

ARCHIWUM
MECHANIKI STOSOWANEJ
ARCHIVES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

TOM II

ZESZYT 2

WYDAWNICTWO
ZAKŁADU MECHANIKI BUDOWLI POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
GDAŃSK 1950

O pewnych szczególnych przypadkach wyboczenia płyt

Quelques cas particuliers de flambage des plaques

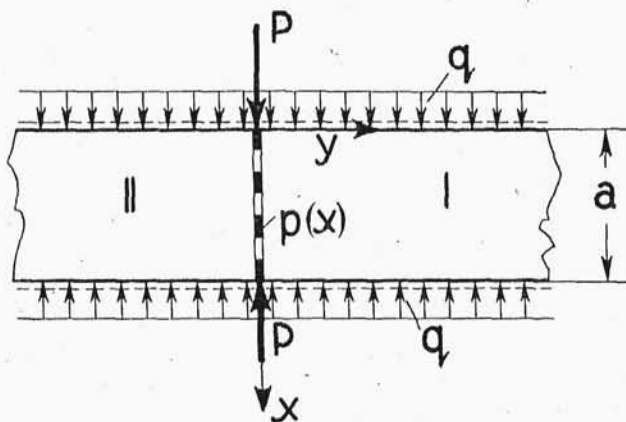
W. Nowacki, Gdańsk

O ile zagadnienie wyboczenia płyty prostokątnej wzdłuż brzegów podpartej jest już dostatecznie szeroko opracowane, tak co do rodzaju podparcia jak i obciążenia, o tyle zagadnienie stateczności płyty prostokątnej podpartej na obwodzie i na dodatkowych podporach punktowych nie było dotąd rozpatrywane.

W niniejszej pracy omówimy dwa proste wypadki: płyty prostokątnej i pasma płytowego, podpartych liniowo na brzegach i dodatkowo podpartych punktowo w obrębie płyty.

Przy tej sposobności rozwiązane zostaną pewne szczególne przypadki jednoczesnego ściskania i zginania względnie jednoczesnego zginania i rozciągania płyty.

A) Rozważmy pasmo płytowe, nieskończenie długie, jednocześnie ściskane siłami $q = \sigma_x \cdot h$ (h — grubość płyty) na krawędziach $x=0$, $x=a$ oraz siłami P działającymi w osi symetrii płyty, przy jednoczesnym obciążeniu $p(x)$, skierowanym prostopadle do płaszczyzny płyty (rys. 1).



Rys. 1

Równanie różniczkowe powierzchni odkształcenia płyty

$$\Delta \Delta w + \frac{q}{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

sprowadzimy przy założeniu $w = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}$, spełniającym warunki brzegowe na brzegu płyty $x=0$, $x=a$, do równania zwyczajnego liniowego, jednorodnego czwartego rzędu o postaci:

$$\frac{d^4 Y_n}{d\eta^4} - 2\nu^2 \frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} + \nu^2 \left(\nu^2 - \frac{a^2 q}{N} \right) Y_n = 0 \quad (2)$$

$$\eta = \frac{a}{y} \quad \xi = \frac{x}{a} \quad \nu = n\pi$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego przy uwzględnieniu warunków dla $y=\infty$ będzie funkcja:

$$Y_n(\eta) = A_n e^{-\gamma\eta} + B_n e^{-\kappa\eta} \quad \text{dla } \eta \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{gdzie } \gamma^2 = \nu^2 + \nu\varphi \quad \kappa^2 = \nu^2 - \nu\varphi \quad \varphi = \sqrt{\frac{q a^2}{N}} < \nu.$$

Warunki brzegowe zagadnienia kształtują się następująco:

1. Ze względu na symetrię powierzchni odkształcenia względem osi x :

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0. \quad (5)$$

2. Suma sił tnących na prawo i lewo od przekroju $y=0$ winna się równoważyć z obciążeniem $p(x)$. Stąd warunek

$$\left| P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right|_{y=0} = p(x). \quad (6)$$

