

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

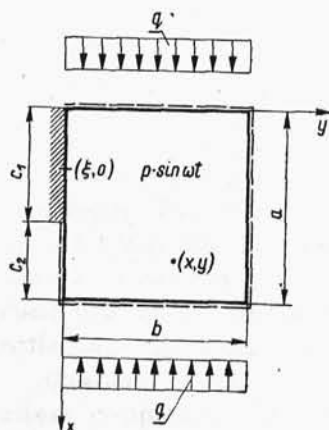
2
VII

TOM VII WARSZAWA 1955 ZESZYT 2
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ZAGADNIENIA DYNAMIKI I STATECZNOŚCI PŁYTY PROSTOKĄTNEJ O NIECIĄGŁYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Rozważmy zagadnienie płyty prostokątnej, ściskanej obciążeniem q w kierunku osi x (rys. 1) i poddanej działaniu obciążenia okresowo-zmien-
nego. Równanie różniczkowe tego zagadnienia ma postać



Rys. 1

$$(1.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 \bar{w}(x, y, t) + q \frac{\partial^2 \bar{w}(x, y, t)}{\partial x^2} + \\ + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}(x, y, t)}{\partial t^2} = \bar{p}(x, y, t).$$

Tutaj $\bar{w}(x, y, t)$ jest rzędną ugięcia płyty, $\bar{p}(x, y, t)$ obciążeniem płyty, N sztywnością płyty na zginanie, wreszcie μ jest masą płyty przypadającą na jednostkę pola jej płaszczyzny środkowej. Zakładając, że płyta wykonuje drgania harmoniczne, a więc przyjmując

$$\bar{w}(x, y, t) = w(x, y) e^{i \omega t},$$

$$\bar{p}(x, y, t) = p(x, y) e^{i \omega t},$$

otrzymamy

$$(1.2) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) + q \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} - \mu \omega^2 w(x, y) = p(x, y).$$

Gdy częstotliwość drgań własnych jest równa zeru ($\omega = 0$), równanie

$$(1.3) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) + q \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = p(x, y)$$

opisuje ugięcie płyty w przypadku jej jednoczesnego zginania i ściskania.

Przy braku obciążenia zewnętrznego równanie

$$(1.4) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) + q \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} - \mu \omega^2 w(x, y) = 0$$

określa ugięcie (a właściwie amplitudę ugięcia drgań swobodnych) płyty ściskanej siłami q . Wreszcie, stawiając w ostatnim równaniu $\omega = 0$, otrzymamy równanie różniczkowe wyboczenia płyty

$$(1.5) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) + q \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = 0.$$

Zajmować się będziemy przypadkiem najogólniejszym, mianowicie drganiami wymuszonymi przy udziale sił ściskających [równania (1.1) i (1.2)]. Z tego ogólnego rozwiązania uzyskamy rozwiązania dalszych trzech ważnych zagadnień: jednoczesnego zginania i ściskania płyty, swobodnego drgania płyty oraz jej wyboczenia.

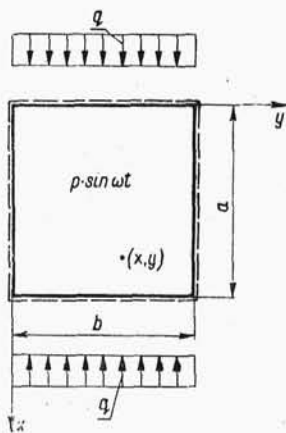
Rozważać będziemy zagadnienie płyty prostokątnej o nieciągłych warunkach brzegowych. Przez warunki nieciągłe rozumiemy warunki następujące. Podzielmy brzeg płyty prostokątnej na t odcinków i każdemu odcinkowi przypiszmy dwa warunki brzegowe, przy czym w sąsiadujących ze sobą odcinkach krawędzi pary tych warunków brzegowych są różne. Taki zespół warunków nazywamy «nieciągłymi warunkami brzegowymi». Jako przykład posłużyć może brzeg płyty, który na pierwszym odcinku jest swobodnie podparty, na drugim swobodny, na trzecim utwierdzony zupełnie itd. «Ciągłymi warunkami brzegowymi» nazywamy parę warunków brzegowych, która się zmienia wzdłuż krawędzi w sposób ciągły. Zarówno nieciągłe jak i ciągłe warunki brzegowe należą do zmiennych warunków brzegowych. W przeciwieństwie do nich mogą występować stałe warunki brzegowe niezmiennie wzdłuż poszczególnych krawędzi.

W rozważaniach naszych bierzemy pod uwagę zarówno warunki brzegowe geometryczne, jak i statyczne; ograniczamy się jednak do warunków brzegowych określonych liniowymi operatorami różniczkowymi. Wreszcie określeniem płyt prostokątnych o nieciągłych warunkach brzegowych obejmujemy również płyty ze szczelinami, które podzielić można na kilka typów płyt o nieciągłych warunkach brzegowych na niektórych krawędziach; określenie to rozszerzymy również na płyty składające się z kilku prostokątów oraz na płyty prostokątne dodatkowo podparte na podporach liniowych w ich obrębie.

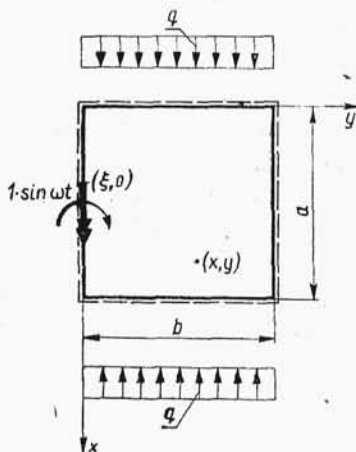
W pracy niniejszej rozpatrzemy najprostsze przypadki płyty prostokątnej o nieciągłych warunkach brzegowych. Rozwiązanie doprowadzamy do równań całkowitych Fredholma pierwszego rodzaju. Wzory uzyskane za pomocą tej metody podane zostały w pracy autora [1] w odniesieniu do płyt podpartych wzdłuż odcinków w obrębie płyty. W roku ubiegłym problem stateczności i drgań własnych płyt o nieciągłych warunkach brzegowych podjął S. Kaliski, [2] i [3], doprowadzając rozwiązanie do równania całkowitego Fredholma drugiego rodzaju.

