

W. NOWACKI

# **Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych**

**Plaques rectangulaires avec conditions  
aux limites mixtes**

---

Odbitka z „Archiwum  
Mechaniki Stosowanej”  
Tom III zeszyt 3—4

---

WYDAWNICTWO

ZAKŁADU MECHANIKI BUDOWLI POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

GDAŃSK 1951

## Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych

## Plaques rectangulaires avec les conditions aux limites mixtes

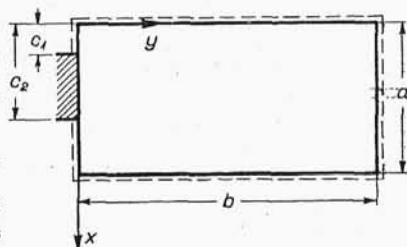
W. Nowacki, Gdańsk

W niniejszej pracy rozważać będziemy płyty prostokątne o różnych warunkach brzegowych na poszczególnych odcinkach krawędzi płyty.

Do pierwszego typu zagadnień należy rozmaity sposób utwierdzenia płyty na sąsiadujących odcinkach tej samej krawędzi płyty. Do drugiego z nich należy podparcie liniowe płyty wzdłuż odcinków w obrębie płyty.

A) Rozważmy zatem płytę prostokątną (rys. 1) obciążoną w dowolny sposób obciążeniem o intensywności  $p(x, y)$ .

Niech na odcinku  $(c_2 - c_1)$  istnieje zupełne utwierdzenie płyty, na pozostałym konturze swobodne podparcie. Warunki brzegowe kształtują się zatem następująco:



Rys. 1

$$1^0: w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \text{dla} \quad c_1 \leq x \leq c_2,$$

$$2^0: w = 0, \quad \nabla^2 w = 0 \quad \text{na pozostałym konturze płyty.}$$

Tutaj  $w(x, y)$  oznacza powierzchnię odkształcenia płyty.

Funkcję momentów zginających  $m_y(x, 0) = -N \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2}$  oznaczmy przez  $M_1(x)$ ; traktować będziemy ją jako funkcję nieznaną.

Oznaczmy dalej przez  $w_p(x, y)$  powierzchnię odkształcenia płyty dookoła swobodnie podpartej wywołaną obciążeniem  $p(x, y)$ . Wyznaczenie tej powierzchni odkształcenia przy nader prostych warunkach brzegowych:  $w_p = 0, \nabla^2 w_p = 0$  na obwodzie płyty nie na-

stręcza trudności. Dla wielu wypadków obciążeń wystarczy sięgnąć do znanych rozwiązań. Traktować będziemy więc funkcję  $w_p(x, y)$  jako znaną.

Oznaczmy dalej przez  $w_1(\xi, 0; x, y)$  powierzchnię odkształcenia płyty dookoła swobodnie podpartej, wywołaną momentem jednostkowym  $M_1=1$  o wektorze skierowanym w kierunku osi  $x$ , a zaczepiającym w punkcie  $(\xi, 0)$  na osi  $x$ , przy czym:  $c_1 \leq \xi \leq c_2$ .

Stosując zasadę superpozycji otrzymamy ugięcie w punkcie  $(x, y)$  płyty, wywołane działaniem momentów utwierdzenia  $M_1(x)$  w postaci:

$$\int_{c_1}^{c_2} M_1(\xi) w_1(\xi, 0; x, y) d\xi.$$

Łączne ugięcie płyty wywołane obciążeniem  $p(x, y)$  i momentami utwierdzenia  $M_1(x)$  wyniesie:

$$w(x, y) = w_p(x, y) + \int_{c_1}^{c_2} M_1(\xi) w_1(\xi, 0; x, y) d\xi. \quad (1)$$

Z warunku zerowej wartości nachylenia stycznej do odkształconej na odcinku  $c_2 - c_1$  otrzymamy zależność:

$$\int_{c_1}^{c_2} M_1(\xi) \frac{\partial w_1(\xi, 0; x, 0)}{\partial y} d\xi + \frac{\partial w_p(x, 0)}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

W powyższym związku nieznaną funkcją jest  $M_1(\xi)$ .

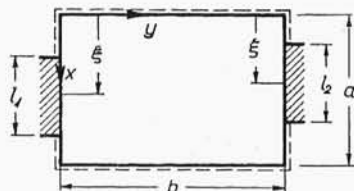
Dla wyznaczenia niej uzyskaliśmy związek (2) — równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju o rdzeniu  $K(x, \xi)$  symetrycznym (co wynika z twierdzenia o wzajemności przesunięć Maxwella)

$$K(x, \xi) = \frac{\partial w_1(\xi, 0; x, 0)}{\partial y}.$$

Znajomość funkcji  $M_1(\xi)$  pozwala już na wyznaczenie powierzchni odkształcenia z równania (1).