Warunek ten, przy rozwinięciu obciążenia $p(x)$ w szereg Fouriera

$p(x) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} a_n \sin v \xi$, napiszemy w ostatecznej postaci:

$$-Pv^2 Y_n(0) + \frac{2N}{a} Y_n'''(0) = a_n a^2. \quad (6a)$$

Pierwszy warunek brzegowy daje: $B_n = -A_n \frac{\gamma}{\kappa}$. Wstawiając do równania (6a) wielkości $Y(0) = A_n \left(1 - \frac{\gamma}{\kappa}\right)$, $Y'''(0) = -A_n \gamma (\gamma^2 - \kappa^2)$ otrzymamy:

$$A_n = \frac{a_n a^3}{2N\gamma(\kappa^2 - \gamma^2) \left(1 - \frac{P}{P_n}\right)} \quad \text{gdzie } P_n = \frac{2N\gamma\kappa}{a v^2} (\kappa + \gamma) \quad (7)$$

Znajomość stałych A_n, B_n pozwala już na określenie powierzchni odkształcenia płyty:

$$w = \frac{a^3}{2N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{a_n}{v\kappa(\gamma^2 - \kappa^2) \left(1 - \frac{P}{P_n}\right)} \left(\gamma e^{-\kappa\eta} - \kappa e^{-\gamma\eta} \right) \sin v\xi. \quad (8)$$

Stałe a_n , współczynniki rozwinięcia Fouriera obciążenia $p(x)$ na funkcje x wyliczymy ze znanej zależności:

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

I tak dla obciążenia p jednostajnie rozłożonego wzdłuż odcinka a : $a_n = \frac{4p}{n}$ $n=1, 3, 5, \dots$; dla siły skupionej Q działającej

w odległości $x_0 = a\xi_0$ otrzymamy: $a_n = \frac{2Q}{a} \sin \frac{n\pi x_0}{a}$ $n=1, 2, \dots$

Jeśli pasmo płytowe jest rozciągane siłami jednostajnie rozłożonymi wzdłuż brzegów $x=0$; $x=a$, to w równaniu (1) i (2) w miejsce p należy wstawić $-p$; a funkcja $Y_n(\eta)$ przyjmie postać:

$$Y_n(\eta) = e^{-\gamma\eta} (A_n \cos \kappa\eta + B_n \sin \kappa\eta)$$

$$\text{gdzie } \bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{v^2 + v \sqrt{v^2 + \eta^2}} \quad \bar{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-v^2 + v \sqrt{v^2 + \eta^2}}.$$

Z warunków brzegowych (5) i (6) wyznaczamy stałe A_n , B_n .
W wyniku ostatecznym uzyskamy:

$$w = \frac{a^3}{4N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{a_n}{(\bar{\gamma}^2 + \bar{\kappa}^2) \bar{\gamma} \bar{\kappa} \left(1 - \frac{P}{P_n}\right)} e^{-\bar{\gamma} \eta} (\bar{\kappa} \cos \bar{\kappa} \eta + \bar{\gamma} \sin \bar{\kappa} \eta) \sin v \xi \quad (9)$$

$$\text{gdzie } P_n = \frac{4N}{a v^2} \bar{\gamma} (\bar{\gamma}^2 + \bar{\kappa}^2).$$

Zauważmy, że powierzchnia odkształcenia przyjmuje wartości dodatnie i ujemne; w przekroju podłużnym ($x = \text{const.}$) ugięcie przedstawia się jako szybko zanikająca fala.

W braku siły rozciągającej ($q=0$) otrzymamy przy $\bar{\gamma}=v$, $\bar{\kappa}=0$:

$$w = \frac{a^3}{4N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{a_n}{v^3 \left(1 - \frac{P}{P_n}\right)} e^{-v \eta} (1 + v \eta) \sin v \xi \quad (10)$$

$$\text{gdzie } P_n = \frac{4N \pi n}{a}.$$

Wreszcie dla $P=0$ otrzymamy znaną ze statyki płyt funkcję

$$w = \frac{a^3}{4N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{a_n}{v^3} e^{-v \eta} (1 + v \eta) \sin v \xi. \quad (11)$$

Znajomość funkcji $w(x, y)$ pozwoli dla każdego z omówionych przypadków wyznaczyć wszelkie składowe stanu napięcia.

Zatrzymajmy się jeszcze nad zagadnieniem wyboczenia pasma płyty bez dodatkowej punktowej podpory.