2. Rozpatrzmy płytę prostokątną, która na trzech brzegach posiada ciągłe warunki brzegowe, a mianowicie jest swobodnie podparta, a na czwartym brzegu ($y=0$) posiada różne warunki brzegowe na odcinkach c_1 i c_2 : na odcinku c_1 niech płyta będzie zupełnie utwardzona, na odcinku c_2 swobodnie podparta.

Na płytę działa obciążenie okresowo zmienne $p \sin \omega t$, gdzie $p = \text{const.}$ Wzdłuż odcinka c_1 powstaną okresowo zmienne momenty zginające, momenty utwardzenia $m_y(x, 0, t) = M(x) \sin \omega t$. Funkcja $M(x)$, czyli amplituda momentu utwardzenia płyty, jest funkcją nieznaną; wyznaczenie jej pozwoli na rozwiązanie postawionego zagadnienia.



Rys. 2



Rys. 3

Rozważmy teraz tak zwany «układ podstawowy», w którym wszystkie krawędzie płyty posiadać będą ciągłe warunki brzegowe. Takim układem będzie w naszym przypadku płyta na wszystkich krawędziach swobodnie podparta. Rozpatrzmy dla tego układu podstawowego dwa pomocnicze zadania. Wyznamy ugięcie płyty $\bar{w} = \bar{w}_0(x, y) \sin \omega t$ wywołane obciążeniem zewnętrznym $p \sin \omega t$ (rys. 2). Następnie wyznaczmy powierzchnię ugięcia układu podstawowego, obciążonego momentem skupionym jednostkowym $1 \cdot \sin \omega t$ działającym w punkcie $(\xi, 0)$ brzegu $y=0$ (rys. 3). Oznaczmy tę powierzchnię przez $G(x, y; \xi, 0) \sin \omega t$. Traktować ją można jako funkcję Greena.

Stosując zasadę superpozycji traktować możemy ugięcie płyty o nieciągłych warunkach brzegowych na brzegu $y=0$ jako sumę ugięć dla dwu obciążeń, obciążenia $p \sin \omega t$ działającego na układ podstawowy oraz momentów $M(x) \sin \omega t$ rozłożonych na odcinku c_1 układu podstawowego. Zatem

$$(2.1) \quad w(x, y) \sin \omega t = w_0(x, y) \sin \omega t + \int_0^{c_1} M(\xi) G(x, y; \xi, 0) \sin \omega t d\xi,$$

albo

$$(2.2) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + \int_0^{c_1} M(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi.$$

Zakładamy, że funkcje $w_0(x, y)$ i $G(x, y; \xi, 0)$ dadzą się wyznaczyć w układzie podstawowym, który odznacza się prostotą warunków brzegowych. Tak więc zadanie nasze byłoby rozwiązane, gdyby znana była funkcja $M(\xi)$. Wyznamy ją wprowadzając dotychczas jeszcze niewykorzystany warunek brzegowy $\partial w(x, 0)/\partial y = 0$, jaki spełnić winna płyta na odcinku c_1 .

Z równania (2.2) otrzymamy

$$(2.3) \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + \int_0^{c_1} M(\xi) \frac{\partial G(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0.$$

Otrzymaliśmy tu równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju. Rozwiązanie tego równania da funkcję $M(\xi)$. Wstawiając tę funkcję do równania (2.2) wyznaczmy amplitudę ugięcia płyty $w(x, y)$.

Zauważyć należy, że w funkcjach $w_0(x, y)$ i $G(x, y; \xi, 0)$ występują parametry ω i q . Przy ustalonym ω i q rozwiązanie równania całkowego (2.3) daje zatem amplitudę ugięcia płyty wykonującej drgania wzbudzone. W przypadku $\omega = 0$, równanie (2.2) określa rzędną ugięcia płyty jednocześnie zginanej i ściskanej. Parametr ω nie może być jednak dowolny, powinien on być różny od częstotliwości drgań własnych płyty. Częstotliwość tę określimy z równania (2.3) przyjmując $w_0 = 0$. W tym bowiem przypadku punktem wyjścia jest równanie różniczkowe (1.4), które prowadzi do równania całkowego

$$(2.4) \quad \int_0^{c_1} M(\xi) \frac{\partial G(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0.$$

Parametr ω powinien być tak dobrany, aby spełniał równanie (2.4). W przypadku wyboczenia układu należy w równaniu (2.4) przyjąć $\omega = 0$. Parametr q powinien być tak dobrany, aby spełniał równanie (2.4) przy $\omega = 0$. Wracając do zagadnienia drgań wymuszonych wyznaczamy dla naszego konkretnego zadania funkcje $G(x, y; \xi, 0)$ i $w_0(x, y)$.

Funkcja $G(x, y; \xi, 0)$ powinna spełniać równanie różniczkowe

$$(2.5) \quad N \nabla^2 \nabla^2 G + q \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \mu \omega^2 G = 0$$

oraz następujące warunki brzegowe:

$$(2.6) \quad \begin{cases} G(0, y; \xi, 0) = 0, & \nabla^2 G(0, y; \xi, 0) = 0, \\ G(a, y; \xi, 0) = 0, & \nabla^2 G(a, y; \xi, 0) = 0, \\ G(x, 0; \xi, 0) = 0, & -N \frac{\partial^2 G(x, 0; \xi, 0)}{\partial y^2} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x, \\ G(x, b; \xi, 0) = 0, & \frac{\partial^2 G(x, b; \xi, 0)}{\partial y^2} = 0, \end{cases}$$

gdzie $a_n = n\pi/a$.

Szereg

$$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x$$

przedstawia tutaj moment jednostkowy $M=1$ działający na osi x w punkcie $(\xi, 0)$, moment o wektorze skierowanym wzdłuż osi x .

