

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER MICHAŁ BROSZKO

WACŁAW OLSZAK BOHDAN STEFANOWSKI

STANISŁAW TURSKI WITOLD WIERZBICKI

JERZY NOWIŃSKI - SEKRETARZ NAUKOWY

T O M V

CZERWIEC 1953

ZESZYT 2

W A R S Z A W A

PŁYTY PROSTOKĄTNE O MIESZANYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH (II)

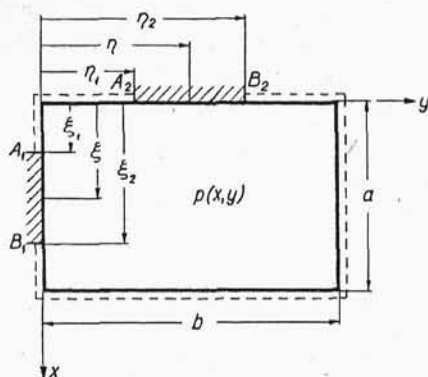
WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Praca przedstawiona na zebraniu naukowym Wydziału IV PAN
w dniu 16 września 1952 r.

W pierwszej części pracy pod powyższym tytułem podano rozwiązanie zagadnienia płyty prostokątnej o mieszanych warunkach brzegowych na jednym lub dwu jej przeciwległych brzegach. Obecnie rozszerzymy rozwiązanie na przypadki, w których mieszane warunki brzegowe występują na brzegach nieprzeciwległych oraz podamy rozwiązania dla typów mieszanych warunków brzegowych, nie omówionych w pierwszej części pracy¹⁾.

1. Rozważmy przypadek, w którym odcinki brzegu płyty swobodnie podparte i utwierdzone zupełnie następować mogą w dowolnej kolejności. Sposób postępowania w tych przypadkach objaśnimy na przykładzie najprostszym, mianowicie na płycie prostokątnej o mieszanych warunkach brzegowych na dwu przyległych krawędziach płyty (rys. 1).

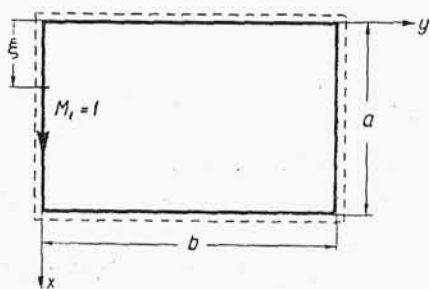
Niech płyta będzie utwierdzona zupełnie na odcinkach $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$, a na pozostałych swobodnie podparta. Oznaczmy przez $w_0(x, y)$ ugięcie płyty dookoła swobodnie podpartej, poddanej działaniu obciążenia zewnętrznego $p(x, y)$, działającego prostopadłe do płaszczyzny płyty. Oznaczmy dalej przez $w_1(x, y; \xi, 0)$ powierzchnię ugięcia płyty dookoła swobodnie podpartej, wywołaną działaniem momentu skupionego



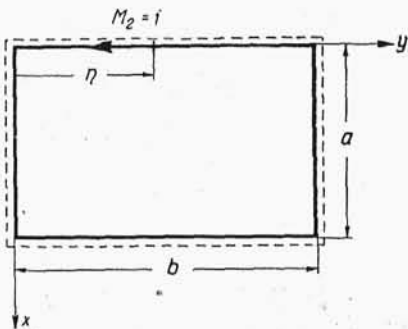
Rys. 1

¹⁾ [1].

$M_1 = 1$ o wektorze zaczepionym w punkcie $(\xi, 0)$ i zwróconym w kierunku osi x (rys. 2), a przez $w_2(x, y; 0, \eta)$ powierzchnię ugięcia płyty dookoła swobodnie podpartej, wywołaną momentem $M_2 = 1$, działającym na osi y w punkcie $(0, \eta)$ (rys. 3).



Rys. 2



Rys. 3

Powierzchnię ugięcia płyty, poddanej działaniu obciążenia $p(x, y)$ oraz utwierdzonej zupełnie na odcinkach $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$, a na pozostałych odcinkach swobodnie podpartej (rys. 1), wyrazić można na podstawie zasady superpozycji następującym związkiem całkowym:

$$(1.1) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M_1(\xi) w_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta_2} M_2(\eta) w_2(x, y; 0, \eta) d\eta.$$

Tutaj $M_1(\xi)$ i $M_2(\eta)$ oznaczają nieznane na razie funkcje momentów zginających: momentu $[m_y]_{y=0} = M_1(\xi)$ na odcinku $\xi_2 - \xi_1$, oraz momentu $[m_x]_{x=0} = M_2(\eta)$ na odcinku $\eta_2 - \eta_1$.

Te nieznane funkcje, wyrażające przebieg momentów zginających utwierdzenia płyty, wyznaczmy z dwóch warunków brzegowych, stwierdzających istnienie zerowych wartości pochodnych $[\partial w / \partial y]_{y=0}$ oraz $[\partial w / \partial x]_{x=0}$ na odcinkach utwierdzenia płyty.

Uwzględniając związek (1.1) otrzymamy

$$(1.2.1) \quad \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M_1(\xi) \frac{\partial w_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta_2} M_2(\eta) \frac{\partial w_2(x, 0; 0, \eta)}{\partial y} d\eta = 0,$$

$$(1.2.2) \quad \frac{\partial w_0(0, y)}{\partial x} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M_1(\xi) \frac{\partial w_1(0, y; \xi, 0)}{\partial x} d\xi + \\ + \int_{\eta_1}^{\eta_2} M_2(\eta) \frac{\partial w_2(0, y; 0, \eta)}{\partial x} d\eta = 0 \\ (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2).$$

Równania (1.2) możemy napisać w postaci

$$(1.3) \quad \begin{cases} f_1(x) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M_1(\xi) K_{11}(x, \xi) d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta_2} M_2(\eta) K_{12}(x, \eta) d\eta = 0, \\ f_2(y) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M_1(\xi) K_{21}(y, \xi) d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta_2} M_2(\eta) K_{22}(y, \eta) d\eta = 0. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ dwóch równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju o jądrach symetrycznych. Zauważmy ponadto, że w myśl twierdzenia Maxwella o wzajemności przesunięć powinno być $K_{21} = K_{12}$.

Rozwiązanie powyższego układu równań określi funkcje $M_1(\xi)$ i $M_2(\eta)$. Znajomość tych funkcji pozwala na podstawie wzoru (1.1) wyznaczyć ugięcie płyty, a w konsekwencji i wszelkie wielkości statyczne (momenty zginające, momenty skręcające i siły tnące), które, jak wiadomo, są funkcjami określonej kombinacji pochodnych ugięcia $w(x, y)$.

Funkcje w_0, w_1 i w_2 występujące w równaniu (1.1) nie trudno skonstruować dla naszego przypadku płyty dookoła swobodnie podpartej.

Przy założeniu obciążenia p jednostajnie rozłożonego na całym obszarze płyty mamy ²⁾

$$(1.4) \quad w_0(x, y) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[1 - \cosh a_n y + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\lambda_n}{2 \sinh \lambda_n} \right) \operatorname{tgh} \frac{\lambda_n}{2} \sinh a_n y + \frac{1}{2} a_n y (\sinh a_n y - \right. \\ \left. - \operatorname{tgh} \frac{\lambda_n}{2} \cosh a_n y) \right] \sin a_n x,$$

²⁾ [2], str. 180.

gdzie

$$a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \lambda_n = a_n b.$$

Stan $M_1 = 1$ daje

$$(1.5) \quad w_1(x, y, \xi, 0) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi}{a_n^2 \sinh \lambda_n} \left[a_n y \cosh a_n (b - y) - \lambda_n \frac{\sinh a_n y}{\sinh \lambda_n} \right] \sin a_n x,$$

a stan $M_2 = 1$ daje

$$(1.6) \quad w_2(x, y, 0, \eta) = \frac{1}{Nb} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta}{\beta_m^2 \sinh \gamma_m} \left[\beta_m x \cosh \beta_m (a - x) - \gamma_m \frac{\sinh \beta_m x}{\sinh \gamma_m} \right] \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \gamma_m = \beta_m a.$$

W powyższych wzorach przyjęto następujące oznaczenia:

$$N = \frac{1 \cdot h^3 E}{12(1 - \nu^2)} = \text{sztywność płyty na zginanie},$$

h = grubość płyty,

E = moduł sprężystości Younga,

ν = odwrotność liczby Poissona.