Rozważmy wypadek ogólniejszy. Niech dwa przeciwległe brzegi płyty będą na odcinkach  $l_1$  i  $l_2$  utwierdzone zupełnie; na pozostałym konturze płyta niech będzie swobodnie podparta. Oznaczmy funkcję momentów utwierdzenia na odcinkach  $l_1$  i  $l_2$  przez  $M_1(x)$

i  $M_2(x)$ . Oznaczmy dalej powierzchnię odkształcenia płyty wywołaną momentem skupionym  $M_1=1$ , działającym w odległości  $\xi$  na osi  $x$  przez  $w_1(\xi, 0; x, y)$ ; wywołaną momentem skupionym  $M_2=1$ , działającym w odległości  $\xi$  na brzegu  $y=b$  przez  $w_2(\xi, b; x, y)$ , — wreszcie przez  $w_p(x, y)$  powierzchnię odkształcenia wywołaną obciążeniem  $p(x, y)$ .



Rys. 2

W wyżej wymienionych trzech wypadkach traktujemy płytę jako na konturze swobodnie podpartą.

Łącznie ugięcie płyty wywołane momentami  $M_1(x)$ ,  $M_2(x)$  i obciążeniem  $p(x, y)$  daje:

$$w(x, y) = w_p(x, y) + \int_{l_1} M_1(\xi) w_1(\xi, 0; x, y) d\xi + \int_{l_2} M_2(\xi) w_2(\xi, b; x, y) d\xi. \quad (3)$$

Z warunku zerowej wartości nachylenia stycznej do odkształconej na odcinkach  $l_1$  i  $l_2$  mamy:

$$\begin{aligned} \int_{l_1} M_1(\xi) \frac{\partial w_1(\xi, 0; x, 0)}{\partial y} d\xi + \int_{l_2} M_2(\xi) \frac{\partial w_2(\xi, b; x, 0)}{\partial y} d\xi + \frac{\partial w_p(x, 0)}{\partial y} &= 0, \\ \int_{l_1} M_1(\xi) \frac{\partial w_1(\xi, 0; x, b)}{\partial y} d\xi + \int_{l_2} M_2(\xi) \frac{\partial w_2(\xi, b; x, b)}{\partial y} d\xi + \frac{\partial w_p(x, b)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ponieważ w myśl twierdzenia o wzajemności przesunięć jest

$$\frac{\partial w_2(\xi, b; x, 0)}{\partial y} = -\frac{\partial w_1(\xi, 0; x, b)}{\partial y} = G(x, \xi)$$

a ponadto jest

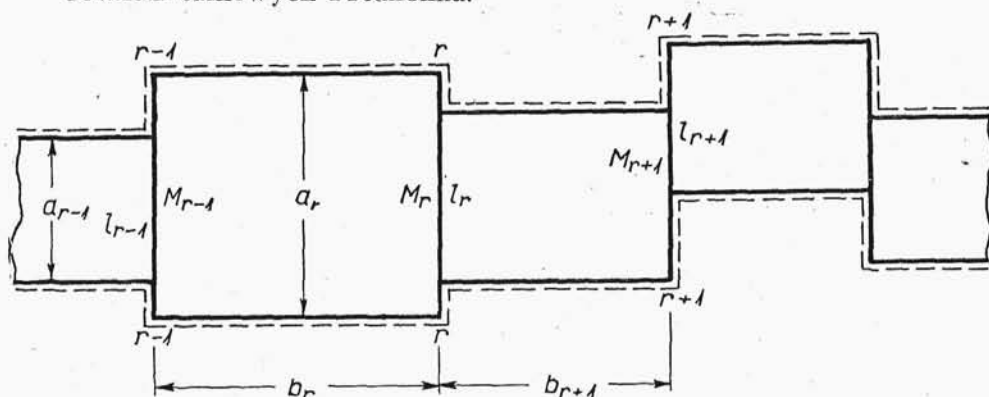
$$-\frac{\partial w_2(\xi, b; x, b)}{\partial y} = \frac{\partial w_1(\xi, 0; x, 0)}{\partial y} = K(x, \xi),$$

przekształcimy równania (4) do postaci:

$$\begin{aligned} \int_{l_1} M_1(\xi) K(x, \xi) d\xi + \int_{l_2} M_2(\xi) G(x, \xi) d\xi + \frac{\partial w_p(x, 0)}{\partial y} &= 0, \\ \int_{l_1} M_1(\xi) G(x, \xi) d\xi + \int_{l_2} M_2(\xi) K(x, \xi) d\xi + \frac{\partial w_p(x, b)}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Otrzymaliśmy tu układ dwu równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju.