Przyjmijmy rozwiązanie równania (2.5) w postaci

$$(2.7) \quad G(x, y; \xi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y; \xi) \sin a_n x.$$

Wstawiając (2.7) do równania (2.5) otrzymamy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$(2.8) \quad \frac{d^4 G_n}{dy^4} - 2a_n^2 \frac{d^2 G_n}{dy^2} + (a_n^4 - k^2 a_n^2 - c^2) G_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty),$$

gdzie

$$k^2 = \frac{q}{N}, \quad c^2 = \mu \frac{\omega^2}{N}.$$

Rozwiązaniem równania (2.8) jest

$$(2.9) \quad G_n(y; \xi) = A_n \sinh \lambda_n y + B_n \cosh \lambda_n y + C_n \sinh \varepsilon_n y + D_n \cosh \varepsilon_n y,$$

gdzie

$$(2.9.1) \quad \lambda_n, \varepsilon_n = \sqrt{a_n^2 \pm \sqrt{k^2 a_n^2 + c^2}}.$$

Zauważmy, że rozwiązanie (2.7) spełnia pierwsze cztery warunki brzegowe (2.6); dalsze cztery przedstawić możemy dzięki podstawieniu (2.7) w postaci

$$(2.10) \quad G_n(0; \xi) = 0, \quad -N G_n''(0; \xi) = \frac{2}{a} \sin a_n \xi, \quad G_n(b; \xi) = 0, \quad G_n''(b; \xi) = 0.$$

Z warunków brzegowych (2.10) wyznaczamy stałe całkowania

$$B_n = -D_n = -\frac{2}{Na} \frac{\sin a_n \xi}{\lambda_n^2 - \varepsilon_n^2}, \quad C_n = B_n \operatorname{ctgh} \varepsilon_n b, \quad A_n = -B_n \operatorname{ctgh} \lambda_n b.$$

Tak więc

$$(2.11) \quad G(x, y; \xi, 0) = \frac{2}{Na} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 - \varepsilon_n^2} (\operatorname{ctgh} \lambda_n b \sinh \lambda_n y - \cosh \lambda_n y - \\ - \operatorname{ctgh} \varepsilon_n b \sinh \varepsilon_n y + \cosh \varepsilon_n y) \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Wyliczamy dalej

$$(2.12) \quad \frac{\partial G(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = \frac{2}{Na} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\operatorname{tgh} \lambda_n b} - \frac{\varepsilon_n}{\operatorname{tgh} \varepsilon_n b} \right) \frac{\sin a_n \xi \sin a_n x}{\lambda_n^2 - \varepsilon_n^2}.$$

Zważywszy, że $\lambda_n^2 - \varepsilon_n^2 = 2 \sqrt{k^2 a_n^2 + c^2}$, a następnie wprowadzając oznaczenia

$$\beta^2 = \frac{a^2 q}{N \pi^2}, \quad \delta^2 = \frac{\mu \omega^2 a^4}{N \pi^4},$$

doprowadzamy związek (2.12) do postaci

$$(2.13) \quad \frac{\partial G(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = K_{x, \xi}(\beta, \delta) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\beta, \delta) \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

gdzie

$$(2.14) \quad Q_n(\beta, \delta) = \frac{1}{N \pi} \frac{1}{\sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}} \left[\frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}}}{\operatorname{tgh} \frac{b \pi}{a} \sqrt{n^2 + \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}}} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{n^2 - \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}}}{\operatorname{tgh} \frac{b \pi}{a} \sqrt{n^2 - \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}}} \right].$$

Funkcja $w_0(x, y)$ powinna spełniać równanie różniczkowe

$$(2.15) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w_0 + q \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \mu \omega^2 w_0 = p$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.16) \quad \begin{cases} w_0(0, y) = 0, & \nabla^2 w_0(0, y) = 0, & w_0(a, y) = 0, & \nabla^2 w_0(a, y) = 0, \\ w_0(x, 0) = 0, & \nabla^2 w_0(x, 0) = 0, & w_0(x, b) = 0, & \nabla^2 w_0(x, b) = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (2.15) przedstawimy w postaci pojedynczego szeregu trygonometrycznego

$$(2.17) \quad w_0(x, y) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n(n^4 - n^2\beta^2 - \delta^2)} (1 + A_n \sinh \lambda_n y + \\ + B_n \cosh \lambda_n y + C_n \sinh \varepsilon_n y + D_n \cosh \varepsilon_n y) \sin a_n x.$$

Rozwiązanie (2.17) spełnia cztery pierwsze warunki brzegowe (2.16); z następnych czterech wyznaczmy stałe A_n, \dots, D_n . Ostatecznie otrzymamy

$$(2.18) \quad w_0(x, y) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n(n^4 - n^2\beta^2 - \delta^2)} \left[1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2 - \varepsilon_n^2} \left(\cosh \varepsilon_n y - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon_n b}{2} \sinh \varepsilon_n y \right) + \frac{\varepsilon_n^2}{\lambda_n^2 - \varepsilon_n^2} \left(\cosh \lambda_n y - \operatorname{tgh} \frac{\lambda_n b}{2} \sinh \lambda_n y \right) \right] \sin a_n x.$$

Stąd

$$\frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} F_n(\beta, \delta) \sin a_n x = F_x(\beta, \delta),$$

$$F_n(\beta, \delta) = \frac{2pa^3}{N\pi^4} \frac{1}{n\sqrt{n^4 - n^2\beta^2 - \delta^2} \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} \left[\sqrt{n^2 + \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} \right. \\ \left. \times \operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 - \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} \operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 + \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} \right].$$

Wracamy do równania całkowego (2.3). Zapisać je możemy w postaci

$$(2.19) \quad \sum_{n=1,3,5}^{\infty} F_n(\beta, \delta) \sin a_n x + \int_0^{c_1} M(\xi) \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\beta, \delta) \sin a_n \xi \sin a_n x \right) d\xi = 0.$$

Rozwiązanie ściśle tego równania całkowego napotyka na duże trudności. Posłużymy się tutaj metodą przybliżoną, zastępując całkę występującą w równaniu (2.19) sumą. Dzielimy krawędź płyty na s jednakowych odcinków, odcinek c_1 na r odcinków Δx :

$$a = s \cdot \Delta x, \quad c_1 = r \cdot \Delta x.$$

Równanie (2.19) doprowadzamy do układu równań liniowych

$$(2.20) \quad F_i(\beta, \delta) + \sum_{j=1}^r M_j K_{ij}(\beta, \delta) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

przy czym

$$F_i(\beta, \delta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_n(\beta, \delta) \sin \frac{n\pi i}{s},$$

$$K_{ij}(\beta, \delta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} Q_n(\beta, \delta) \sin \frac{n\pi i}{s} \sin \frac{n\pi j}{s} \quad \text{dla } i \neq j$$

$$K_{jj}(\beta, \delta) = \frac{2s}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} Q_n(\beta, \delta) \sin \frac{n\pi}{2s} \sin^2 \frac{n\pi j}{s}.$$

Przy ustalonych parametrach β i δ wyliczamy wielkości F_i , K_{ij} i rozwiązujemy układ równań (2.20) względem M_j .