Bez trudu wyznaczymy już interesujące nas w równaniach (1.3) funkcje:

$$(1.7.1) \quad f_1(x) = \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} = \frac{2pa^3}{N\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(\operatorname{tgh} \frac{\lambda_n}{2} - \frac{\frac{\lambda_n}{2}}{\cosh^2 \frac{\lambda_n}{2}} \right) \sin a_n x,$$

$$(1.7.2) \quad f_2(x) = \frac{\partial w_0(0, y)}{\partial y} = \frac{2pb^3}{N\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(\operatorname{tgh} \frac{\gamma_m}{2} - \frac{\frac{\gamma_m}{2}}{\cosh^2 \frac{\gamma_m}{2}} \right) \sin \beta_m y,$$

$$(1.7.3) \quad K_{11}(x, \xi) = \frac{1}{N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\operatorname{ctgh} \lambda_n - \frac{\lambda_n}{\sinh^2 \lambda_n} \right) \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

$$(1.7.4) \quad K_{22}(y, \eta) = \frac{1}{N\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\operatorname{ctgh} \gamma_m - \frac{\gamma_m}{\sinh^2 \gamma_m} \right) \sin \beta_m \eta \sin \beta_m y,$$

$$(1.7.5) \quad K_{12}(x, \eta) = \frac{1}{N\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{m \sinh \gamma_m} \left(\beta_m x \cosh \beta_m (a-x) - \right. \\ \left. - \gamma_m \frac{\sinh \beta_m x}{\sinh \gamma_m} \right) \sin \beta_m \eta = \frac{4}{N\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta \sin \alpha_n x}{m n \left(\frac{n b}{m a} + \frac{m a}{n b} \right)^2},$$

$$(1.7.6) \quad K_{21}(y, \xi) = \frac{4}{N\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \beta_m y \sin \alpha_n \xi}{m n \left(\frac{n b}{m a} + \frac{m a}{n b} \right)^2}.$$

W jądrach $K_{11}(x, \xi)$ i $K_{22}(y, \eta)$ zawarty jest człon osobliwy, który dla $x = \xi$ lub $y = \eta$ staje się nieciągły jak logarytm. Będzie rzeczą korzystną rozbić jądra na dwa człony

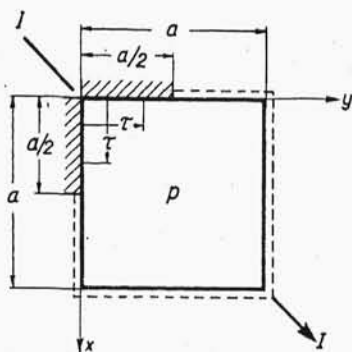
$$(1.8.1) \quad N\pi K_{11}(x, \xi) = -\frac{1}{4} \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x + \xi)} + \\ + \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n} \sinh \lambda_n - \lambda_n}{n \sinh^2 \lambda_n} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x$$

oraz

$$(1.8.2) \quad N\pi K_{22}(y, \eta) = -\frac{1}{4} \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(y - \eta)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(y + \eta)} + \\ + \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_m} \sinh \gamma_m - \gamma_m}{m \sinh^2 \gamma_m} \sin \beta_m \eta \sin \beta_m y.$$

Pierwszy, logarytmiczny, człon jądra $K_{11}(x, \xi)$ nie zależy od długości boku b płyty; stanowi on jądro półpasma płytowego. Drugi człon wyraża wpływ podparcia płyty wzdłuż prostej $y = b$. Człon ten wyrażony jest szeregiem szybkozbieżnym i to tym bardziej, im więk-

szą jest wartość b . Przedstawia on funkcję regularną. Podobnie w jądrze $K_{22}(y, \eta)$ pierwszy człon jest jądrem półpasma płytowego o szerokości b , drugi człon uwzględnia wpływ podparcia płyty wzdłuż prostej $x = a$.

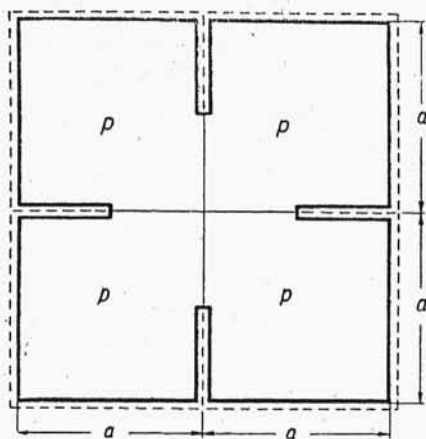


Rys. 4

Znajomość jądra oraz funkcji $f_1(x)$ i $f_2(y)$ pozwala na przystąpienie do rozwiązania układu równań całkowych (1.3). Ze względu na nader skomplikowaną postać jądra natrafimy tu na znaczne trudności w rozwiązaniu tego układu równań w sposób ścisły.

Zajmijmy się przypadkiem szczególnym: płytą kwadratową ($a=b$) poddaną działaniu jednostajnie rozłożonego obciążenia na całym obszarze płyty. Założmy utwierdzenie zupełne na połowie przyległych boków (rys. 4).

Przypadek ten można również potraktować jako układ czterech płyt podpartych z czterema wycięciami (rys. 5).



Rys. 5

Ze względu na symetrię układu i obciążenia względem przekątnej $I-I$ funkcje $M_1(\xi)$ i $M_2(\eta)$ będą identyczne. Skorzystamy zatem z jednego tylko równania całkowego (1.3) dla wyznaczenia tych funkcji.

Mamy tu

$$(1.9) \quad f_1(x) + \int_0^{a/2} M_1(\tau) [K_{11}(x, \tau) + K_{12}(x, \tau)] d\tau = 0$$

albo po podstawieniu znanych funkcji $f_1(x)$, K_{11} i K_{12}

$$(1.10) \quad \frac{2 p a^3}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(\operatorname{tgh} \frac{\varrho_n}{2} - \frac{\frac{\varrho_n}{2}}{\cosh^2 \frac{\varrho_n}{2}} \right) \sin a_n x +$$

$$+ \int_0^{a/2} M_1(\tau) \left\{ \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\operatorname{ctgh} \varrho_n - \frac{\varrho_n}{\sinh^2 \varrho_n} \right) \sin a_n \tau + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_m \tau}{m n \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \right)^2} \right] \sin a_n x \right\} d\tau = 0,$$

gdzie

$$\varrho_n = n\pi, \quad a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad a_m = \frac{m\pi}{a}.$$

Powyższe równanie całkowe rozwiązać można w sposób przybliżony, zastępując całkę sumą i sprowadzając równanie całkowe do układu równań liniowych niejednorodnych.

Rozważmy jeszcze przypadek graniczny, przypadek zupełnego utwierdzenia sąsiadujących boków. Wtedy równanie (1.10) przyjmie postać

$$(1.11) \quad \int_0^a M(\tau) \left\{ \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\operatorname{ctgh} \varrho_n - \frac{\varrho_n}{\sinh^2 \varrho_n} \right) \sin a_n \tau + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_m \tau}{m n \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \right)^2} \right] \sin a_n x \right\} d\tau =$$

$$= - \frac{2 p a^3}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(\operatorname{tgh} \frac{\varrho_n}{2} - \frac{\frac{\varrho_n}{2}}{\cosh^2 \frac{\varrho_n}{2}} \right) \sin a_n x.$$

Z porównania szeregów stojących po lewej i prawej stronie równania (1.12) wynika, że dla liczb nieparzystych

$$\begin{aligned}
 (1.12) \quad \int_0^a M(\tau) \left[\sin a_n \tau + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_m \tau}{m \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \right)^2} \right] d\tau = \\
 = -\frac{2 p a^3}{\pi^3 n^3} \frac{\operatorname{tgh} \frac{\varrho_n}{2} - \frac{\frac{\varrho_n}{2}}{\cosh^2 \frac{\varrho_n}{2}}}{\operatorname{ctgh} \varrho_n - \frac{\varrho_n}{\sinh^2 \varrho_n}} \quad (n=1, 3, 5, \dots)
 \end{aligned}$$

oraz że dla liczb parzystych wyrażenie powyższe znika.