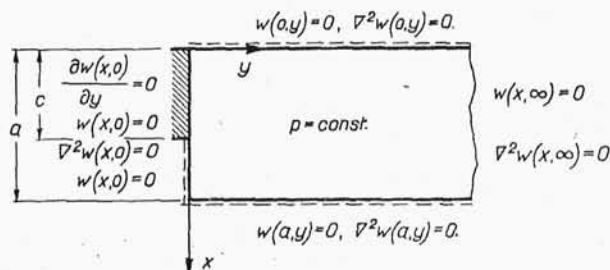
Powyższe równania można rozszerzyć na bardziej skomplikowane wypadki układów płytowych. Widoczne jest, że dla płyt ciągłych według rysunku 3 otrzymamy układ trójczłonowych równań całkowych Fredholma.



Rys. 3

Łatwo też jest wykazać, że te trójczłonowe równania całkowe przechodzą na trójczłonowe równania Galerkin<sup>\*)</sup> dające związek między współczynnikami Fourierowskiego rozwinięcia funkcji momentów podporowych dla wypadku ciągłej płyty o szerokości  $a$ , podpartej liniowymi podporami poprzecznymi w odległościach  $b$ .

Dla ilustracji postępowania podamy rozwiązanie nader prostego wypadku szczególnego — półpasma płytowego o szerokości  $a$  i obciążonego w sposób jednostajny (rys. 4). Niech na odcinku  $c$  płyty istnieje utwierdzenie zupełne; na pozostałym konturze niech istnieje swobodne podparcie.



Rys. 4

<sup>\*)</sup> B. G. Galerkin: Uprugie tonkie plity, 1933.

Rozważmy najpierw zadanie pomocnicze. Niech w odległości  $\xi$  od osi  $y$  działa moment skupiony  $M_1=1$ .

Rozwiązaniem tego zadania będzie:

$$w_1(x, y) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (A_n + \alpha_n y B_n) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x, \quad (6)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Łatwo stwierdzić, że rozwiązanie to spełnia równanie różniczkowe  $\nabla^2 \nabla^2 w_1(x, y) = 0$ , warunki na brzegach  $x=0$ ,  $x=a$  oraz dla  $y=\infty$ .

Stałe  $A_n$  i  $B_n$  wyznaczymy z warunków brzegowych na krawędzi  $y=0$ , którą przyjmujemy jako swobodnie podpartą.

Z warunków tych:

$$w_1(x, 0) = 0, \quad -N \frac{\partial^2 w_1(x, 0)}{\partial y^2} = 1 = \frac{2}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x$$

znajdziemy:

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{1}{Na} \sin \alpha_n \xi.$$

Zatem:

$$w_1(x, y; \xi, 0) = \frac{y}{\pi N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n y}}{n} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x,$$

lub też

$$w_1(x, y; \xi, 0) = -\frac{y}{4\pi N} \ln \frac{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)}. \quad (7)$$

Dla półpasma płytowego, swobodnie na konturze podpartego, mamy przy obciążeniu jednostajnym o intensywności  $p$  znane rozwiązanie:

$$w_p(x, y) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\alpha_n y}{2} \right) e^{-\alpha_n y} \right] \sin \alpha_n x. \quad (8)$$

Nieznana funkcję momentów utwierdzenia  $M_1(x)$  otrzymamy z równania (2), które w naszym przykładzie przyjmuje postać:

$$\int_0^c M(\xi) \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x + \xi)} d\xi = \frac{8pa^3}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \alpha_n x \quad (9)$$

Wyznaczenie powierzchni  $M(x)$  z tego równania całkowego pozwoli już wyznaczyć powierzchnię odkształcenia  $w(x, y)$  z równania (5), a tym samym pozwoli na wyznaczenie wszystkich sił przekroju płyty, a więc momentów zginających, skręcających i sił tnących.

Rozwiązanie równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju natrafia na znaczne trudności i w nielicznych tylko wypadkach przy szczególnie prostej budowie rdzenia dopuszcza rozwiązanie w postaci zamkniętej. W ustępie III-cim podamy przybliżone rozwiązanie tego równania.

W wypadku szczególnym  $c=a$  otrzymamy z równania (9) znany wykres momentów utwierdzenia.

Otóż korzystając z szeregu (6) możemy równanie (2) dla naszego przykładu napisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi N} \int_0^a M(\xi) \left[ \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \right] d\xi = \\ = -\frac{2pa^3}{\pi^4 N} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned} \quad (9a)$$

Z porównania obu szeregów wynika, że dla liczb nieparzystych  $m=n$ :

$$\int_0^a M(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{a} d\xi = -\frac{2pa^3}{\pi^3 n^3} \quad (9b)$$

oraz, że dla liczb parzystych powyższe wyrażenie znika.