Rozważmy przypadek szczególny, kiedy $c_1 = a$. W tym przypadku rozwiązać możemy równanie (2.19) w sposób ścisły. Przedstawmy $M(\xi)$ w postaci szeregu trygonometrycznego

$$(2.21) \quad M(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{m\pi \xi}{a}.$$

Wstawiając powyższy szereg do równania (2.19) i wykonując przepisane całkowanie otrzymamy

$$\frac{2}{a} F_n(\beta, \delta) + M_n Q_n(\beta, \delta) = 0;$$

stąd

$$(2.22) \quad M(\xi) = -\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(\beta, \delta)}{Q_n(\beta, \delta)} \sin a_n \xi.$$

W przypadku drgań własnych płyty o nieciągłych warunkach brzegowych równanie całkowe (2.19) uprości się do postaci

$$(2.23) \quad \int_0^a M(\xi) \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\beta, \delta) \sin a_n \xi \sin a_n x \right) d\xi = 0.$$

Rozwiązanie przybliżone tego zagadnienia prowadzi do układu równań jednorodnych

$$(2.24) \quad \sum_{j=1}^r M_j K_{ij}(\beta, \delta) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (2.24) daje poszukiwane równanie warunkowe, z którego wyznaczyć można częstotliwość drgań własnych. Warunek ten ma postać

$$(2.25) \quad |K_{ij}(\beta, \delta)| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

Wyznamy podstawow ę częstotliwo ść drga ń w łasnych płyty kwadrato wej, utwierdzonej zupe łnie na odcinku $c_1 = a/2$, a na odcinku c_2 oraz pozosta łych kraw ędziach swobodnie podparte j. Podzielmy kraw ędź $y = 0$ na sze ść cz ęści ($s = 6$). Za łó żmy dalej, że $q = 0$ ($\beta = 0$).

Wyznacznik (2.25) przy jmie postać

$$|K_{ij}(0, \delta)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} D_{ij} Q_n(0, \delta) \sin \frac{n\pi i}{s} \sin \frac{n\pi j}{s} \right| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; s = 6),$$

gdzie

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \neq j, \\ \frac{2s}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2s} & \text{dla } i = j. \end{cases}$$

Drog ą prób uzyskano $\delta_{min} = 2,41$, st ąd $\omega_{min} = (2,41 \pi^2/a^2) \sqrt{N/\mu}$.

Dla utwierdzenia zupe łnego na odcinku $c_1 = a/3$ otrzymano z wyznacznika nast ępuj ący zwi ązek:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} D_{ij} Q_n(0, \delta) \sin \frac{n\pi i}{s} \sin \frac{n\pi j}{s} \right| = 0 \quad (i, j = 1, 2; s = 6).$$

Tak wi ęc przy podziale odcinka c_1 na dwie cz ęści Δx mamy

$$\delta_{min} = 2,35, \quad \omega_{min} = 2,35 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{N}{\mu}}.$$

Wreszcie dla utwierdzenia zupe łnego na odcinku $c_1 = a/6$ otrzymano

$$\delta_{min} = 2,13, \quad \omega_{min} = 2,13 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{N}{\mu}}.$$

Si łę krytyczn ą wyboczenia płyty znajdziemy z warunku

$$|K_{ij}(\beta, 0)| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

Post ępuj ąc podobnie jak w przypadku wyznaczenia częstotliwo ści drga ń w łasnych otrzymano dla

$$\begin{aligned} c_1 = a/2, \quad \beta_{min} = 2,40, \quad q_{kr} &= 5,76 \frac{N\pi^2}{a^2}, \\ c_1 = a/3, \quad \beta_{min} = 2,33, \quad q_{kr} &= 5,43 \frac{N\pi^2}{a^2}, \\ c_1 = a/6, \quad \beta_{min} = 2,12, \quad q_{kr} &= 4,49 \frac{N\pi^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Uzyskane wyniki liczbowe s ą zgodne z wynikami, które otrzyma ł S. Kaliski rozwi ązuj ąc to samo zadanie odmienn ą metod ą, polegaj ącą na sprowadzeniu zagadnienia drga ń i wyboczenia płyty o nieci ąg łych warunkach brzegowych do równania ca łkowego Fredholma drugiego rodzaju, [2], [3].

3. Weźmy pod uwagę płytę prostokątną, która na odcinku c_1 jest utwierdzona zupełnie, na odcinku c_2 swobodna, na pozostałych krawędziach swobodnie podparta. Niech na płytę działa obciążenie $p \sin \omega t$, gdzie $p = \text{const}$.

Obciążenie to wywoła na odcinku c_1 niezany moment

$$m_y(x, 0) \sin \omega t = M(\xi) \sin \omega t$$

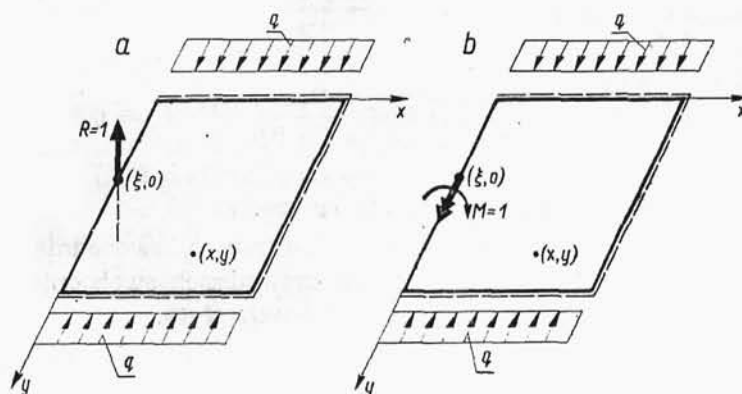
oraz reakcję podporową

$$\bar{q}_y(x, 0) \sin \omega t = R(\xi) \sin \omega t.$$

Przyjmijmy jako układ podstawowy płytę na brzegu $y=0$ swobodną, a na pozostałych brzegach swobodnie podpartą.