Ponieważ w rozważonym przypadku wykres momentów utwierdzenia będzie funkcją ciągłą na całej długości utwierdzenia, a w narożach wartości momentów będą równe zeru, wyrazić możemy $M(\tau)$ szeregiem trygonometrycznym

$$(1.13) \quad M(\tau) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} M_n \sin a_n x.$$

Po wstawieniu powyższego wyrażenia do równania (1.12) i wykonaniu przepisane całkowania znajdziemy

$$\begin{aligned}
 (1.14) \quad M_n + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{M_m}{m \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \right)^2} = \\
 = -\frac{4 p a^3}{\pi^3 n^3} \frac{\operatorname{tgh} \frac{\varrho_n}{2} - \frac{\frac{\varrho_n}{2}}{\cosh^2 \frac{\varrho_n}{2}}}{\operatorname{ctgh} \varrho_n - \frac{\varrho_n}{\sinh^2 \varrho_n}} \quad (n=1, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy nieskończony układ równań niejednorodnych o nieskończonej liczbie niewiadomych M_n .

Do równania (1.14) dojść można również drogą bezpośredniego całkowania równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty [np. drogą, jaką podaje S. Timoszenko w swej teorii płyt³⁾].

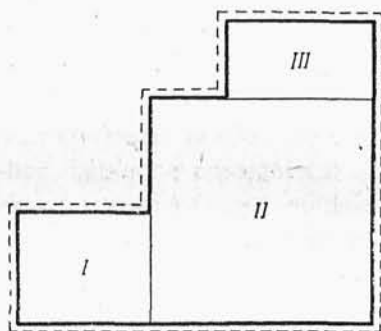
Uzyskanie związku (1.14) jako granicznego przypadku ogólniejszego zadania wskazuje na prawidłowość przedstawionej metody.

³⁾ [3], str. 222.

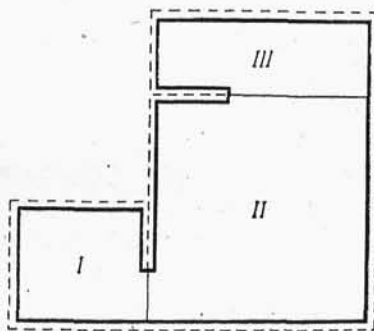
Obszernie omówione rozwiązanie płyty prostokątnej o mieszanych warunkach brzegowych według rys. 1 można, oczywiście, rozszerzać na przypadki utwierdzenia zupełnego lub sprężystego na więcej niż dwu odcinkach konturu płyty.

Dla utwierdzenia płyty wzdłuż k odcinków otrzymamy układ k równań całkowych Fredholma o k niewiadomych funkcjach momentów utwierdzenia.

Przedstawioną powyżej metodę można z powodzeniem zastosować do płyt ciągłych. Dwa typowe przykłady tego rodzaju płyt podajemy na rys. 6 i 7.



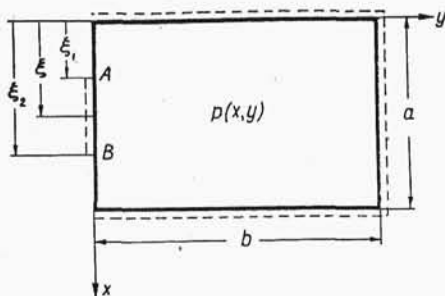
Rys. 6



Rys. 7

2. Rozważmy teraz przypadek, w którym płyta jest swobodnie podparta na trzech swych krawędziach, a na ostatniej jest w części swobodnie podparta, w części swobodna (rys. 8).

Oznaczmy przez $R(\xi)$ nieznaną funkcję oporu na odcinku AB . Oznaczmy następnie przez $w_0(x, y)$ powierzchnię ugięcia, wywołaną obciążeniem $p(x, y)$ działającym na układ podstawowy, tj. płytę na trzech krawędziach swobodnie podpartą, a na czwartej (krawędź $y=0$) swobodną. Niech $w_1(x, y; \xi, 0)$ oznacza powierzchnię ugięcia płyty w układzie podstawowym, wywołaną działaniem siły skupionej $R=1$, działającej w odległości ξ od osi y na swobodnej krawędzi płyty.



Rys. 8

Łączne ugięcie płyty, wywołane obciążeniem nieznaną funkcją oporu $R(\xi)$ oraz obciążeniem $p(x, y)$, przedstawia związek

$$(2.1) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) w_1(x, y; \xi, 0) d\xi.$$

Wielkość $R(\xi)$ wyznaczymy z warunku zerowej wartości ugięcia na odcinku AB :

$$(2.2) \quad w_0(x, 0) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) w_1(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0 \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2).$$

Jeśliby płytę utwierdzić zupełnie wzdłuż odcinka AB , to do nieznannej funkcji reakcji dojdzie nieznaną funkcją momentów utwierdzenia $M(\xi)$.

Oznaczmy przez $w_2(x, y; \xi, 0)$ powierzchnię ugięcia, spowodowaną działaniem momentu skupionego $M=1$, działającego na układ podstawowy w punkcie $(\xi, 0)$, przy czym wektor tego momentu zwrócony jest w kierunku dodatnim osi współrzędnych.

Zamiast równania (2.1) mamy równanie

$$(2.3) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) w_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \\ + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M(\xi) w_2(x, y; \xi, 0) d\xi.$$

Na odcinku AB powinno być nie tylko ugięcie, ale i nachylenie $\partial w(x, 0)/\partial y$ równe zero.

Te dwa warunki brzegowe przyjmują następującą postać:

$$(2.4) \quad w_0(x, 0) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) w_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M(\xi) w_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0, \\ \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) \frac{\partial w_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M(\xi) \frac{\partial w_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0 \\ (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2).$$

Rozwiązanie tego układu równań całkowych względem $M(\xi)$ i $R(\xi)$ pozwoli na wyznaczenie powierzchni ugięcia płyty ze wzoru (2.3).

Wyznamy funkcje $w_1(x, y; \xi, 0)$ oraz $w_2(x, y; \xi, 0)$.

Powierzchnię $w_1(x, y; \xi, 0)$ napiszemy w postaci

$$w_1(x, y; \xi, 0) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Y_n(y) \sin a_n x,$$

gdzie

$$(2.5) \quad Y_n(y) = \frac{1}{a_n^2} (A_n \cosh a_n y + B_n \sinh a_n y + \\ + a_n y C_n \cosh a_n y + a_n y D_n \sinh a_n y).$$

Dla stanu $R = 1$ stoją do dyspozycji następujące warunki brzegowe:

- (1) $Y_n''(0) - a_n^2 \nu Y_n(0) = 0,$
- (2) $-N [Y_n'''(0) - (2 - \nu) a_n^2 Y_n'(0)] + \frac{2R}{a} \sin a_n \xi = 0,$
- (3) $Y_n(b) = 0,$
- (4) $Y_n''(b) = 0.$