Powyższe wyrażenie można traktować jako współczynniki rozwinięcia Fourierskiego funkcji  $M(\xi)$ :

$$M(\xi) = -\frac{4pa^3}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi\xi}{a}.$$

Ponieważ:

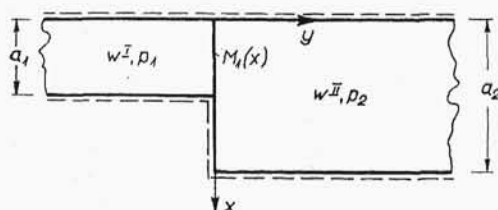
$$\frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{a} = ax - x^2 \text{ dla } 0 \leq x \leq a,$$

zatem:

$$M(x) = -\frac{p}{2} (ax - x^2). \quad (9c)$$

Otrzymany wynik jest zgodny ze znanym rozwiązaniem tego zagadnienia na innej drodze \*).

Rozwiązanie (9) da się bez trudu rozszerzyć na wypadek dwóch półpasm płytowych o szerokości  $a$  i  $a_1$ , w sposób ciągle połączonych nad podporą liniową  $y=0$  (rys. 5).



Rys. 5

Otrzymamy tu następujące równanie całkowe:

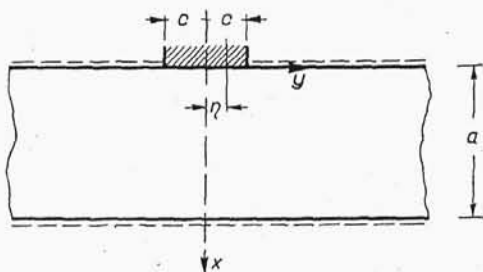
$$\int_0^a M(\xi) \left[ \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a_1} (x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a_1} (x + \xi)} + \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a_2} (x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a_2} (x + \xi)} \right] d\xi =$$

$$= \frac{8p}{\pi^3} \left[ a_1^3 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{a_1} + a_2^3 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{a_2} \right]. \quad (10)$$

Rozważmy jeszcze pasmo płytowe, obciążone w sposób jednostajny. Brzeg płyty poza odcinkiem  $2c$ , na którym jest utwierdzony zupełnie, niech będzie swobodnie podparty (rys. 6).

\*) A. Nadai: Elastische Platten 1925. Str. 77,

Na odcinku  $2c$  wystąpią momenty utwierdzenia  $M(y)$ . I tu mamy najpierw zadanie pomocnicze — wyznaczenie powierzchni  $w_1(x, y; 0, \eta)$  wywołanej momentem skupionym o wektorze skierowanym w kierunku ujemnej osi  $y$ .



Rys. 6

Powierzchnię  $w_1$  wyrazimy przy pomocy całki Fouriera:

$$w_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} (A \cosh \alpha x + B \alpha x \sinh \alpha x + C \sinh \alpha x + D \alpha x \cosh \alpha x) \times \cos \alpha(y - \eta) d\alpha. \quad (11)$$

Powyższa funkcja spełnia równanie różniczkowe:

$$\nabla^2 \nabla^2 w_1 = 0,$$

oraz warunki brzegowe dla  $y = \pm \infty$ .

Stałe  $A(\alpha), \dots, D(\alpha)$ , funkcje parametru  $\alpha$  otrzymamy z dalszych warunków brzegowych na brzegu  $x=0$  i  $x=a$ .

$$1^0: w_1(0, y) = 0, \quad 2^0: w_1(a, y) = 0,$$

$$3^0: -N \frac{\partial^2 w_1(0, y)}{\partial x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha(y - \eta) d\alpha, \quad 4^0: \frac{\partial^2 w_1(a, y)}{\partial x^2} = 0.$$

Otrzymamy stąd:

$$A(\alpha) = 0, \quad B(\alpha) = \frac{1}{4N}, \quad C(\alpha) = \frac{1}{4N} (1 - \operatorname{ctgh}^2 \alpha a) \cdot \alpha a,$$

$$D(\alpha) = \frac{1}{4N} \operatorname{ctgh} \alpha a.$$

Nachylenie powierzchni odkształcenia dla  $x=0$  daje:

$$\frac{\partial w_1(0, y; 0, \eta)}{\partial x} = \frac{a}{2N\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh aa \sinh aa - aa}{aa \sinh^2 aa} \cos a(y-\eta) da. \quad (12)$$