Oznaczmy przez $w_0(x, y)$ amplitudę ugięcia wywołaną obciążeniem zewnętrznym, przez $G_1(x, y; \xi, 0)$ i $G_2(x, y; \xi, 0)$ odpowiednie funkcje Greena dla obciążeń $R=1$ i $M=1$ działających w punkcie $(\xi, 0)$ (rys. 5a i 5b). Amplitudę ugięcia płyty o nieciągłych warunkach brzegowych znajdziemy ze związku superpozycyjnego

$$(3.1) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + \int_0^{c_1} R(\xi) G_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \int_0^{c_1} M(\xi) G_2(x, y; \xi, 0) d\xi.$$



Rys. 5

Nieznane funkcje $R(\xi)$ i $M(\xi)$ wyznaczmy wykorzystując warunki brzegowe, występujące na odcinku c_1

$$(3.2) \quad w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0.$$

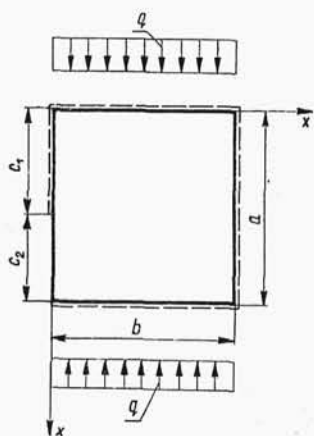
Uzyskamy w ten sposób układ dwu równań całkowych

$$(3.3.1) \quad w_0(x, 0) + \int_0^{c_1} R(\xi) G_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \int_0^{c_1} M(\xi) G_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0,$$

$$(3.3.2) \quad \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + \int_0^{c_1} R(\xi) \frac{\partial G_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi + \int_0^{c_1} M(\xi) \frac{\partial G_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0.$$

Z rozwiązania tego układu równań otrzymamy funkcje $R(\xi)$ i $M(\xi)$. Po wstawieniu ich do równania (3.1) znajdziemy amplitudę ugięcia płyty o nieciągłych warunkach brzegowych.

Rozważyć należy jeszcze wypadki szczególne. Mianowicie w przypadku swobodnego podparcia płyty wzdłuż odcinka c_1 moment utwierdzenia będzie równy zero. Z układu równań (3.3.1) i (3.3.2) pozostaje równanie



Rys. 6

$$(3.4) \quad w_0(x, 0) + \int_0^{c_1} R(\xi) G_1(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0$$

$$(0 \leq x \leq c_1).$$

W przypadku gdy wzdłuż odcinka c_1 jest $R = 0$, ale $M(\xi) \neq 0$, otrzymamy

$$(3.5) \quad \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + \int_0^{c_1} M(\xi) \frac{\partial G_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0 \quad (0 \leq x \leq c_1).$$

Szczegółowiej omówimy dwa proste przypadki.

(1) Dana jest płyta prostokątna na odcinku c_1 swobodnie podparta, na odcinku c_2 swobodna, na pozostałych krawędziach swobodnie podparta. Wyznaczyć należy częstotliwość drgań własnych płyty.

Wyznaczymy ją z równania

$$(3.6) \quad \int_0^{c_1} R(\xi) G_1(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0 \quad (0 \leq x \leq c_1).$$

Funkcja $G_1(x, y; \xi, 0)$ powinna spełnić równanie różniczkowe

$$(3.7) \quad N \nabla^2 \nabla^2 G_1 + q \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} - \mu \omega^2 G_1 = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(3.8) \quad \begin{cases} G_1(0, y; \xi, 0) = 0, & \nabla^2 G_1(0, y; \xi, 0) = 0, & G_1(a, y; \xi, 0) = 0, \\ & & \nabla^2 G_1(a, y; \xi, 0) = 0, \\ \frac{\partial^2 G_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 G_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial x^2} = 0, & G_1(x, b; \xi, 0) = 0, \\ & \nabla^2 G_1(x, b; \xi, 0) = 0, \\ -N \left[\frac{\partial^3 G_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 G_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y \partial x^2} \right] + 1 \cdot \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (3.7) podamy w postaci pojedynczego szeregu trygonometrycznego

$$(3.9) \quad G_1(x, y; \xi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y; \xi) \sin \alpha_n x.$$

Szereg ten spełnia cztery pierwsze warunki brzegowe grupy (3.8) i sprowadza równanie różniczkowe cząstkowe (3.7) do układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$(3.10) \quad \frac{d^4 Y_n}{d y^4} - 2 \alpha_n^2 \frac{d^2 Y_n}{d y^2} + \left(\alpha_n^4 - \frac{q}{N} \alpha_n^2 - \frac{\mu \omega^2}{N} \right) Y_n = 0,$$

rozwiązaniem którego jest

$$(3.11) \quad Y_n = A_n \sinh \lambda_n y + B_n \cosh \lambda_n y + C_n \sinh \varepsilon_n y + D_n \cosh \varepsilon_n y \\ (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Wielkości λ_n oraz ε_n określone są wzorem (2.9.1). Stałe całkowania A_n, \dots, D_n wyznaczamy z czterech dalszych warunków brzegowych grupy (3.8), które ze względu na (3.9) przyjmują postać

$$(3.12) \quad \begin{cases} Y_n''(0; \xi) - \alpha_n^2 \nu Y_n(0; \xi) = 0, & Y_n(b; \xi) = 0, & Y_n''(b; \xi) = 0, \\ -N [Y_n'''(0; \xi) - (2-\nu) \alpha_n^2 Y_n'(0; \xi)] + 1 \cdot \frac{2}{a} \sin \alpha_n \xi = 0. \end{cases}$$

Ostatecznie po prostych przeliczeniach otrzymamy

$$(3.13) \quad G_1(x, y; \xi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y; \xi) \sin \alpha_n x = \frac{2}{aN} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x \times \\ \times [(\varepsilon_n^2 - \alpha_n^2 \nu) \operatorname{tgh} \varepsilon_n b (\operatorname{tgh} \lambda_n b \cosh \lambda_n y - \sinh \lambda_n y) + \\ + (\lambda_n^2 - \alpha_n^2 \nu) \operatorname{tgh} \lambda_n b (\sinh \varepsilon_n y - \operatorname{tgh} \varepsilon_n b \cosh \varepsilon_n y)] \} : \\ : [(\lambda_n^2 - \alpha_n^2 \nu) \varepsilon_n^3 - (2-\nu) \alpha_n^2 \varepsilon_n] \operatorname{tgh} \lambda_n b - (\varepsilon_n^2 - \alpha_n^2 \nu) [\lambda_n^3 - (2-\nu) \alpha_n^2 \lambda_n] \operatorname{tgh} \varepsilon_n b \}.$$