Ponieważ najmniejsza wartość krytyczna wyboczenia może nastąpić w jednej półfali ($n=1$), rozwiązaniem równania (1) będzie:

$$w = (A e^{-\bar{\gamma} \eta} + B e^{-\bar{\kappa} \eta}) \sin \pi \xi.$$

Pierwszy warunek brzegowy (5) daje i tu $B = -\frac{\gamma}{\kappa} A$; warunek (6a) jest jednorodnym warunkiem brzegowym:

$$-Pv^2 Y(0) + \frac{2N}{a} Y'''(0) = 0.$$

Z ostatniego warunku otrzymamy

$$P_k = \frac{2N}{av^2} \gamma \kappa (\gamma + \kappa) \quad v = \pi, \quad (12a)$$

W wypadku sił q rozciągających uzyskamy

$$\bar{P}_k = \frac{4N}{av^2} \gamma (\gamma^2 + \kappa^2) \quad v = \pi. \quad (12b)$$

Przy oznaczeniu $a = \frac{qa^2}{N\pi^2}$ napiszemy równania (12a, 12b) w postaci:

$$P_k = \frac{2N\pi}{a} \sqrt{1-a^2} [\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}] \quad (12a')$$

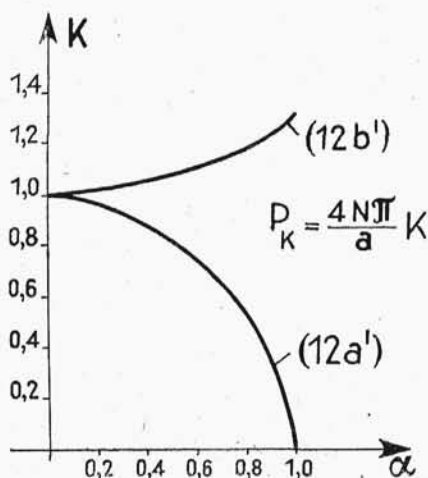
$$\bar{P}_k = \frac{2N\pi\sqrt{2}}{a} \sqrt{1+a^2} \sqrt{1+a^2}. \quad (12b')$$

Z równania (12a') wynika, że P_k przyjmie największą wartość $P_k = \frac{4N\pi}{a}$ dla $q=0$; największą wartością jaką przyjąć może q jest $\frac{N\pi^2}{a^2}$.

Siły rozciągające q zwiększają siłę krytyczną \bar{P}_k ; najmniejszą wartość $P_k = \frac{4N\pi}{a}$ otrzymamy dla $q=0$.

Powracając do postawionego na wstępie zadania rozpatrzmy wypadek wyboczenia pasma płytowego podpartego na brzegach $x=0$; $x=a$ oraz dodatkowo w sposób punktowy w punkcie $(x_0, 0)$.

Dla wartości sił podłużnych, znikomo większych od krytycznych płyta dozna wygięcia a w punkcie $(x_0, 0)$ powstanie reakcja



rys. 2

podporowa Q , przy czym łączne ugięcie spowodowane działaniem sił P i Q dla dowolnego punktu (x, y) wyrazi się równaniem (10):

$$w(\xi, \eta) = \frac{Q a^2}{2 N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v\eta} (1+v\eta)}{v^3 \left(1 - \frac{P}{P_n}\right)} \sin v_0 \xi \sin v \xi. \quad (10')$$

Dla punktu $(x_0, 0)$ winno być $w(\xi_0, 0) = 0$. Warunek ten prowadzi do związku:

$$\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 v \xi_0}{n^2(n-\lambda)} = 0 \quad \lambda = \frac{P a}{4 N \pi}. \quad (13)$$

Najmniejszy pierwiastek tego szeregu nieskończonego daje najmniejszą wartość siły krytycznej.

Jeżeli podpora punktowa jest podatna (podpora sprężysta) to równania (15) przyjmie postać:

$$\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 v \xi_0}{n^2(n-\lambda)} + \frac{2 N}{a^2} f = 0 \quad (13')$$

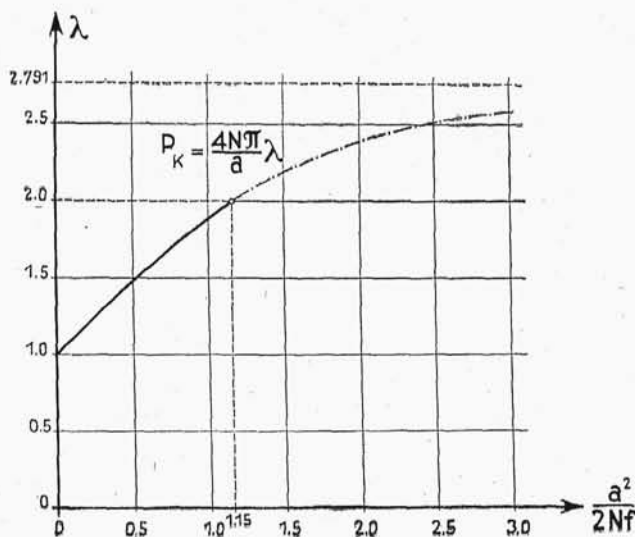
gdzie f jest skróceniem (względnie wydłużeniem) podpory sprężystej przy działaniu siły $Q=1$,

