

P O L S K A A K A D E M I A N A U K

K O M I T E T I N Ż Y N I E R I I L Ą D O W E J

ARCHIWUM INŻYNIERII LĄDOWEJ

TOM II

ZESZYT 4

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

WARSZAWA

1956

Z ZAGADNIEŃ STATECZNOŚCI PRĘTÓW PROSTYCH I RUSZTÓW PŁASKICH

Witold Nowacki (Warszawa)

Wstęp

Tematem rozważań będzie stateczność rusztów płaskich. Rozważania te będą poprzedzone omówieniem wyboczenia pręta prostego, na którym przedstawiona zostanie metoda postępowania oraz opracowane zadania pomocnicze, wykorzystane następnie przy omawianiu stateczności rusztów. Zagadnienie stateczności pręta będzie sformułowane z jednej strony bardzo ogólnie, mianowicie przy dopuszczeniu dowolnej zmienności sił ściskających w obrębie pręta, z drugiej strony rozważania zostaną zacieśnione do prętów podpartych na końcach.

1. Stateczność pręta prostego

Równanie różniczkowe wyboczenia pręta prostego ma, jak wiadomo, postać:

$$(1.1) \quad EI \frac{d^4 w}{dx^4} + q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

gdzie

w — ugięcie pręta,

$q(x)$ — siła osiowa w punkcie o odciętej x ,

EI — sztywność pręta na zginanie.

Traktując wielkość — $q \frac{d^2 w}{dx^2}$ jako obciążenie zewnętrzne, przekształcimy równanie (1.1) do postaci całkowej:

$$(1.2) \quad w(x) = - \int_0^a q(\zeta) \frac{d^2 w(\zeta)}{d\zeta^2} \bar{w}(x, \zeta) d\zeta.$$

W powyższym związku $\bar{w}(x, \zeta)$ jest funkcją Greena, ugięciem w punkcie x pręta nie ściskanego siłami q , przy obciążeniu siłą skupioną $P = 1$,

działającą w punkcie o odciętej ζ . Wyrażenie (1.2) scałkujemy dwukrotnie przez części. Otrzymamy

$$(1.3) \quad w(x) = - \left| \bar{w}(x, \zeta) q(\zeta) \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \right|_0^a + \left| w(\zeta) \frac{d[q(\zeta) \bar{w}(x, \zeta)]}{d\zeta} \right|_0^a - \\ - \int_0^a w(\zeta) \frac{d^2[q(\zeta) \bar{w}(x, \zeta)]}{d\zeta^2} d\zeta.$$

Ponieważ dla prętów podpartych na końcach jest $w = 0$, $\bar{w} = 0$, zatem znikają dwa pierwsze człony po prawej stronie równości (1.3) i pozostaje nam

$$(1.4) \quad w(x) = - \int_0^a w(\zeta) \left[q(\zeta) \frac{d^2 \bar{w}(x, \zeta)}{d\zeta^2} + 2 \frac{dq(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\bar{w}(x, \zeta)}{d\zeta} + \right. \\ \left. + \bar{w}(x, \zeta) \frac{d^2 q(\zeta)}{d\zeta^2} \right] d\zeta.$$

Otrzymaliśmy równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju. Wprowadzając oznaczenia

$$q(\zeta) = \lambda r(\zeta),$$

gdzie λ jest wartością stałą oraz

$$K(x, \zeta) = r \frac{d^2 \bar{w}}{d\zeta^2} + 2 \frac{dr}{d\zeta} \frac{d\bar{w}}{d\zeta} + \bar{w} \frac{d^2 r}{d\zeta^2},$$

przepiszmy równanie całkowe (1.4) w postaci

$$(1.5) \quad w(x) = - \lambda \int_0^a w(\zeta) K(x, \zeta) d\zeta.$$

Rozwiązania równania (1.5) poszukiwać będziemy w postaci szeregu

$$(1.6) \quad w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin a_i x, \quad a_i = \frac{i\pi}{a},$$

gdzie a jest długością pręta.