Występującą w równaniu (3.6) funkcję $G_1(x, 0; \xi, 0)$ określa wzór

$$G_1(x, 0; \xi, 0) = K_{x\xi}(\beta, \delta) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\beta, \delta) \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

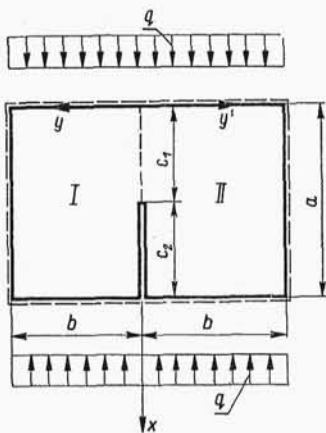
gdzie

$$Q_n(\beta, \delta) = \frac{4a^2}{N\pi^3} \left\{ \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2} \operatorname{tgh} \frac{\pi b}{a} \sqrt{n^2 + \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} \operatorname{tgh} \frac{\pi b}{a} \sqrt{n^2 - \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} : \right. \\ \left. : \left\{ \left| \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2} - (1-\nu)n^2 \right|^2 \sqrt{n^2 + \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} \operatorname{tgh} \frac{\pi b}{a} \sqrt{n^2 - \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left| \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2} + (1-\nu)n^2 \right|^2 \sqrt{n^2 - \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} \operatorname{tgh} \frac{\pi b}{a} \sqrt{n^2 + \sqrt{n^2\beta^2 + \delta^2}} \right\} \right\}.$$

Stosując przybliżony sposób rozwiązywania równania (3.6) zmienimy występującą w nim całkę na sumę

$$(3.14) \quad \sum_{j=1}^r R_j K_{ij}(\beta, \delta) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

W przypadku $c_1 = a/2$, przy $\beta = 0$, jeśli podzielimy odcinek c_1 na 3 części Δx ($r=3$), otrzymamy drogą prób z wyznacznika $|K_{ij}(0, \delta)| = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$):



Rys. 7

$$\delta_{min} = 1,50, \quad \omega_{min} = 1,50 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{N}{\mu}}.$$

Jeżeli w układzie równań (3.14) przyjąć $\omega = 0$ ($\delta = 0$), to przy podziale odcinka c_1 na 3 części Δx otrzymamy

$$\beta_{min} = 1,96, \quad q_{kr} = 3,84 \frac{N\pi^2}{a^2}.$$

(2) Dana jest płyta prostokątna o bokach a i $2b$ z wycięciem o długości c_2 na osi symetrii płyty. Wyznamy najmniejszą częstotliwość drgań swobodnych oraz siłę krytyczną wybożenia płyty. Postać ugięcia płyty będzie w obu przypadkach symetryczna względem osi x ; wzdłuż tej osi znikną siły tnące. Wzdłuż prostej $y=0$, która rozdzieliła płytę na obszary I i II, mamy do czynienia z nieciągłymi warunkami brzegowymi. Układem podstawowym będzie płyta I swobodnie podparta wzdłuż krawędzi $x=0$, $x=a$, $y=b$, a swobodna wzdłuż krawędzi $y=0$. Nieznana funkcja w naszym zadaniu będzie funkcja $M(\xi)$ występująca na odcinku c_1 .

Ugięcia płyty I i II przedstawiają wzory

$$(3.15) \quad \begin{cases} w_I(x, y) = \int_0^{c_1} M(\xi) G_{2, I}(x, y; \xi, 0) d\xi, \\ w_{II}(x, y') = \int_0^{c_1} M(\xi) G_{2, II}(x, y'; \xi, 0) d\xi. \end{cases}$$

Z warunku

$$\left[\frac{\partial w_I}{\partial y} \right]_{y=0} + \left[\frac{\partial w_{II}}{\partial y'} \right]_{y'=0} = 0$$

otrzymamy równanie całkowe

$$(3.16) \quad \int_0^{c_1} M(\xi) \left(\frac{\partial G_{2, I}(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} + \frac{\partial G_{2, II}(x, 0; \xi, 0)}{\partial y'} \right) d\xi = 0$$

albo

$$(3.17) \quad 2 \int_0^{c_1} M(\xi) \frac{\partial G_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0.$$

Funkcja $G_2(x, y; \xi, 0)$ przedstawia tu ugięcie płyty wywołane działaniem momentu skupionego $M=1$ w punkcie $(\xi, 0)$ (rys. 5b). Wyznamy ją z równania różniczkowego

$$(3.18) \quad N \nabla^2 \nabla^2 G_2 + q \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} - \mu \omega^2 G_2 = 0$$

o warunkach brzegowych

$$(3.19) \quad \begin{cases} G_2(0, y; \xi, 0) = 0, & \nabla^2 G_2(0, y; \xi, 0) = 0, & G_2(a, y; \xi, 0) = 0, \\ & & \nabla^2 G_2(a, y; \xi, 0) = 0, \\ -N \left(\frac{\partial^2 G_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 G_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial x^2} \right) + 1 \cdot \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x = 0, \\ G_2(x, b; \xi, 0) = 0, & \nabla^2 G_2(x, b; \xi, 0) = 0, \\ \frac{\partial^3 G_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 G_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y \partial x^2} = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (3.18) różni się od rozwiązania równania (3.7) jedynie warunkami brzegowymi wzdłuż prostej $y=0$. Rozwiązanie równania (3.18) ma postać

$$(3.20) \quad G_2(x, y; \xi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y, \xi) \sin a_n x = \frac{2}{aN} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin a_n \xi \sin a_n x : \right. \\
: [(\lambda_n^2 - a_n^2 r) \varepsilon_n^3 - (2-r) a_n^2 \varepsilon_n] \operatorname{tgh} \lambda_n b - (\varepsilon_n^2 - a_n^2 r) [\lambda_n^3 - (2-r) a_n^2 \lambda_n] \operatorname{tgh} \varepsilon_n b \Big\} \times \\
\times \left\{ [\varepsilon_n^3 - (2-r) a_n^2 \varepsilon_n] (\operatorname{tgh} \lambda_n b \cosh \lambda_n y - \sinh \lambda_n y) + \right. \\
\left. + [\lambda_n^3 - (2-r) a_n^2 \lambda_n] (\sinh \varepsilon_n y - \operatorname{tgh} \varepsilon_n b \cosh \varepsilon_n y) \right\}.$$