Rys. 3 podaje wykres siły krytycznej $P_{K, \min}$ dla wypadku podpory punktowej w połowie rozpiętości płyty ($\xi_0 = \frac{1}{2}$) w zależności od parametru $\frac{a^2}{2Nf}$.

Przy braku podpory sprężystej ($f=\infty$) otrzymujemy wartość $P_{K, \min} = \frac{4N\pi}{a}$; ze wzrostem sztywności podpory sprężystej wzrasta również siła krytyczna.

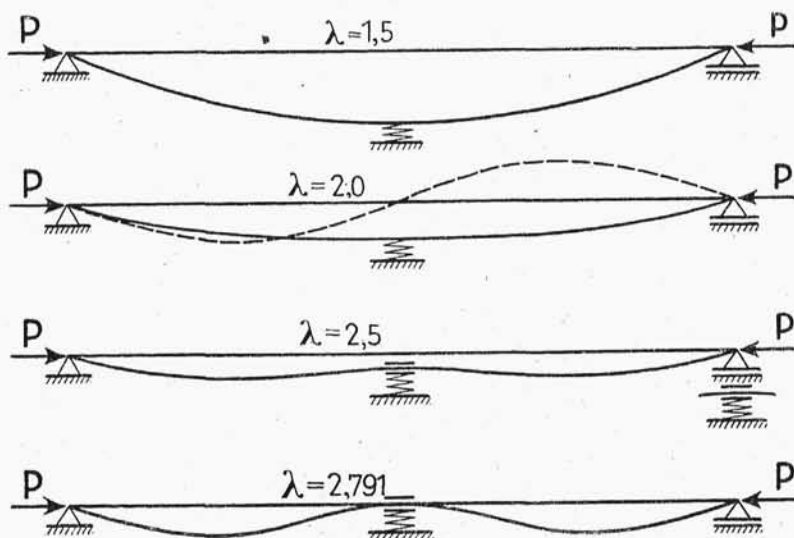
Dla $\frac{a^2}{2Nf} = 1,15$ otrzymujemy $P_{K, \min} = \frac{4N\pi}{a} \cdot 2$; możliwa tu jest symetryczna jak i antymetryczna postać wyboczenia (rys. 4b).

Jeśli podporę wykonstruujemy tak, aby możliwa była tylko symetryczna postać wyboczenia, to z dalszym wzrostem sztywności podpory siła krytyczna będzie wzrastać i dla $f=0$ (podpora niepodatna) otrzymamy $P_{K, \min} = \frac{4N\pi}{a} \cdot 2,791$.



rys. 3

Rys. 4 podaje postacie wybożenia płyty w przekroju $\eta=0$ dla $\lambda=1,9$; 2,0; i 2,791.



rys. 4

W wypadku dwóch podpór sprężystych w punktach $(\xi_1, 0)$, $(\xi_2, 0)$ otrzymamy układ dwóch równań

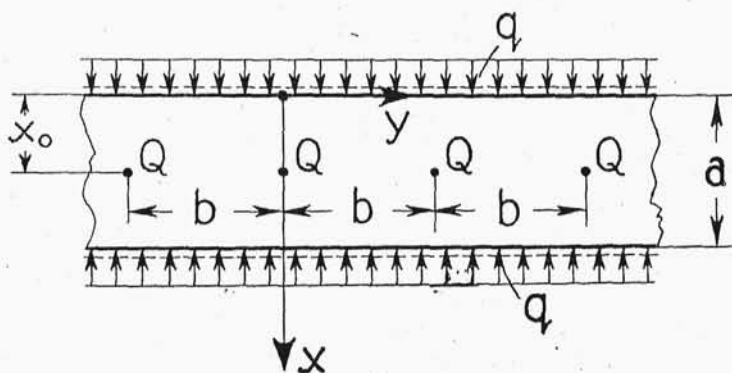
$$Q_1 \left[\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 v \xi_1}{n^2(n-\lambda)} + \frac{2Nf_1}{a^2} \right] + Q_2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin v \xi_1 \sin v \xi_2}{n^2(n-\lambda)} = 0 \quad (14)$$

$$Q_1 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin v \xi_1 \sin v \xi_2}{n^2(n-\lambda)} + Q_2 \left[\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 v \xi_2}{n^2(n-\lambda)} + \frac{2Nf_2}{a^2} \right] = 0$$