Funkcja  $w_p$ , powierzchnia odkształcenia pasma wywołana obciążeniem  $p$ , jest funkcją jedynie zmiennej  $x$ :

$$w_p(x) = \frac{p}{24N} (x^4 - 2ax^3 + a^3x). \quad (13)$$

Zatem:

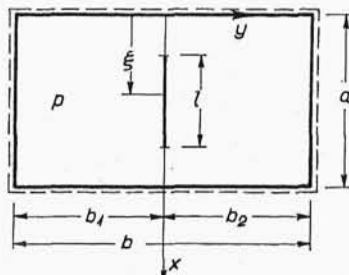
$$\frac{\partial w_p(0)}{\partial x} = \frac{p a^3}{24N}.$$

Warunek zerowej wartości nachylenia odkształconej na odcinku  $2c$  daje:

$$\int_0^c M(\eta) \cdot \left[ \int_0^{\infty} \frac{\cosh aa \sinh aa - aa}{aa \sinh^2 aa} \cos ay \cdot \cos a\eta da \right] d\eta + \frac{p a^2 \pi}{24} = 0, \quad (14)$$

a więc również równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju o rdzeniu symetrycznym.

B) Rozważmy teraz płytę prostokątną dookoła swobodnie podpartą, a ponadto podpartą liniowo na odcinku  $l$ , równoległym do boku  $b$ . Oznaczmy przez  $w_p(x, y)$  powierzchnię odkształcenia płyty dookoła swobodnie podpartej wywołaną obciążeniem  $p(x, y)$ , a przez  $w_1(x, y)$  ugięcie płyty wywołane siłą skupioną  $P=1$ , działającą w punkcie  $(\xi, 0)$ . Podparcie liniowe płyty na odcinku  $l$  wywołuje reakcję podporową  $r(x)$ , nieznaną na razie funkcję zmiennej  $x$ . Funkcję tę możemy jednak wyznaczyć z warunku zerowej wartości ugięcia, wywołanego obciążeniem  $p(x, y)$  oraz reakcją  $r(x)$ .



Rys. 7

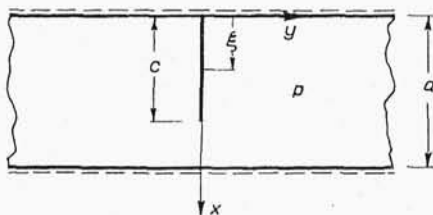
Zatem:

$$\int_l r(\xi) w_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + w_p(x, 0) = 0. \quad (15)$$

W tym równaniu całkowym Fredholma pierwszego rodzaju  $w_1(x, 0; \xi, 0)$  jest rdzeniem symetrycznym. Po wyznaczeniu  $r(\xi)$  z równania (15) ugięcie  $w(x, y)$  wyznaczymy ze wzoru:

$$w(x, y) = w_p(x, y) + \int_0^c r(\xi) w_1(x, 0; \xi, 0) d\xi. \quad (16)$$

Równanie (15) zilustrujemy przykładem pasma płytowego jednostajnie obciążonego, swobodnie podpartego na brzegach  $x=0$  i  $x=a$  oraz na liniowej podporze o długości  $c$  (rys. 8).



Rys. 8

Otóż siła skupiona  $P=1$ , działająca w odległości  $x=\xi$  wywołuje powierzchnię odkształcenia płyty:

$$w_1(x, y; \xi, 0) = \frac{a^2}{2N\pi^3} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{e^{-a_n y}}{n^3} (1 + a_n y) \sin a_n \xi \sin a_n x. \quad (17)$$

Dla  $y=0$  mamy:

$$w_1(0, y; \xi, 0) = \frac{a^2}{2N\pi^3} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Obciążenie  $p$  działające na pasmo płytowe wywołuje zgięcie walcowe płyty:

$$w_p(x) = \frac{p}{24N} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4pa^4}{N\pi^5} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin a_n x. \quad (18)$$

Równanie (15) przyjmuje tu postać:

$$\int_0^c r(\xi) \left[ \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{\sin a_m \xi \sin a_m x}{m^3} \right] d\xi + \frac{8pa^2}{N\pi^2} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin a_n x = 0. \quad (19)$$

W wypadku szczególnym  $c=a$ , z porównania szeregów równania (19) otrzymamy dla nieparzystych liczb  $n=m$ :

$$\int_0^a r(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{a} d\xi = -\frac{8pa^2}{\pi^2 n^3}, \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (20)$$

Stąd łatwo uzyskamy rozwiązanie:

$$r(\xi) = -\frac{16pa}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi\xi}{a}.$$

Przedstawiony na tym prostym przykładzie sposób rozwiązania płyty, z dodatkowymi liniami podporowymi w obrębie płyty, da się oczywiście rozwinąć na kilka podpór liniowych.