Z warunków tych wyznaczmy stałe całkowania

$$A_n = C \frac{\sinh^2 \lambda_n}{(1 - \nu) [(3 + \nu) \sinh \lambda_n \cosh \lambda_n + \lambda_n (1 - \nu)]},$$

$$B_n = -\frac{C}{2(1 - \nu)} + \frac{A_n}{2} (1 + \nu) \operatorname{ctgh} \lambda_n,$$

$$C_n = \frac{A_n}{2} (1 - \nu) \operatorname{ctgh} \lambda_n,$$

$$D_n = -\frac{A_n}{2} (1 - \nu).$$

Tutaj oznaczamy

$$C = \frac{2}{N \pi n} \sin a_n \xi.$$

Bez trudu wyznaczamy następujące funkcje:

$$(2.6) \quad w_1(x, 0; \xi, 0) = \\ = \frac{4a^2}{N \pi^3 (1 - \nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{\sinh^3 \lambda_n \sin a_n \xi \sin a_n x}{[(3 + \nu) \sinh \lambda_n \cosh \lambda_n + \lambda_n (1 - \nu)]},$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial w_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = \\ = -\frac{2a}{N \pi^3 (1 - \nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(1 + \nu) \sinh 2 \lambda_n + 2(1 - \nu) \lambda_n}{(3 + \nu) \sinh 2 \lambda_n + 2 \lambda_n (1 - \nu)} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Dla $b \rightarrow \infty$, a więc dla półpasma płytowego, mamy

$$(2.8.1) \quad \begin{cases} A_n = C \frac{1}{(1-\nu)(3+\nu)} = -B_n, \\ C_n = -D_n = A_n \frac{1-\nu}{2}, \end{cases}$$

$$(2.8.2) \quad \begin{cases} w_1(x, 0; \xi, 0) = \frac{4}{Na(1-\nu)(3+\nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n^3} \sin a_n \xi \sin a_n x, \\ \frac{\partial w_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = -\frac{2(1+\nu)}{Na(1-\nu)(3+\nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} \sin a_n \xi \sin a_n x. \end{cases}$$

Dla stanu $M=1$ stoją do dyspozycji następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} (1) \quad & -N[Y_n''(0) - a_n^2 \nu Y_n'(0)] + \frac{2}{a} \sin a_n \xi = 0, \\ (2) \quad & Y_n'''(0) - (2-\nu)a_n^2 Y_n'(0) = 0, \\ (3) \quad & Y_n(b) = 0, \\ (4) \quad & Y_n''(b) = 0. \end{aligned}$$

Z tych warunków wyznaczymy

$$(2.9) \quad \begin{cases} D_n = -A \frac{\sinh 2\lambda_n}{(3+\nu) \sinh 2\lambda_n + \lambda_n(1-\nu)}, \\ C_n = -D_n \operatorname{ctgh} \lambda_n, \\ B_n = -D_n \frac{1+\nu}{1-\nu} \operatorname{ctgh} \lambda_n, \\ A_n = -D_n \frac{2}{1-\nu} - \frac{A}{1-\nu}, \\ A = \frac{2}{Na} \sin a_n \xi. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{aligned} (2.10) \quad & \frac{\partial w_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = \\ & = \frac{8}{Na(1-\nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n} \frac{\cosh^2 \lambda_n}{(3+\nu) \sinh 2\lambda_n + (1-\nu)\lambda_n} \sin a_n \xi \sin a_n x, \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad w_2(x, 0; \xi, 0) = \\ = -\frac{2}{Na(1-\nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} \frac{(1+\nu) \sinh 2\lambda_n + (1-\nu) \lambda_n}{(3+\nu) \sinh 2\lambda_n + (1-\nu) \lambda_n} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Dla $b \rightarrow \infty$, a więc dla półpasma płytowego, otrzymamy

$$A_n = -D_n \frac{2}{1-\nu} - \frac{A}{1-\nu}, \quad B_n = -\frac{1+\nu}{1-\nu} D_n, \quad C_n = -D_n, \\ D_n = -A \frac{1}{3+\nu}, \quad A = \frac{2}{Na} \sin a_n \xi.$$

Stąd

$$(2.12) \quad w_2(x, 0; \xi, 0) = -\frac{2}{Na(1-\nu)(3+\nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

$$(2.13) \quad \frac{\partial w_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = \frac{4}{Na(1-\nu)(3+\nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Zauważmy jeszcze, że szereg (2.13) daje się zastąpić wzorem zamkniętym

$$(2.14) \quad \frac{\partial w_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = -\frac{1}{Na(1-\nu)(3+\nu)} \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x + \xi)}.$$

Dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na całym obszarze płyty powierzchnię ugięcia przedstawimy w postaci

$$(2.15) \quad w_0 = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[1 + \frac{1}{a_n^2} (A_n \cosh a_n y + \right. \\ \left. + B_n \sinh a_n y + a_n y C_n \cosh a_n y + a_n y D_n \sinh a_n y) \right] \sin a_n x.$$

Stałe A_n, \dots, D_n wyznaczmy z następujących warunków brzegowych:

- (1) $Y'''(0) - (2-\nu) a_n^2 Y'(0) = 0,$
- (2) $Y''(0) - \nu a_n^2 Y(0) = 0,$
- (3) $Y(b) = 0,$
- (4) $Y''(b) = 0.$

Otrzymamy:

$$(2.16) \quad \begin{cases} A_n = \frac{\alpha_n^2 \nu}{1-\nu} \frac{\sinh 2\lambda_n(1+\nu) + 2\lambda_n(1-\nu)}{\sinh 2\lambda_n(3+\nu) + 2\lambda_n(1-\nu)}, \\ B_n = C_n \frac{1+\nu}{1-\nu}, \\ C_n = -\frac{2\nu\alpha_n^2 \cosh^2 \lambda_n}{(3+\nu)\sinh 2\lambda_n + 2\lambda_n(1-\nu)}, \\ D_n = -C_n \tanh \lambda_n. \end{cases}$$

Stąd

$$(2.17) \quad \begin{cases} w_0(x, 0) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \times \\ \quad \times \left[1 + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{(1+\nu)\sinh 2\lambda_n + (1-\nu)2\lambda_n}{(3+\nu)\sinh 2\lambda_n + (1-\nu)2\lambda_n} \right] \sin a_n x, \\ \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} = \\ = -\frac{16pa^3}{N\pi^4} \frac{\nu}{1-\nu} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{\cosh^2 \lambda_n}{(3+\nu)\sinh 2\lambda_n + 2(1-\nu)\lambda_n} \sin a_n x. \end{cases}$$

Dla $b \rightarrow \infty$, a więc dla półpasma płytowego, otrzymamy

$$(2.18) \quad w_0(x, y) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[1 + \frac{\nu}{3+\nu} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} - a_n y \right) e^{-a_n y} \right] \sin a_n x,$$

$$(2.19) \quad w_0(x, 0) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \frac{3-\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin a_n x,$$

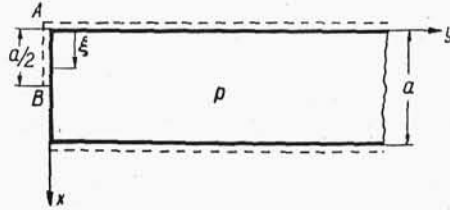
$$(2.20) \quad \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} = -\frac{8pa^3\nu}{N\pi^4(1-\nu)(3+\nu)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin a_n x.$$

W ten sposób wszystkie wielkości wchodzące w skład równań (2.5) zostały wyznaczone. Rozważaliśmy, co prawda, przypadek jednostajnego obciążenia płyty, uwzględnienie jednak zmienności obciążenia nie nastęrcza większych trudności. Łatwo też spostrzec można, że rozwiązanie zadania nie natrafi na trudności w przypadku zupełnego utwierdzenia płyty wzdłuż prostej $y=b$. W tym bowiem przypadku

należy przy wyznaczeniu funkcji w_0, w_1 i w_2 jako czwarty warunek przyjąć $Y'(b) = 0$ zamiast $Y''(b) = 0$.

Rozważmy teraz kilka przypadków szczególnych.