Załóżmy najpierw swobodne podparcie końców pręta. W tym przypadku funkcja Greena $\bar{w}(x, \zeta)$ ma postać

$$(1.7) \quad \bar{w}(x, \zeta) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \zeta \sin a_n x}{\Delta_n},$$

gdzie $\Delta_n = E I a_n^4$.

Wstawiając (1.7) oraz (1.6) do równania całkowego, sprowadzimy je do układu nieskończonej ilości równań

$$(1.8) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a\Delta_i} \sum_{n=1,2}^{\infty} A_n G_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty,$$

gdzie

$$\begin{aligned} G_{ni} &= a_i^2 a_{ni} - b_{ni} - 2 a_i c_{ni}, \\ a_{ni} &= \int_0^a r(\zeta) \sin a_n \zeta \sin a_i \zeta d\zeta, \\ (1.8') \quad b_{ni} &= \int_0^a \frac{d^2 r}{d\zeta^2} \sin a_n \zeta \sin a_i \zeta d\zeta, \\ c_{ni} &= \int_0^a \frac{dr}{d\zeta} \cos a_i \zeta \sin a_n \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

Przyrównanie podstawowego wyznacznika układu równań (1.8) do zera jest warunkiem wyboczenia pręta. Do układu równań (1.8) sprowadzić można każde zagadnienie stateczności pręta na końcach swobodnie podpartego, poddanego działaniu sił q będących funkcją x . Zauważmy jeszcze, że układ (1.8) jest identyczny z układem, jaki otrzymuje się przy użyciu metody Ritza-Timoszenki, przy założeniu, że ugięcie pręta wyrazi się szeregiem nieskończonym (1.6).

Znacznie większe zainteresowanie budzi wyboczenie pręta na jednym swym końcu zupełnie utwierdzonego, na drugim swobodnie podpartego. Założmy, że utwierdzenie zupełnie występuje w punkcie $x = 0$.

Ugięcie pręta dla $\lambda > \lambda_{kr}$ przedstawi następujące niejednorodne równanie całkowe:

$$(1.9) \quad w(x) = -\lambda \int_0^a w(\zeta) K(x, \zeta) d\zeta + w_M(x),$$

gdzie $w_M(x)$ przedstawia ugięcie wywołane momentem utwierdzenia pręta w przekroju $x = 0$.

$$(1.10) \quad w_M(x) = \frac{2M}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \sin a_i x}{\Delta_i}.$$

Wstawiając (1.6), (1.7) i (1.10) do równania (1.9) otrzymamy następujący układ równań:

$$(1.11) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a\Delta_i} \sum_{n=1,2}^{\infty} A_n G_{ni} + \frac{2}{a} M \frac{a_i}{\Delta_i},$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty$$

Dobieramy teraz współczynniki A_i tak, aby był spełniony warunek utwierdzenia pręta:

$$\frac{dw(0)}{dx} = 0.$$

Warunek ten zapiszemy, zważywszy na (1.6), w postaci

$$(1.12) \quad \sum_{p=1}^{\infty} A_p a_p = 0.$$

Mnożąc obie strony równania (1.11) (w którym należy indeks i zamienić indeksem p) przez a_p i sumując od 1 do ∞ otrzymamy drugi układ równań:

$$(1.13) \quad \frac{2\lambda}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p}{\Delta_p} \sum_{n=1,2}^{\infty} A_n G_{np} + \frac{2}{a} M \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\Delta_p} = 0.$$

Eliminując z równań (1.11) i (1.13) wielkość momentu utwierdzenia M otrzymamy ostateczny układ równań

$$(1.14) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a\Delta_i} \sum_{n=1,2}^{\infty} A_n \left(G_{ni} - a_i \frac{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p G_{np}}{\Delta_p}}{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\Delta_p}} \right) \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Przyrównanie do zera wyznacznika głównego powyższego układu równań jest warunkiem wyboczenia pręta.