Rozważane w ustępach I i II typy zadań dadzą się rozszerzyć i na inne wypadki mieszanych warunków brzegowych.

C) **Przykłady.** 1. Półpasma płytowe, zupełnie utwierdzone na odcinku  $c=\frac{a}{2}$ , na pozostałych brzegach swobodnie podparte (rys. 4).

Funkcje momentów utwierdzenia określa równanie całkowe (9).

Ścisłe rozwiązanie tego równania natrafia na znaczne trudności. Podamy rozwiązanie przybliżone, zastępując całkę sumą i sprowadzając równanie całkowe do układu niejednorodnych równań liniowych.

Przy oznaczeniach:

$$c=r \cdot \Delta x, \quad a=s \cdot \Delta x, \quad x=k \cdot \Delta x, \quad \xi=i \cdot \Delta x.$$

$$(i=1, 2, \dots, r), \quad (k=1, 2, \dots, r),$$

doprowadzamy równanie (9) do postaci:

$$\sum_{i=1}^{i=r} M_i K(i, k) = F_k, \quad (21)$$

$$(k=1, 2, \dots, r).$$

Tutaj oznaczają:

$$K(i, k) = \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{s}(k-i)}{1 - \cos \frac{\pi}{s}(k+i)},$$

$$F_k = \frac{8pa^2s}{\pi^3} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi k}{s}.$$

Pewną trudność sprawia fakt nieskończonej wartości współczynników  $K(i, i)$  układu równań (21), leżących na głównej przekątnej macierzy równań. Trudność tę ominiemy wyznaczając średnie wartości  $K(i, i)$  na odcinku  $\Delta x$ , zawierającym nieciągłość logarytmiczną. Na odcinku  $\Delta x$  możemy w przybliżeniu przyjąć:

$$\ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x + \xi)} \approx 2 \ln \frac{\pi \varrho}{2 a \sin \frac{\pi \xi}{a}}, \quad \varrho = x - \xi = \Delta x. \quad (22)$$

Przybliżenie to otrzymamy, rozkładając w liczniku argumentu logarytmu wyrażenie  $1 - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)$  na szereg potęgowy względem  $\varrho$  i pomijając potęgi  $\varrho$  jako wielkości rzędu wyższego, a w mianowniku kładąc  $x = \xi$ .

$$\text{Średnią wartość funkcji } \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x + \xi)}$$

otrzymamy zatem ze wzoru:

$$K(\xi, \xi) \approx \frac{1}{\varrho} \int_0^{\varrho} 2 \ln \frac{\pi \varrho}{2 a \sin \frac{\pi \xi}{a}} d\varrho = 2 \left( \ln \frac{\varrho \pi}{2 a \sin \frac{\pi \xi}{a}} - 1 \right),$$

albo:

$$K(i, i) \approx 2 \left[ \ln \frac{\pi}{2 s \sin \frac{\pi i}{s}} - 1 \right]. \quad (23)$$

Poniżej podajemy tabelaryczne wartości rdzenia  $K(i, k)$  dla poszczególnych punktów przedziału oraz wartości  $F_k$ .

$$F_k / pa^2.$$

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{F_k}{pa^2}$	0,840872	1,633624	2,343329	2,949224	3,436888	3,793523	4,009810	4,099881

$K(i, k)$ 

$i/k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-3,373419	-2,171171	-1,347489	-0,969681	-0,745591	-0,593934	-0,482368	-0,395247
2		-4,720908	-3,140851	-2,093129	-1,563619	-1,227958	-0,989184	-0,816639
3			-5,476390	-3,734798	-2,575444	-1,958868	-1,551985	-1,252806
4				-5,948873	-4,130030	-2,899418	-2,222490	-1,762760
5					-6,272891	-4,393654	-3,110248	-2,385771
6						-6,483628	-4,556923	-3,229790
7							-6 603198	-4,635300
8								-6,642012

Rozwiązanie układu równań (21) daje następujące wartości momentów utwierdzenia:

$$\frac{M_k}{pa^2}$$

$k=$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{M_k}{pa^2}$	-0,032521	-0,061374	-0,084568	-0,105367	-0,122289	-0,143612	-0,132522	-0,357720

Rysunek 9 ilustruje wykres momentów  $M(x)$  na odcinku  $c$ . Dla porównania linią kreskową przedstawiono wykres  $M(x)$  przy utwierdzeniu zupełnym krawędzi  $y=0$  na całej długości (według wzoru 9c).