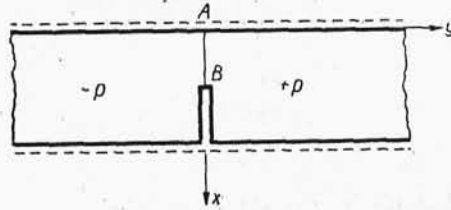
2.1. Dane półpasmo płytowe obciążone jest w sposób jednostajny na swym obszarze (rys. 9). Przeciwległe boki $x=0$ i $x=a$ są swobodnie podparte; połowa boku $y=0$ jest swobodnie podparta, połowa swobodna. Przypadek ten możemy traktować



Rys. 9

jako obciążenie pasma płytowego nieskończenie długiego z wycięciem wzdłuż osi x , obciążonego dla $x > 0$ obciążeniem $+p$, dla $x < 0$ obciążeniem $-p$. Nieznaną funkcję reakcji podporowej $R(\xi)$ znajdziemy z równania

$$(2.1.1) \quad w_0(x, 0) + \int_0^{a/2} R(\xi) w_1(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0.$$



Rys. 10

W naszym przypadku mamy

$$(2.1.2) \quad \frac{4}{Na(3+\nu)(1-\nu)} \int_0^{a/2} R(\xi) \left(\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x \right) d\xi + \\ + \frac{4p}{Na} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^5} \frac{3-\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \sin \alpha_n x = 0$$

albo

$$(2.1.3) \quad \int_0^{a/2} R(\xi) \left(\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x \right) d\xi = \\ = -\frac{pa^2}{\pi^2} (3-\nu) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n x.$$

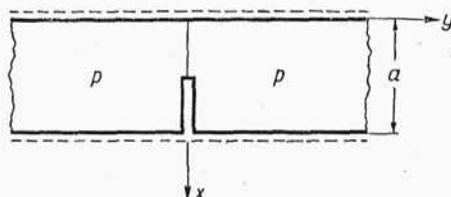
Dla podparcia na długości a wzdłuż osi $y=0$ otrzymamy z równania (2.1.3) dla nieparzystych liczb n

$$(2.1.4) \quad \int_0^a R(\xi) \sin a_n \xi d\xi = -\frac{p a^2}{\pi^2 n^2} (3 - \nu) \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Powyższe wyrażenie można traktować jako współczynniki rozwinięcia Fouriera funkcji $R(\xi)$:

$$(2.1.5) \quad R(x) = -\frac{2 p a (3 - \nu)}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin a_n x.$$

2.2. Rozważmy teraz pasmo nieskończenie długie z wycięciem wzdłuż osi x , jednostajnie obciążone na całym obszarze (rys. 11).



Rys. 11

Ponieważ wzdłuż osi x siły tnące są równe zeru, pozostaje nam z układu równań (2.4) drugie równanie

$$(2.2.1) \quad -\frac{8 p a^3}{N \pi^4} \frac{\nu}{(1 - \nu)(3 + \nu)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin a_n x + \frac{4}{N a (1 - \nu)(3 + \nu)} \int_0^{a/2} M(\xi) \left(\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_n} \sin a_n \xi \sin a_n x \right) d\xi = 0$$

albo

$$(2.2.1.1) \quad \int_0^{a/2} M(\xi) \left(\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x \right) d\xi = \\ = \frac{2 p a^2 \nu}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin a_n x.$$

Ostatnie równanie możemy przedstawić w odmiennej nieco postaci

$$(2.2.2) \quad \int_0^{a/2} M(\xi) \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)} d\xi =$$

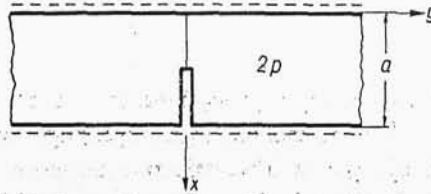
$$= -\frac{8 p a^2 \nu}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin a_n x.$$

W przypadku pasma płytowego bez szczeliny otrzymamy funkcję $M(\xi)$ z równania (2.2.2) wykonując całkowanie w granicach od 0 do a .

Otrzymamy tu dla nieparzystych n

$$(2.2.3) \quad \int_0^a M(\xi) \sin a_n \xi d\xi =$$

$$= \frac{2 p a^3 \nu}{\pi^3 n^3}.$$



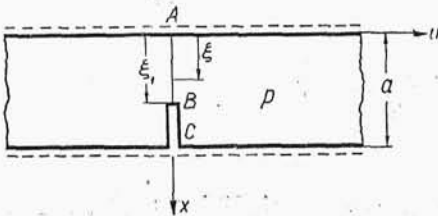
Rys. 12

Traktując prawą stronę związku (2.2.3) jako współczynniki rozwinięcia Fouriera funkcji $M(\xi)$ otrzymamy rozwiązanie tego równania w postaci

$$(2.2.4) \quad M(x) = \frac{4 p a^2 \nu}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin a_n x = \frac{\nu p x}{2} (a - x).$$

Dodanie do siebie rozwiązań dwu powyższych przykładów pozwala na podanie rozwiązania dla obciążenia pasma płytowego z wycięciem według rys. 12.

2.3. Niech pasmo płytowe z wycięciem wzdłuż odcinka BC , swobodnie podparte na odcinku AB , poddane zostanie obciążeniu według rys. 13.



Rys. 13

Jako nieznanne funkcje występują tu: reakcja podporowa $R(\xi)$ oraz moment sprężystego utwierdzenia płyty $M(\xi)$. Funkcje te wyznaczymy z warunków równowagi wyciętego nieskończenie

wąskiego elementu o długości AB ; otrzymamy układ dwu równań całkowych

$$(2.3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} & w_0(x, 0) + 2 \int_0^{\xi_1} R(\xi) w_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \\ & \qquad \qquad \qquad + 2 \int_0^{\xi_1} M(\xi) w_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0. \\ & \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + 2 \int_0^{\xi_1} R(\xi) \frac{\partial w_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi + \\ & \qquad \qquad \qquad + 2 \int_0^{\xi_1} M(\xi) \frac{\partial w_2(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0. \end{aligned} \right.$$

Funkcje w_0 , w_1 i w_2 bierzemy z równań (2.18), (2.8.1) i (2.12).

Dla obciążenia symetrycznego względem osi x otrzymamy w przekroju $y=0$ utwierdzenie zupełne. W tym przypadku układ równań całkowych będzie identyczny z układem równań (2.4).

W przypadku szczególnym jednostajnego obciążenia pasma płyto-
wego otrzymamy

$$(2.3.2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\xi_1} R(\xi) \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (x, \xi) d\xi - \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{(1+\nu)\pi}{2a} \int_0^{\xi_1} M(\xi) \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x, \xi) d\xi = \\ & \qquad \qquad \qquad = -\frac{pa^2}{\pi^2} (3-\nu) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin a_n x, \\ & -\frac{(1+\nu)\pi}{2a} \int_0^{\xi_1} R(\xi) \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x, \xi) d\xi + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{\pi^2}{a^2} \int_0^{\xi_1} M(\xi) \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (x, \xi) d\xi = \frac{2pav}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin a_n x, \end{aligned} \right.$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$(x, \xi) = \sin a_n x \sin a_n \xi.$$

Dla pasma płytowego bez wycięcia otrzymamy dla nieparzystych n

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} \int_0^a R(\xi) \sin a_n \xi d\xi - \frac{1+\nu}{2a} n\pi \int_0^a M(\xi) \sin a_n \xi d\xi = -\frac{pa^2}{\pi^2} \frac{3-\nu}{n^2}, \\ -\frac{1+\nu}{2a} n\pi \int_0^a R(\xi) \sin a_n \xi d\xi + \frac{n^2\pi^2}{a^2} \int_0^a M(\xi) \sin a_n \xi d\xi = \frac{2pa\nu}{n\pi}. \end{cases}$$

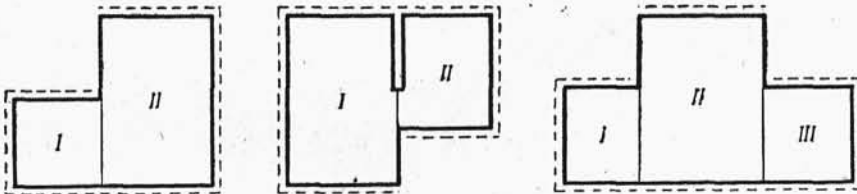
Z rozwiązań tego układu równań mamy

$$(2.3.4) \quad \begin{cases} \int_0^a R(\xi) \sin a_n \xi d\xi = -\frac{4pa^2}{\pi^2 n^2}, \\ \int_0^a M(\xi) \sin a_n \xi d\xi = -\frac{2pa^3}{\pi^3 n^3}. \end{cases} \quad (n=1, 3, \dots),$$

Traktując prawe strony tych równań jako współczynniki rozwinięcia Fouriera funkcji w szereg znajdziemy

$$(2.3.5) \quad \begin{cases} R(x) = -\frac{8pa}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin a_n x, \\ M(x) = -\frac{4pa^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin a_n x = -\frac{px}{2} (a-x). \end{cases}$$

Otrzymane wyniki pokrywają się ze znanym rozwiązaniem dla półpasma płytowego, swobodnie podpartego na krawędziach $x=0$ i $x=a$ oraz utwierdzonego zupełnie wzdłuż prostej $y=0$.