Tutaj Q_1 i Q_2 oznaczają reakcje podporowe, a f_1 skrócenie (wydłużenie) podpory sprężystej w punkcie $(\xi_1, 0)$ od stanu $Q_1=1$, f_2 skrócenie (wydłużenie) podpory w punkcie $(\xi_2, 0)$ od stanu $Q_2=1$.

Układ równań (14) będzie niesprzecznym, gdy wyznacznik układu równań będzie równy zero. Z wyznacznika układu drogą prób wyznaczmy najmniejszą wartość siły krytycznej.

Rozważmy dalej przypadek ściskania płyty siłami jednostajnie rozłożonymi na brzegu $x=0$, $x=a$ przy czym płyta podparta jest punktowo wzdłuż prostej $\xi=\xi_0$ w jednakowych odstępach b (rys. 5),



Rys. 5

W wypadku działania jednej tylko siły Q w punkcie $(\xi_0, 0)$ powierzchnię ugięcia płyty wyraża wzór:

$$w = \frac{Qa^2}{N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin v\xi_0}{\gamma\kappa(\gamma^2 - \kappa^2)} \gamma \left(e^{-\kappa\eta} - \kappa e^{-\gamma\eta} \right) \sin v\xi, \quad (8)$$

Dla nieskończonej ilości sił skupionych Q w jednakowych odstępach b otrzymamy:

$$w = \frac{Qa^2}{N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin v\xi_0}{\gamma\kappa(\gamma^2 - \kappa^2)} \left\{ \sum_{r=0,1,2,\dots}^{\infty} \left(\gamma e^{-\kappa(\eta + \eta_0 r)} - \kappa e^{-\gamma(\eta + \eta_0 r)} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{r=1,2,\dots}^{\infty} \left(\gamma e^{-\kappa(\eta_0 r - \eta)} - \kappa e^{-\gamma(\eta_0 r - \eta)} \right) \right\} \sin v\xi \quad \eta_0 = \frac{b}{a}.$$

W punkcie $(\xi_0, 0)$ otrzymamy, korzystając ze związków

$$\sum_{r=1,2,\dots}^{\infty} e^{-\kappa\eta_0 r} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctgh} \frac{\kappa\eta_0}{2} - 1 \right) \quad \sum_{r=1,2,\dots}^{\infty} e^{-\gamma\eta_0 r} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctgh} \frac{\gamma\eta_0}{2} - 1 \right)$$

następującą wartość ugięcia:

$$w(\xi_0, 0) = \frac{Qa^2}{N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 v \xi_0}{\gamma \kappa (\gamma^2 - \kappa^2)} \left(\gamma \operatorname{ctgh} \frac{\kappa \eta_0}{2} - \kappa \operatorname{ctgh} \frac{\gamma \eta_0}{2} \right).$$

W wypadku podpór niepodatnych, siłę krytyczną obliczymy z równania:

$$w(\xi_0, 0) = 0 \text{ albo } \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 v \xi_0}{v \varphi} \left[\frac{\operatorname{ctgh} \left(\frac{\eta_0}{2} \sqrt{v^2 - v \varphi} \right)}{\sqrt{v^2 - v \varphi}} - \frac{\operatorname{ctgh} \left(\frac{\eta_0}{2} \sqrt{v^2 + v \varphi} \right)}{\sqrt{v^2 + v \varphi}} \right] = 0. \quad (15)$$

Najmniejszy pierwiastek $\varphi^2 = \frac{qa^2}{N}$ ostatniego równania da nam najmniejszą wartość siły krytycznej.