Znamienny jest bardzo silny wzrost momentów w pobliżu punktu  $x=\frac{2}{a}$ . Wynika to z nieciągłości pochodnej  $\frac{\partial w(x,0)}{\partial y}$  i spodziewać się należy, że przy ścisłym rozwiązaniu równania całkowego, otrzyma się tu wartość nieskończenie duża.

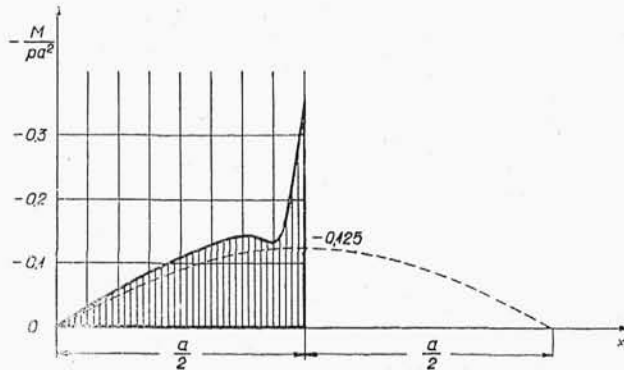
Wyznaczenie funkcji  $M(x)$  pozwoli już na wyznaczenie powierzchni odkształcenia naszej płyty według wzoru (1).

Funkcja  $w_p(x, y)$  określona jest wzorem (8), wpływ utwierdzenia płyty na odcinku  $c=\frac{a}{2}$  przedstawia całka:

$$\int_0^c M(\xi) w_1(x, y; \xi, 0) d\xi, \quad (24)$$

gdzie  $w_1(x, y; \xi, 0)$  przedstawia wzór (7).

W przypadku naszego rozwiązania przybliżonego należy traktować wartości  $M_k$  jako momenty skupione w poszczególnych



Rys. 9

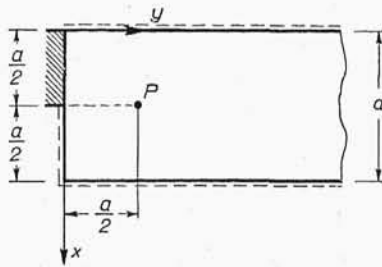
punktach przedziału  $0 \leq \xi \leq a/2$ . Wyrażenie (24) przyjmie zatem postać:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (M_k \Delta \xi) w_1(x, y; \xi_k, 0)$$

albo

$$-\frac{y a^2}{4 \pi N s^2} \sum_{k=1}^{\infty} M_k (\Delta \xi) \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{a} y - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi_k)}{\cosh \frac{\pi}{a} y - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi_k)}. \quad (25)$$

2. Półpasma płytowe obciążone siłą skupioną  $P$  w punkcie  $(x_0 = a/2, y_0 = a/2)$ .



Rys. 10

Powierzchnia  $w_p(x, y)$  wywołana tym obciążeniem przyjmuje dla półpasma płytowego dookoła swobodnie podpartego następującą postać:

$$w_p(x, y) = \frac{P a^2}{N \pi^3} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{e^{-a_n y_0}}{n^3} \times \\ \times [(1 + a_n y_0) \sinh a_n y - \\ - a_n y \cosh a_n y] \sin a_n x \sin a_n x_0. \quad (26)$$

Stąd nachylenie powierzchni odkształcenia w prostej  $y=0$ :

$$\frac{\partial w_p(x, 0)}{\partial y} = \frac{P}{\pi N} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{e^{-a_n y_0}}{n} \sin a_n x_0 \sin a_n x =$$

$$= -\frac{Py_0}{4\pi N} \ln \frac{\cosh \frac{\pi y_0}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(x-x_0)}{\cosh \frac{\pi y_0}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(x+x_0)}, \quad (27)$$

Dla  $x_0=y_0=\frac{a}{2}$  równanie całkowe (2) daje:

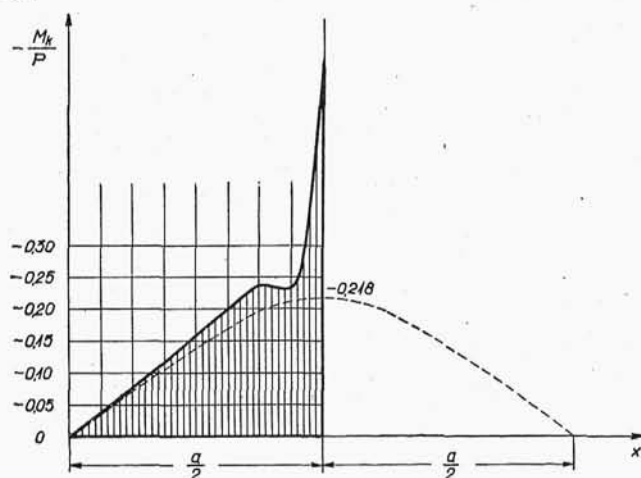
$$\int_0^{a/2} M(\xi) \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x-\xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x+\xi)} d\xi = -Py_0 \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\cosh \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{a}\left(x+\frac{a}{2}\right)},$$