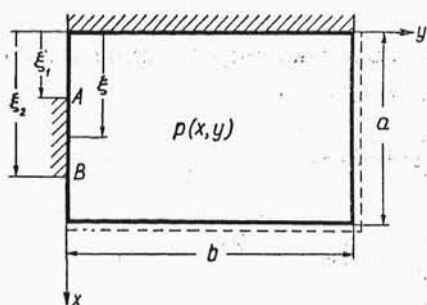
Rys. 14

Podany w trzech ostatnich przykładach sposób rozwiązania daje się zastosować do bardziej złożonych przypadków, np. do przypadków przedstawionych na rys. 14.

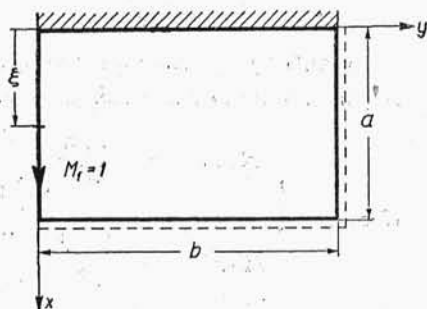
3. Zajmijmy się przypadkiem, w którym część boków płyty dookoła swobodnie podpartej (jeden, dwa lub trzy boki płyty) jest utwierdzona zupełnie, a ponadto zupełnie utwierdzona na odcinku $\xi_2 - \xi_1$ ostatniego boku. Sposób rozwiązania zagadnień tego typu objaśnimy na przykładzie najprostszym płyty według rys. 15, o jednym tylko boku utwierdzonym zupełnie na całej swej długości.

Najwygodniej będzie tu rozumować na układzie podstawowym — płycie zupełnie utwierdzonej wzdłuż krawędzi $x=0$, a na pozostałych bokach swobodnie podpartej.

Oznaczmy przez $w_0^{(1)}(x, y)$ powierzchnię ugięcia płyty wywołaną obciążeniem $p(x, y)$ działającym na układ podstawowy, a przez $w_1^{(1)}(x, y; \xi, 0)$ powierzchnię wywołaną w układzie podstawowym działaniem momentu skupionego $M_1=1$ (rys. 16). Nieznaną funkcję momentów utwierdzenia płyty na odcinku AB oznaczmy przez $M_1(\xi)$.



Rys. 15



Rys. 16

Dla obciążenia płyty według rys. 15 wyznaczmy ugięcie ze związku

$$(3.1) \quad w(x, y) = w_0^{(1)}(x, y) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M_1(\xi) w_1^{(1)}(x, y; \xi, 0) d\xi.$$

Nieznaną funkcję $M_1(\xi)$ wyznaczmy z warunku zerowej wartości pochodnej $\partial w(x, 0)/\partial y$ na odcinku AB :

$$(3.2) \quad \frac{\partial w_0^{(1)}(x, 0)}{\partial y} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} M_1(\xi) \frac{\partial w_1^{(1)}(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0.$$

Wyznaczenie funkcji $w_1(x, y; \xi, 0)$ nie następuje większych trudności. Podajemy tu ostateczne wyniki:

$$(3.3) \quad w_1^{(1)}(x, y; \xi, 0) = \\ = \frac{1}{N a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi}{a_n^2 \sinh a_n b} \left[a_n y \cosh a_n (b-y) - a_n b \frac{\sinh a_n y}{\sinh a_n b} \right] \sin a_n x + \\ + \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{2 N \beta_m^2 \sinh \beta_m a} \left[\beta_m x \cosh \beta_m (a-x) - \beta_m a \frac{\sinh \beta_m x}{\sinh \beta_m a} \right] \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$(3.4) \quad E_m = -\frac{8}{\pi b} \frac{1}{\left(\operatorname{ctgh} \beta_m a - \frac{\beta_m a}{\sinh^2 \beta_m a} \right)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi}{n \left(\frac{m a}{n b} + \frac{n b}{m a} \right)^2}.$$

Bez trudu wyliczymy

$$(3.5) \quad \frac{\partial w_1^{(1)}(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = \frac{1}{N \pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\operatorname{ctgh} \lambda_n - \frac{\lambda_n}{\sinh^2 \lambda_n} \right) \times \\ \times \sin a_n \xi \sin a_n x + \frac{2 b}{N \pi^2} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{E_m \sin a_n x}{m n \left(\frac{n b}{m a} + \frac{m a}{n b} \right)^2}.$$

Wyliczymy następnie funkcję $w_0^{(1)}(x, 0)$:

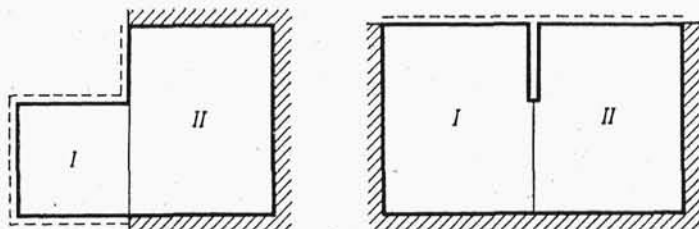
$$(3.6) \quad w_0^{(1)}(x, 0) = \frac{4 p b^4}{N \pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[1 + \frac{1}{\beta_m^2} (A_m \cosh \beta_m x + \right. \\ \left. + B_m \sinh \beta_m x + C_m \beta_m x \cosh \beta_m x + D_m \beta_m x \sinh \beta_m x) \right],$$

gdzie

$$(3.7) \quad \begin{cases} A_m = -\beta_m^2, \\ B_m = C_m = -\beta_m^2 \frac{\gamma_m \sinh \gamma_m - 2 \cosh^2 \gamma_m + 2 \cosh^* \gamma_m}{\sinh^2 \gamma_m - 2 \gamma_m}, \\ D_m = \beta_m^2 \frac{\sinh 2 \gamma_m - \gamma_m \cosh \gamma_m - \sinh \gamma_m}{\sinh 2 \gamma_m - \gamma_m}. \end{cases}$$

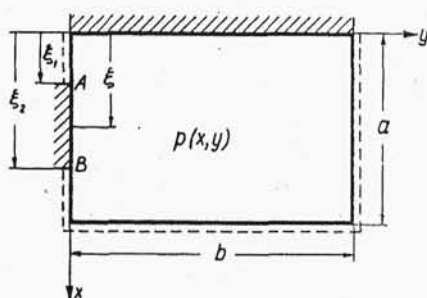
Otrzymaliśmy tu nader skomplikowane jądro (3.5) równania (3.2), utrudniające niepomniernie jego rozwiązanie. Trudności rachunkowe

wzrosną w przypadku zupełnego utwierdzenia dwu lub trzech krawędzi płyty. Podany sposób rozwiązywania można rozszerzyć i na płyty ciągłe. Na rys. 17 podajemy kilka przykładów płyt tego typu.

