ,  $h$  and  $k$  are given, the second — if the surface of initial deformation is given. Using these formulae the deflection of simply supported or rigidly fixed plates [(1.15), (1.20) and (1.16), (1.21), respectively] can be represented in a particularly simple form.

Finally a solution method for a plate simply supported on part of its periphery and rigidly fixed at the remaining part is proposed. The problem is reduced to the solution of a system of integral equations.

In the second part of the paper some simple examples of rectangular plates having initial curvatures are considered.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 października 1955 r.