Rozwiązanie przybliżone tego równania całkowego — układ równań liniowych zastępujący to równanie przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^{i=r} M_i K(i, k) = G_k, \quad k=1, 2, \dots, r. \quad (28)$$

gdzie 
$$G_k = -\frac{Ps}{2} \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{2} - \cos \pi \left( \frac{k}{s} - \frac{1}{2} \right)}{\cosh \frac{\pi}{2} - \cos \pi \left( \frac{k}{s} + \frac{1}{2} \right)},$$

Przy podziale odcinka  $c=\frac{a}{2}$  na osiem równych części, wyznaczono z układu równań (28) wielkości  $M_k$  i naniesiono je na poniższym rysunku.



Rys. 11

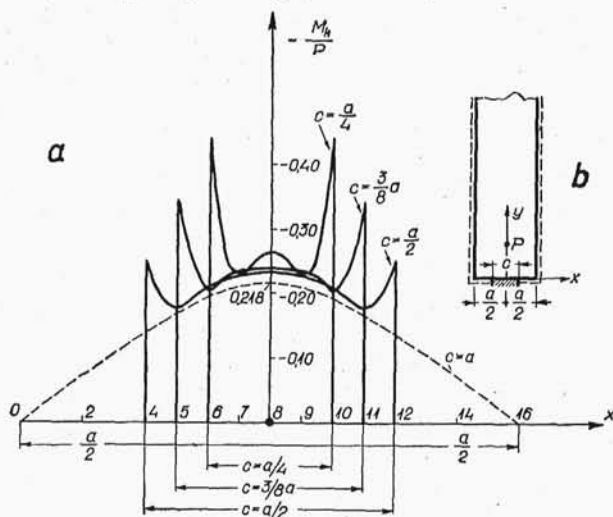
Wartości  $M_k/P$ 

$k=$	1	2	3	4	5	6	7	8
$M_k/P$	-0,038067	-0,078629	-0,117381	-0,157581	-0,194342	-0,238301	-0,233683	-0,591730

Dla porównania naniesiono linią kreskowaną wykres momentów utwardzenia dla pasma płytowego utwardzonego zupełnie wzdłuż prostej  $y=0$ . Momenty te wyliczamy ze wzoru:

$$M = -\frac{P y_0}{2a} \sinh \frac{\pi y_0}{a} \left[ \frac{1}{\cosh \frac{\pi y_0}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x - x_0)} - \frac{1}{\cosh \frac{\pi y_0}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x + x_0)} \right] \quad (29)$$

3. Półpasma płytowe obciążone siłą skupioną  $P$  w odległości  $y = \frac{a}{2}$  od osi  $x$  (rys. 12b). Utwardzenie zupełne brzegu płyty na odcinku  $c$ , symetrycznym względem osi  $y$ .



Rys. 12 a, b

\*) Woinowsky — Krieger: Beitrag zur Theorie durchlaufenden Platte, Ing. Arch. 1939.

Wyznaczono momenty utwierdzenia z równania całkowego (2) dla następujących stosunków  $c/a = \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$ .

Naniesiono je na rys. 12a, na którym dla porównania naniesiono również wykres momentów utwierdzenia dla wypadku  $c=a$  według wzoru (29).

Z wykresów momentów utwierdzenia wynika, że w miarę zmniejszania odcinka  $c$  momenty te wzrastają, w miarę zwiększenia odcinka  $c$  wykres momentów zbliża się do wykresu momentów przy utwierdzeniu brzegu  $y=b$  na całej jego długości.

### Résumé

#### Plaques rectangulaires avec les conditions aux limites mixtes

Dans le présent mémoire l'auteur donne la résolution précise de deux types de problèmes de la théorie des plaques minces, à voir:

1. Plaques rectangulaires à conditions aux limites différentes dans l'étendue de l'une des arêtes de la plaque (par exemple — un segment de l'arête est rigidement encastré tandis qu'un autre repose librement).

2. Plaques rectangulaires supportées d'une manière quelconque sur leur périmètre et reposant en outre sur des appuis linéaires dans les limites de la plaque.

Les problèmes de ce genre ont cette particularité que les conditions aux limites peuvent y être traduites par les équations intégrales de Fredholm de première espèce.

Le procédé de la résolution dudit problème y est expliqué sur un exemple tout simple d'une plaque en demi-bande.

(Praca wpłynęła do Redakcji 11. IX. 1951.)