Zauważmy, że w omawianym wypadku φ jest stale większe od π , ale niekoniecznie w każdym członie szeregu musi być $\varphi > n\pi = v$. Jeśli zatem w którymkolwiek z członów szeregu będzie $\varphi < v$, to w członie tym należy postawić

$$- \frac{\sin^2 v \xi_0}{v \varphi} \left[\frac{\operatorname{ctg} \left(\frac{\eta_0}{2} \sqrt{v \varphi - v^2} \right)}{\sqrt{v \varphi - v^2}} + \frac{\operatorname{ctgh} \left(\frac{\eta_0}{2} \sqrt{v^2 + v \varphi} \right)}{\sqrt{v^2 + v \varphi}} \right].$$

Dla wypadku szczególnego $b=a$, $\xi_0 = \frac{1}{2}$ wyliczono drogą prób

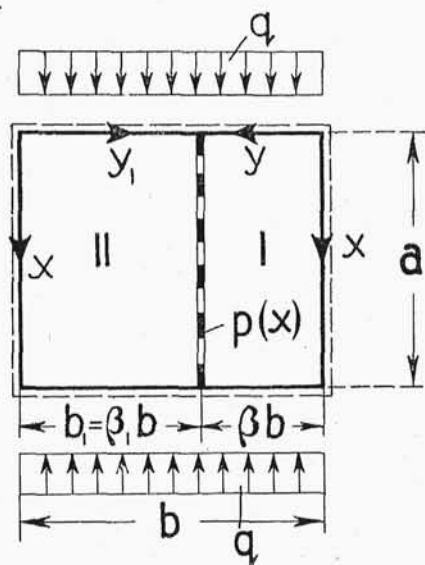
$q_{K, \min} = \frac{N\pi^2}{a^2}$ 6,20 dla symetrycznej postaci wyboczenia płyty. Dla

$b \rightarrow \infty$: $q_{K, \min} \rightarrow \frac{N\pi^2}{a^2}$. Dla $b \rightarrow 0$: $q_{K, \min} \rightarrow 8,16 \frac{N\pi^2}{a^2}$ przy symetrycznej

oraz $q_{K, \min} = \frac{4N\pi^2}{a^2}$ dla antymetrycznej postaci wyboczenia.

B) Rozważmy płytę prostokątną, dookoła swobodnie podpartą, podlegającą działaniu sił q jednostajnie rozłożonych na krawędziach $x=0$; $x=a$ przy jednoczesnym działaniu obciążenia liniowego $p(x)$, skierowanego w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty (rys. 6) ¹⁾.

¹⁾ W. Nowacki. Jednoczesne zginanie i ściskanie pewnego typu płyt ciągłych. Archiwum Mechaniki Stosowanej 1949. Tom I. Zeszyt 1.



Rys. 6

Wprowadźmy oznaczenia:

$$y = \eta b; \quad y_1 = \eta_1 b; \quad x = \xi b; \quad \alpha = \frac{b}{a};$$

$$b_1 = \beta_1 b; \quad v = n\pi\alpha \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\varphi = \frac{qb^2}{N\pi^2} \quad \delta = \frac{\varphi\pi^2}{v^2}$$

$$\lambda = v \sqrt{\sqrt{\delta} + 1} \quad \psi = v \sqrt{\sqrt{\delta} - 1} \quad \text{gdzie } \delta > 1.$$

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty I ma następującą postać:

$$\Delta \Delta w_I(\xi, \eta) + \varphi\pi^2 \frac{\partial^2 w_I(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} = 0 \quad (16)$$

$$\text{Funkcja } w_I = \sum_{1,2,\dots}^{\infty} (U_{1,n} \sinh \lambda \eta + U_{2,n} \sin \psi \eta) \cdot \sin v \xi \quad (17a)$$

spełnia równanie (16) oraz część warunków brzegowych, mianowicie warunki brzegowe na krawędziach $y=0$; $x=0$; $x=a$.

Podobnie funkcja

$$w_{II} = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (U'_{1,n} \sinh \lambda \eta + U'_{2,n} \sin \psi \eta) \sin v \xi \quad (17b)$$

spełnia warunki brzegowe na krawędziach $y_1=0$; $x=0$; $x=a$ oraz spełnia równanie różniczkowe odkształcenia płyty II.