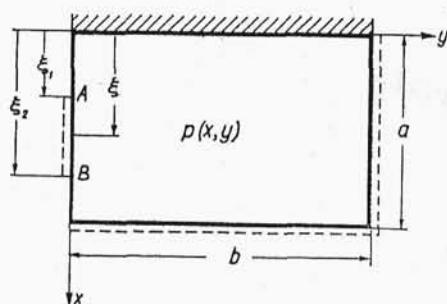


Rys. 17

W podobny sposób rozwiązać można zagadnienie płyty podpartej na trzech brzegach i zupełnie utwierdzonej na całej długości jednego, dwóch lub trzech boków. Czwarty bok płyty niech będzie swobodny

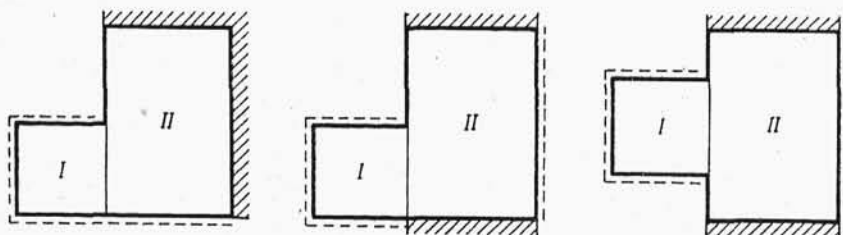


Rys. 18



Rys. 19

z wyjątkiem odcinka AB , wzdłuż którego płyta jest utwierdzona zupełnie lub podparta swobodnie (rys. 18 i 19).



Rys. 20

Oczywiście, rozwiązanie tego typu można rozszerzyć na bardziej skomplikowane układy płytowe, jak np. na płyty ciągłe (rys. 20).

4. Przedstawioną w poprzednich punktach i na szeregu przykładów rozwiniętą metodę da się uogólnić na dowolne jednorodne mieszanane warunki brzegowe. Rozważmy płytę prostokątną dowolnie obciążoną. Niech na brzegu $y=0$ tej płyty wystąpią na odcinkach c_1 i c_2 (rys. 21) dwie pary różnych warunków brzegowych.

Na odcinku c_1 niech będzie

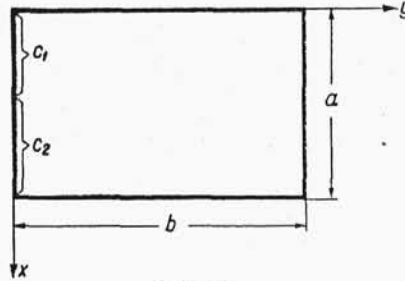
$$(1) \quad l_1 w(x, 0) = 0,$$

$$(2) \quad l_2 w(x, 0) = 0,$$

a na odcinku c_2

$$(3) \quad g_1 w(x, 0) = 0,$$

$$(4) \quad g_2 w(x, 0) = 0;$$



Rys. 21

l_1 , l_2 , g_1 i g_2 oznaczają tutaj dowolne liniowe operatory różniczkowe.

Oczywiście, wzdłuż odcinka c_1 operatory $g_1 w(x, 0)$ i $g_2 w(x, 0)$ będą różne od zera i będą funkcjami zmiennej x ; podobnie rzecz ma się z operatorami $l_1 w(x, 0)$ i $l_2 w(x, 0)$ na odcinku c_2 .

Przyjmijmy jako układ podstawowy taki układ, w którym wzdłuż prostej $y=0$ (na odcinkach c_1 i c_2) obowiązują warunki brzegowe $g_1 w(x, 0) = 0$ oraz $g_2 w(x, 0) = 0$.

Oznaczmy przez $w_0(x, y)$ powierzchnię ugięcia wywołaną obciążeniem $p(x, y)$, przez $G_1(x, y; \xi, 0)$ i $G_2(x, y; \xi, 0)$ funkcje Greena dla stanów $g_1 w = 1$ i $g_2 w = 1$ w wyżej określonym układzie podstawowym.

Wtedy

$$(4.1) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{c_1} g_1 w(\xi) G_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \int_{c_2} g_2 w(\xi) G_2(x, y; \xi, 0) d\xi.$$

Nieznane funkcje $g_1 w(\xi)$ i $g_2 w(\xi)$ wyznaczymy z warunków brzegowych (1) i (2)

$$(4.2) \quad \begin{cases} l_1 w(x, 0) = l_1 w_0(x, 0) + \int_{c_1} g_1 w(\xi) l_1 G_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \\ \quad + \int_{c_2} g_2 w(\xi) l_1 G_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0, \\ l_2 w(x, 0) = l_2 w_0(x, 0) + \int_{c_1} g_1 w(\xi) l_2 G_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \\ \quad + \int_{c_2} g_2 w(\xi) l_2 G_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0, \end{cases}$$

gdzie jest

$$0 \leq \xi \leq c_1.$$

W warunkach tych, na podstawie twierdzenia Bettiego o wzajemności przesunięć, będzie

$$l_1 G_2(x, 0; \xi, 0) = l_2 G_1(x, 0; \xi, 0).$$

Z układu równań całkowych (4.2) wyznaczymy nieznane funkcje $g_1 w(\xi)$ i $g_2 w(\xi)$, a z równania (4.1) powierzchnię ugięcia płyty.

Rozważmy przypadek szczególny, kiedy brzeg c_1 jest utwierdzony zupełnie, a brzeg c_2 swobodny.

Wtedy na odcinku c_1

$$l_1(x, 0) = w(x, 0) = 0, \quad l_2 w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0,$$

a na odcinku c_2

$$g_2(x, 0) = m_y(x, 0) = -N \left(\frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$g_1(x, 0) = \bar{q}_y(x, 0) = -N \left(\frac{\partial^3 w(x, 0)}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, 0)}{\partial x^2 \partial y} \right) = 0.$$

Układem podstawowym będzie tu płyta swobodna wzdłuż brzegu $y=0$ [$g_1 w(x, 0)$ i $g_2 w(x, 0)$ równe zeru]; nieznanymi funkcjami na odcinku c_1 będzie reakcja podporowa $R(\xi)$ i moment utwierdzenia $M(\xi)$. Układ równań całkowych (57) jest identyczny z układem równań (18).

Przyjmijmy teraz jako podstawowy taki układ, w którym na brzegu $y=0$ (tj. na odcinku c_1 i na odcinku c_2) spełnione są warunki brzegowe (1) i (2).

Powierzchnia ugięcia płyty o mieszanych warunkach brzegowych przyjmie teraz postać

$$(4.3) \quad w(x, y) = \bar{w}_0(x, y) + \int_{c_2} l_1 w(\xi) L_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \\ + \int_{c_1} l_2 w(\xi) L_2(x, y; \xi, 0) d\xi \quad (c_1 \leq \xi \leq a).$$

Tutaj $\bar{w}_0(x, y)$ oznacza powierzchnię ugięcia płyty, wywołaną obciążeniem $p(x, y)$ w nowym układzie podstawowym. Jądra $L_1(x, y; \xi, 0)$ i $L_2(x, y; \xi, 0)$ są funkcjami Greena dla stanów $l_1 w = 1$ i $l_2 w = 1$ w układzie podstawowym.

Nieznane funkcje $l_1 w(\xi)$ i $l_2 w(\xi)$ wyznaczymy z warunków brzegowych (3) i (4), słusznych dla odcinka c_2 :

$$(4.4) \quad \begin{cases} g_1 w(x, 0) = g_1 \bar{w}_0(x, 0) + \int_{c_2} l_1 w(\xi) g_1 L_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \\ \quad + \int_{c_2} l_2 w(\xi) g_1 L_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0, \\ g_2 w(x, 0) = g_2 \bar{w}_0(x, 0) + \int_{c_2} l_1 w(\xi) g_2 L_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \\ \quad + \int_{c_2} l_2 w(\xi) g_2 L_2(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$c_1 \leq \xi \leq a.$$

I tu, w myśl twierdzenia Bettiego, jest

$$g_1 L_2(x, 0; \xi, 0) = g_2 L_1(x, 0; \xi, 0).$$

Rozważmy przypadek szczególny, w którym brzeg c_1 jest utwierdzony zupełnie, a brzeg c_2 jest swobodny.