Stąd

$$\frac{\partial G_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = K_{x\xi}(\beta, \delta) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\beta, \delta) \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

gdzie

$$(3.21) \quad Q_n(\beta, \delta) = \frac{4}{aN} \sqrt{n^4 - n^2 \beta^2 - \delta^2} \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2} : \\
: \left\{ \left| \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2} - (1-r) n^2 \right|^2 \sqrt{n^2 + \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}} \operatorname{tgh} \frac{\pi b}{a} \sqrt{n^2 - \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}} - \right. \\
\left. - \left| \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2} + (1-r) n^2 \right|^2 \sqrt{n^2 - \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}} \operatorname{tgh} \frac{\pi b}{a} \sqrt{n^2 + \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}} \right\}.$$

Przybliżone rozwiązanie równania całkowego, napiszemy w postaci

$$(3.22) \quad \sum_{j=1}^r M_j K_{ij}(\beta, \delta) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

Podamy dwa przykłady liczbowe. Niech $b = a/2$, $c_1 = a/2$. Podzielmy odcinek c_1 na trzy części ($c_1 = r \Delta x$, $r = 3$), a bok a na 6 części ($a = s \Delta x$, $s = 6$). Wtedy

$$(3.23) \quad \sum_{j=1}^3 M_j K_{ij}(\beta, \delta) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Najniższą częstotliwość drgań płyty nieściskanej znajdziemy drogą prób z wyznacznika układu równań (3.23):

$$(3.24) \quad |K_{ij}(0, \delta)| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Otrzymamy

$$\delta_{min} = 1,64, \quad \omega_{min} = 1,64 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{N}{\mu}}.$$

Siłę krytyczną płyty znajdziemy jako najmniejszy pierwiastek wyznacznika

$$(3.25) \quad |K_{ij}(\beta, 0)| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Otrzymamy

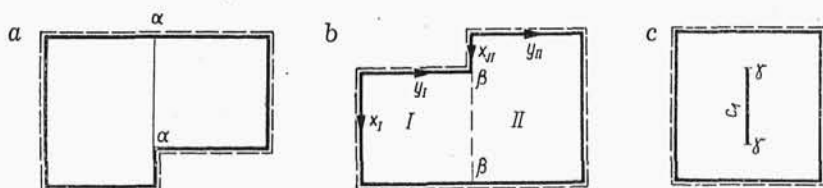
$$\beta_{min} = 1,91, \quad q_{kr} = 3,65 \frac{N \pi^2}{a^2}.$$

Podaliśmy tu rozwiązanie najprostszych i najbardziej typowych przykładów płyt o nieciągłych warunkach brzegowych. Oczywiście, przedstawiony sposób rozwiązania da się rozszerzyć na dalsze, bardziej złożone

przypadki. Na rysunku 8a, 8b i 8c podajemy trzy charakterystyczne przykłady takich układów.

W przypadku płyty ciągłej dwuprzęsłowej (rys. 8a) nieznaną funkcją jest moment zginający $M(\xi)$, występujący na podporze liniowej $\alpha-\alpha$. Równanie całkowe zagadnienia otrzymamy wykorzystując warunek ciągłości płyty nad podporą $\alpha-\alpha$.

W przypadku płyty przedstawionej na rys. 8b najwygodniej będzie podzielić płytę przekrojem $\beta-\beta$ na dwie płyty prostokątne. Wzdłuż prostej $\beta-\beta$ wystąpią dwie nieznane funkcje: moment zginający $M(\xi)$ i siła tnąca $T(\xi)$. Dla ułożenia układu dwu równań całkowych skorzystamy tu z dwu warunków ciągłości ($w_I = w_{II}$, $\partial w_I / \partial y_I = \partial w_{II} / \partial y_{II}$) w przekroju $\beta-\beta$.



Rys. 8

Wreszcie w przypadku płyty prostokątnej z podporą liniową w jej obrębie można jako niewiadomą funkcję przyjąć reakcję podporową $R(\xi)$, występującą wzdłuż odcinka c_1 .

Z warunku zerowej wartości ugięcia wzdłuż odcinka c_1 otrzymamy równanie całkowe zadania, [1].

Dalszą możliwość rozszerzenia zagadnienia otrzymuje się przez uwzględnienie sił podłużnych w obu kierunkach osi współrzędnych. Równanie (1.1) wzbogaci się o składnik $q_2 \partial^2 \bar{w} / \partial y^2$.

W przykładach naszych ograniczyliśmy się do nieciągłych warunków brzegowych w obrębie jednej krawędzi, nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby rozszerzyć zagadnienie na nieciągłe warunki brzegowe na kilku brzegach, analogicznie jak to uczyniono w pracach [4] i [5] autora, dotyczących statyki płyt.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Nowacki, *Drgania własne i wyboczenie płyt prostokątnych podpartych swobodnie na obwodzie i punktowo w obrębie płyty*, Arch. Mech. Stos. 3 (1953).
- [2] S. Kaliski, *Drgania płyt podpartych w przeszle i o nieciągłych warunkach brzegowych*, Biul. Wojsk. Ak. Techn. 2A (1954).
- [3] S. Kaliski, *Stateczność płyt o nieciągłych warunkach brzegowych*, Biul. Wojsk. Ak. Techn. 10 (1954).
- [4] W. Nowacki, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych (I)*, Arch. Mech. Stos. 3-4 (1951).
- [5] W. Nowacki, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych (II)*, Arch. Mech. Stos. 2 (1953).

Резюме

ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С РАЗЛИЧНЫМИ КОНТУРНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Проблема вынужденных колебаний при наличии постоянных сжимающих сил выражена дифференциальным уравнением (1.1). Это уравнение содержит ряд особых случаев. Для $\omega = 0$ имеем проблему одновременного изгиба и сжатия пластинки. Однородное дифференциальное уравнение (1.1) ($p \neq 0$) представляет собой свободные колебания пластинки, а в случае $\omega = 0$ — проблему устойчивости пластинки. В работе рассматриваются простейшие случаи колебаний и устойчивости прямоугольной пластинки с различными контурными условиями.