W przekroju $y_1 = \beta_1 b$ powinny być spełnione warunki ciągłości płyty:

$$w_I = w_{II}; \quad \frac{\partial w_I}{\partial y} = -\frac{\partial w_{II}}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial^2 w_I}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_{II}}{\partial y_1^2} \quad (18a)$$

a ponad to warunek równowagi sił tnących q_q^I , q_g^{II} i $p(x)$:

$$N \left(\frac{\partial^3 w_I}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_{II}}{\partial y_1^3} \right) = -p(x) \quad (18b)$$

Z powyższych czterech warunków brzegowych, przy rozwinięciu $p(x)$ na szereg Fouriera: $p(x) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} a_n \sin v \xi$, otrzymamy kolejno

$$\left. \begin{aligned} U_{1,n} &= -\frac{a_n b^3}{N} \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + \psi^2) \cosh \lambda \beta [1 + \tanh \beta \lambda \operatorname{ctgh} \lambda \beta_1]} \\ U_{2,n} &= \frac{a_n b^3}{N} \cdot \frac{1}{\psi(\lambda^2 + \psi^2) \cos \psi \beta [1 + \tanh \psi \beta \operatorname{ctg} \psi \beta_1]} \\ U'_{1,n} &= U_{1,n} \frac{\sinh \lambda \beta}{\sinh \lambda \beta_1} \quad U'_{2,n} = U_{2,n} \frac{\sin \psi \beta}{\sin \psi \beta_1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Tym samym zagadnienie jednoczesnego ściskania i zginania płyty obciążeniem q i $p(x)$ jest rozwiązane.

Dodać należy, że założenie $\delta > 1$ może nie być spełnione dla wszystkich członów szeregu (17a) i (17b).

Gdyby w którym z członów było $\delta < 1$, to należy w miejsce ψ wstawić $i\varepsilon = \psi$; $i = \sqrt{-1}$ $\varepsilon = v\sqrt{1 - \sqrt{\delta}}$.

Odpowiedni człon równań (17a) i (17b) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} w_{I,n} &= (U_{1,n} \sinh \lambda \eta + U_{2,n} \sinh \varepsilon \eta) \sin v \xi \\ w_{II,n} &= (U'_{1,n} \sinh \lambda \eta_1 + U'_{2,n} \sinh \varepsilon \eta_1) \sin v \xi \end{aligned} \quad (20)$$

a stałe całkowania:

$$\begin{aligned} U_{1,n} &= -\frac{a_n b^3}{N} \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - \varepsilon^2) \cosh \lambda \beta [1 + \operatorname{tgh} \beta \operatorname{ctgh} \beta_1 \lambda]} \\ U_{2,n} &= \frac{a_n b^3}{N} \frac{1}{\varepsilon(\lambda^2 - \varepsilon^2) \cosh \varepsilon \beta [1 + \operatorname{tgh} \varepsilon \beta \operatorname{ctgh} \varepsilon \beta_1]} \\ U'_{1,n} &= U_{1,n} \frac{\sinh \lambda \beta}{\sinh \lambda \beta_1} \quad U'_{2,n} = U_{2,n} \frac{\sinh \varepsilon \beta}{\sinh \varepsilon \beta_1} \end{aligned} \quad (21)$$

W wypadku gdy $\delta=1$, to należy przyjąć:

$$\begin{aligned} w_{I,n} &= (A_{1,n} \varrho \eta + B_n \sinh \varrho \eta) \sin v \xi \\ \varrho &= v \sqrt{2} \end{aligned} \quad (22)$$

$$w_{II,n} = (A'_n \varrho \eta_1 + B'_n \sinh \varrho \eta_1) \sin v \xi$$

gdzie

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{b^3 a_n}{N} \frac{\sinh \varrho \beta_1}{\varrho^3 (\sinh \varrho \beta_1 \cosh \varrho \beta + \sinh \varrho \beta \cosh \varrho \beta_1)} \\ A_n &= B_n \frac{\sinh \varrho \beta \cosh \varrho \beta_1 - \cosh \varrho \beta \sinh \varrho \beta_1}{(1 - \beta/\beta_1) \sin \varrho \beta_1} \end{aligned} \quad (23)$$

$$A'_n = A_n \frac{\beta}{\beta_1}; \quad B'_n = B_n \frac{\sinh \varrho \beta}{\sinh \varrho \beta_1}$$

W wypadku jednoczesnego rozciągania i zginania płyty punktem wyjścia będzie równanie różniczkowe

$$\Delta \Delta w(\xi, \eta) - \varphi \pi^2 \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} = 0 \quad (24)$$

Rozwiązaniem tego równania będzie funkcja

$$w_I = \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} (A_n \cosh \gamma_n \sin \mu_n + B_n \sinh \gamma_n \cos \mu_n) \sin v\xi \quad (25)$$

dla płyty I, oraz

$$w_{II} = \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} A'_n \cosh \gamma_{n1} \sin \mu_{n1} + B'_n \sinh \gamma_{n1} \cos \mu_{n1} \sin v\xi \quad (26)$$

dla płyty II.