Układem podstawowym będzie płyta wzdłuż odcinka c_1 i c_2 utwierdzona zupełnie. Niewiadomymi funkcjami będą: ugięcie $l_1 w(\xi) = w(\xi)$ i nachylenie stycznej do odkształconej $l_2 w(\xi) = \varphi(\xi) = \partial w(x, 0)/\partial y$, występujące na odcinku c_2 . Funkcje $L_1(x, y; \xi, 0)$ i $L_2(x, y; \xi, 0)$ będą funkcjami Greena albo powierzchniami wpływowymi płyty wzdłuż krawędzi $y = 0$ utwierdzonej zupełnie, wywołanymi stanami $w(\xi) = 1$ i $\varphi(\xi) = 1$, przyłożonymi w punkcie $(\xi, 0)$ w obrębie odcinka c_2 .

Równania (4.4) stwierdzają, że w obrębie odcinka c_2 powinien zniknąć moment utwierdzenia $m_y(x, 0)$ oraz reakcja podporowa $\bar{q}_y(x, 0)$,

Widzimy zatem, że każde zagadnienie o mieszanych warunkach brzegowych da się rozwiązać dwoma sposobami: przez przyjęcie jako funkcji niewiadomych wielkości statycznych [w naszym przykładzie momentu utwierdzenia $m_y(x, 0)$ i reakcji podporowej $\bar{q}_y(x, 0)$] lub też wielkości geometrycznych ugięcia $w(x, 0)$ i nachylenia stycznej do odkształconej $\partial w(x, 0)/\partial y$.

Mamy zatem analogię do metody sił i metody odkształceń w statyce układów statycznie niewyznaczalnych.

Zajmijmy się prostym przykładem pasma nieskończenie długiego, na odcinku c_1 swobodnie podpartego, na odcinku c_2 utwierdzonego zupełnie⁴⁾.

Mamy następujące warunki brzegowe:

na odcinku c_1 ,

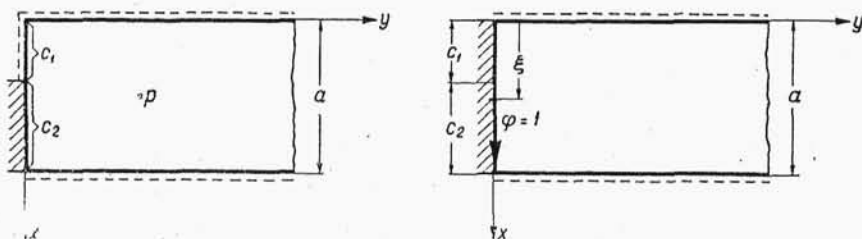
$$l_2 w(x, 0) = w(x, 0) = 0, \quad l_1 w(x, 0) = \frac{\partial y(x, 0)}{\partial y} = 0;$$

⁴⁾ Zagadnienie to zostało rozwiązane metodą sił w pracy autora [1].

na odcinku c_2

$$g_2 w(x, 0) = w(x, 0) = 0, \quad g_1 w(x, 0) = m_y(x, 0) = -N \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = 0.$$

Jako układ podstawowy przyjmijmy układ, w którym pasmo płytowe jest wzdłuż krawędzi $y = 0$ utwierdzone zupełnie.



Rys. 22

Równania (4.3) i (4.4) przyjmują w tym przypadku postać uproszczoną:

$$(4.3.1) \quad w(x, y) = \bar{w}_0(x, y) + \int_{c_2} l_1 w(\xi) L_1(x, y; \xi, 0) d\xi,$$

$$(4.4.1) \quad g_1 \bar{w}_0(x, 0) + \int_{c_2} l_2 w(\xi) g_1 L_1(x, 0; \xi, 0) d\xi = 0,$$

albo

$$(4.3.2) \quad w(x, y) = \bar{w}_0(x, y) + \int_{c_2} \varphi(\xi) L_1(x, y; \xi, 0) d\xi,$$

$$(4.4.2) \quad -N \frac{\partial^2 w_0(x, 0)}{\partial y^2} - N \int_{c_2} \varphi(\xi) \frac{\partial^2 L_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y^2} d\xi = 0.$$

Łatwo wykazać, że funkcja

$$L_1(x, y; \xi, 0) = \frac{2y}{a} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} e^{-a_n y} \sin a_n \xi \sin a_n x$$

jest szukaną funkcją Greena; spełnia ona równanie różniczkowe ugięcia płyty $\nabla^2 \nabla^2 L_1 = 0$ oraz warunki brzegowe

$$L_1(x, 0; \xi, 0) = 0, \quad L_1(x, \infty; \xi, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial L_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = \frac{2}{a} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x, \quad \frac{\partial L_1(x, \infty; \xi, 0)}{\partial y} = 0.$$

Łatwo też można wykazać, że jądro równania całkowego (4.4.2) da się przedstawić w postaci wzoru zamkniętego

$$(4.5) \quad -N \frac{\partial^2 L_1(x, 0; \xi, 0)}{\partial y^2} = \frac{4N\pi}{a^2} \left[\frac{1}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x+\xi)} - \frac{1}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x-\xi)} \right].$$

Ponieważ dla pasma płytowego wzdłuż krawędzi $y=0$ utwierdzonego zupełnie jest

$$w_0(x, y) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[1 - (1 + a_n y) e^{-a_n y} \right] \sin a_n x,$$

$$-N \frac{\partial^2 w_0(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{4pa^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin a_n x = \frac{px}{2} (a-x),$$

to równanie całkowe przyjmuje postać

$$(4.6) \quad \int_{c_1}^{\xi} \varphi(\xi) \left[\frac{1}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x+\xi)} - \frac{1}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x-\xi)} \right] d\xi = -\frac{pa^2 x(a-x)}{8\pi N}.$$

Po wyznaczeniu z powyższego równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju nieznannej funkcji $\varphi(\xi)$ otrzymamy ugięcie powierzchni zgięcia płyty z równania (4.3.2).

Przedstawioną w tym punkcie ogólną metodę rozwiązania zagadnień zginania płyty prostokątnej o różnych warunkach brzegowych na odcinkach c_1 i c_2 jednej krawędzi płyty daje się uogólnić na dowolną ilość takich odcinków jednej krawędzi, jak również na płyty, w których na dowolnych odcinkach czterech krawędzi płyty istnieją różne warunki brzegowe. Metoda ta może znaleźć zastosowanie również w innych zagadnieniach technicznych, w których rozpatrywane zjawisko jest opisane równaniem różniczkowym biharmonicznym, np. w zagadnieniach dwuwymiarowego stanu naprężenia w tarczach prostokątnych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Nowacki, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych (I)*, Arch. Mech. Stos., t. III, 3-4 (1951).
- [2] K. Girkmann, *Flächentragwerke*, 1948.
- [3] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, New York-Londyn 1940.

Summary

PLATES OF MIXT BOUNDARY CONDITIONS (II)

This is an extension of a paper, published in 1951 (Arch. Mech. Stos., Vol. III, No 3-4), under the same title. It contains:

(1) A description of the author's method of solving bending problems of rectangular plates with one edge divided into segments of different, arbitrary pairs of homogenous boundary conditions. The method is characterized by finding the solution in two components, the first, $w_0(x, y)$, satisfying the differential equation of the plate with uniform boundary conditions for the considered edge, the second taking into account the influence of changed boundary conditions. The functions of statical and geometrical quantities for any segment are considered as unknown. They are found from a system of Fredholm integral equations of the first kind, resulting from the boundary conditions for each particular segment of the considered edge.

(2) A generalization of the above method, in some cases, for plates with all edges divided into segments simply supported and built in, arranged in an arbitrary manner.

(3) A method of solving bending problems of rectangular plates with slits, as well as continuous plates, or representing figures composed of rectangles.