Во втором пункте рассмотрены вынужденные колебания прямоугольной пластинки с различными контурными условиями на одной стороне пластинки. В так наз. основной системе — пластинке с непрерывными граничными условиями — решаются сперва две вспомогательные задачи: определяется поверхность прогиба $w_0(x, y) \sin \omega t$ для нагрузки $p \sin \omega t$, а затем определяется прогиб $G(x, y; \xi, 0) \sin \omega t$ (функция Грина) пластинки, подвергаемой действию сосредоточенного момента, приложенного в точке $(\xi, 0)$ контура пластинки.

Обозначая через $M(\xi) \sin \omega t$ момент заделки пластинки на отрезке c_1 , получаем для прогиба пластинки с различными контурными условиями интегральную формулу (2.1). Неизвестную функцию момента защемления можно определить по условию $\partial w(x, 0)/\partial y = 0$ на отрезке c_1 . Это условие приводит к интегральному уравнению (2.3) Фредгольма первого рода. В случае свободных колебаний или потери устойчивости пластинки, уравнение (2.3) упрощается до вида (2.4). Это уравнение решается приближенным способом, заменяя интеграл суммой и преобразования интегральное уравнение в систему линейных уравнений. Если приравнять к нулю детерминант этой системы однородных уравнений, то получается уравнение для собственных колебаний или устойчивости пластинки. Корни этого уравнения определяются при помощи пробных вычислений. Для квадратной пластинки, защемленной на отрезке $c_1 = a/2, a/3, a/6$, получаются следующие частоты колебаний (при $q=0$): $\omega_1 = 2,41 \pi^2/a^2 \sqrt{N/\mu}$, $\omega_2 = 2,35 \pi^2/a^2 \sqrt{N/\mu}$, $\omega_3 = 2,13 \pi^2/a^2 \sqrt{N/\mu}$.

Для критической нагрузки получается аналогично (при $\omega = 0$) $q_{kr} = 5,76; 5,43; 4,19 N \pi^2/a^2$.

В третьем пункте работы рассматривается пластинка, защемленная на отрезке c_1 и свободная на отрезке c_2 , на остальных же сторонах свободно опертая. Прогиб пластинки определен интегральной зависимостью (3.1), в которой $M(\xi)$ обозначает момент заделки и $R(\xi)$ —

реакцию опоры на отрезке c_1 . В основной системе — свободная пластинка на стороне $y = 0$, на остальных сторонах свободно подпертая — определяются последовательно прогиб $w_0(x, y)$, обусловленный нагрузкой p , затем прогибы $G_1(x, y; \xi, 0)$ и $G_2(x, y; \xi, 0)$, обусловленные состояниями $R=1$ и $M=1$, действующими в точке $(\xi, 0)$ стороны $y=0$. Из контурных условий на отрезке c_1 получается система интегральных уравнений (3.3.1) и (3.3.2). Подробно рассматриваются два случая: пластинки свободно подпертой на отрезке c_1 и свободной на отрезке c_2 , а также случай пластинки со щелью на оси симметрии.

Представленный способ решения можно распространить на более сложные системы, из которых три — в качестве примера — представлены на рис. 8а - 8с.

S u m m a r y

SOME PROBLEMS OF DYNAMICS AND STABILITY OF A RECTANGULAR PLATE WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS

The problem of forced vibrations of a plate subjected to constant compressive forces is described by the differential equation (1.1). This equation comprises a series of particular cases. For $\omega = 0$ it represents simultaneous bending and compression of the plate. The homogeneous differential equation (1.1) ($p = 0$) expresses the problem of free vibrations of the plate and, for $\omega = 0$, that of buckling of the plate.

In this paper the most simple cases of vibration and stability of a rectangular plate with discontinuous boundary conditions are considered.

In Sec. 2 forced vibrations of a rectangular plate with discontinuous boundary conditions on one edge are considered. Two auxiliary problems are first solved in the so called basic system consisting of a plate with continuous boundary conditions. These are: the surface of deflection $w_0(x, y) \sin \omega t$ for the load $p \sin \omega t$ and the deflection $G(x, y; \xi, 0) \sin \omega t$ (Green's function) of the plate subjected to a concentrated moment at the point $(\xi, 0)$ of the edge.

Denoting by $M(\xi) \sin \omega t$ the moment at the built-in edge segment c_1 , an integral formula is obtained for the deflection of a plate with discontinuous boundary conditions. The unknown function of the moment at the built-in edge segment can be found from the condition $\partial w(x, 0)/\partial y = 0$ for the segment c_1 . This condition leads to Fredholm's integral equation of the first kind, (2.3). In the case of free vibrations or buckling of the plate this equation is reduced to the form (2.4). This equation is solved in an approximate manner by replacing the integral by a sum, thus obtaining a system of linear equations instead of one integral equation. Taking the determinant of this system of homogeneous equations as being

equal to zero, we obtain conditions for free vibrations or buckling. The roots of this equation are determined by the trial and error method. For a square plate with clamped edge segment $c_1 = a/2, a/3, a/6$ the following frequencies of free vibrations (for $q = 0$) are obtained $\omega_1 = 2,41 \pi^2/a^2 \sqrt{N/\mu}$; $\omega_2 = 2,35 \pi^2/a^2 \sqrt{N/\mu}$; $\omega_3 = 2,13 \pi^2/a^2 \sqrt{N/\mu}$. For the buckling of the plate we have in a similar manner (for $\omega = 0$), $q_{kr} = 5,76; 5,43; 4,19 N \pi^2/a^2$.

In Sec. 3 a plate with clamped edge segment c_1 is considered: the edge segment c_2 remains free, the rest of the periphery being simply supported. The deflection of the plate is determined by the integral relation (3.1), where $M(\xi)$ denotes the moment and $R(\xi)$ the reaction at the edge segment c_1 .

In the basic system, in other words for a plate with the edge $y = 0$ remaining free, the other edges being simply supported, the following quantities are found: the deflection $w_0(x, y)$ caused by the load p , the deflections $G_1(x, y; \xi, 0)$ and $G_2(x, y; \xi, 0)$ caused by the states $R = 1$, $M = 1$ at the point $(\xi, 0)$ of the edge $y = 0$. From the boundary conditions for the edge segment c_1 a system of integral equations (3.3.1) and (3.3.2) is obtained. Two cases are discussed in detail. The first is that of a plate simply supported along the edge segment c_1 and free along the edge segment c_2 , the second concerns a plate with a slit coinciding with the axis of symmetry.

The method of solution described above can be generalized to more complex systems, three examples of which are represented in Figs. 8a-8c.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 marca 1955 r.