W ostatnich dwóch rozwiązaniach: $\gamma = \frac{v}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+\delta}+1}$
 $\mu = \frac{v}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+\delta}-1}.$

Stałe A_n, B_n, A'_n, B'_n wyznaczmy z warunków brzegowych (18a) i (18b).

Szczególnie interesującym staje się przypadek kiedy płyta dookoła swobodnie podparta, ściskana siłami $q = \text{const.}$ na krawędziach $x=0$; $x=a$ posiada dodatkowy punkt oparcia $A(x_0, \beta b)$. Zadanie to traktować można jako wypadek jednoczesnego ściskania i dodatkowego zginania płyty siłą Q (działającą w punkcie $(x_0, \beta b)$ z warunkiem dodatkowym: $w(x_0, \beta b) = 0$.

Tak postawione zadanie daje:

$$w(x_0, \beta b) = \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} (U_{1,n} \sinh \lambda\beta + U_{2,n} \sin \psi\beta) \sin v\xi_0 = 0 \quad (27)$$

przy czym wielkość a_n wchodząca w skład stałych $U_{1,n}$ i $U_{2,n}$ posiada wartość $\frac{2Q}{a} \sin v\xi_0$.

W wypadku szczególnym $\beta_1 = \beta = \frac{1}{2}$, $x_0 = a/2$ siłę krytyczną przy symetrycznej postaci wygięcia płyty otrzymamy jako najmniejszy pierwiastek równania:

$$\sum_{1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{v^3 \sqrt{\delta}} \left[\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} \sqrt{\sqrt{\delta} - 1} \right)}{\sqrt{\sqrt{\delta} - 1}} - \frac{\operatorname{tg} h \left(\frac{v}{2} \sqrt{\sqrt{\delta} + 1} \right)}{\sqrt{\sqrt{\delta} + 1}} \right] = 0. \quad (28)$$

I tu należy zaznaczyć, że dla poszczególnych członów szeregu parametr δ może być mniejszy lub równy jedności. W takim wypadku należy korzystać ze stałych całkowania podanych wzorami (21) i (23).

Na przykład dla $\delta < 1$ odpowiedni człon szeregu przyjmie postać:

$$\frac{1}{v^3 \sqrt{\delta}} \left[\frac{\operatorname{tgh} \left(\frac{v}{2} \sqrt{1 - \sqrt{\delta}} \right)}{\sqrt{1 - \sqrt{\delta}}} - \frac{\operatorname{tgh} \left(\frac{v}{2} \sqrt{1 + \sqrt{\delta}} \right)}{\sqrt{1 + \sqrt{\delta}}} \right]$$

Dla płyty kwadratowej wyznaczono drogą prób z równania (28) wartość

$$q_{\min.} = 16,19 \frac{N\pi^2}{a^2}$$

Podany powyżej sposób wyznaczania sił krytycznych płyty dookoła swobodnie podpartej oraz punktowo w punkcie $(x_0, \beta b)$ rozszerzyć można bez trudu na inne sposoby podparcia brzegów $y=0$, $y_1=0$ jak i na większą ilość podpór punktowych sprężystych.

Résumé

Quelques cas particuliers de flambage des plaques

Le présent mémoire porte sur la résolution de quelques cas de flexion et de compression (eventuellement de traction) simultanées d'une plaque, à savoir:

1. Cas d'une plaque en bande uniformément comprimée (ou bien soumise à la traction), sollicitée aux forces normales „ q ” et à la charge linéaire „ $p(x)$ ” perpendiculaire au plan de la plaque suivant l'axe „ X ”.

2. Cas d'une plaque rectangulaire reposant librement sur son périmètre, sollicitée à la compression longitudinale et à la contrainte linéaire sous charge „ $p(x)$ ”.

L'étude desdits cas permet de résoudre toute une série de cas de flambage d'une plaque qui, ayant des supports linéaires à ses bords, repose sur des appuis élastiques aux points d'appui se trouvant à l'intérieur du périmètre de la plaque.

(Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10. III. 1950 r.)