W szczególnym przypadku stałej siły ściskającej $r(\zeta) = r = 1$, $\lambda r = q = \text{const}$ otrzymamy przy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_n G_{ni} = A_i \frac{ar}{2} a_i^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p G_{np}}{\Delta_p} = \frac{ar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{a_n^3}{\Delta_n}$$

następujący układ równań

$$(1.15) \quad A_i = - \frac{\pi q a_i \sum_{n=1}^{\infty} A_n / a_n}{(\Delta_i - q a_i^2) a^2 \zeta(2)} = \frac{6 q a_i}{a^2 (q a_i^2 - \Delta_i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n},$$

gdzie $\zeta(2) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ jest wartością funkcji ζ Riemanna dla argumentu 2.

W tym szczególnym przypadku można z równań (1.11) i (1.13) wyeliminować współczynniki A_i i doprowadzić równanie do postaci

$$\frac{2}{a} M \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\Delta_p - q a_p^2} = 0.$$

Stąd przy $M \neq 0$ otrzymamy jako warunek wyboczenia wyrażenie:

$$(1.16) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\Delta_p - q a_p^2} = 0,$$

albo po prostych przekształceniach związek:

$$(1.16') \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_p - q a_p^2} + \frac{a^2}{6q} = 0,$$

zgodnie z wynikiem uzyskanym na innej drodze.

W przypadku utwierdzenia zupełnego obu końców pręta punktem wyjścia będzie równanie całkowe:

$$(1.17) \quad w(x) = -\lambda \int_0^a w(\zeta) K(x, \zeta) d\zeta + w_M(x) + w_M'(x),$$

gdzie $w_M'(x)$ jest ugięciem statycznym pręta, wywołanym działaniem momentu M' przyłożonym do przekroju $x = a$ pręta:

$$(1.18) \quad w_M' = -\frac{2}{a} M' \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cos i\pi}{\Delta_i} \sin a_i.$$

Wstawiając (1.6) (1.7) (1.10) i (1.18) do równania (1.17), otrzymamy następujący układ równań

$$(1.19) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a \Delta_i} \sum_{n=1,2}^{\infty} A_n G_{ni} + \frac{2}{a} \frac{M - M' \cos i\pi}{\Delta_i} a_i.$$

$i = 1, 2, \dots, \infty.$

Z warunków brzegowych

$$\frac{dw(0)}{dx} = 0, \quad \frac{dw(a)}{dx} = 0,$$

które napisać możemy w postaci:

$$(1.20) \quad \sum_{p=1}^{\infty} A_p a_p = 0, \quad \sum_{p=1}^{\infty} A_p a_p \cos p\pi = 0,$$

otrzymamy dwa dalsze równania, w których występować będzie M i M' . Eliminując z powyższych równań wielkości M i M' otrzymamy nieskoń-

czony układ równań w których wystąpią jedynie niewiadome A_i . Przyrównanie wyznacznika tego układu równań do zera jest warunkiem wyboczenia pręta.

Szczególnie prostą postać otrzymamy w przypadku symetrycznej postaci wyboczenia. Wtedy $M = M'$. Układ równań różni się od układu (1.14) jedynie tym, że i przyjmuje wartości nieparzyste. W przypadku antysymetrycznej postaci wyboczenia $M = M'$ otrzymamy układ, który różni się od (1.14) tym, że i przyjmuje wartości parzyste.

W przypadku stałej siły ściskającej i symetrycznej postaci wyboczenia słuszne są wzory (1.15) i (1.16) z tym, że dla i należy przyjąć $i = 1, 3, 5 \dots$ Oczywiście stosowanie przedstawionego tu sposobu wyznaczenia sił krytycznych ma sens praktyczny jedynie dla obciążenia q będącego funkcją x . Podane tu wzory (1.15) i (1.16) mają jedynie być sprawdzianem poprawności rozwiązania, jako jego przypadki nader szczególne. Wykazać bowiem bez trudu można, że sumowanie szeregu (1.16) prowadzi do równania przestępnego, którego najmniejszy pierwiastek jest znaną i bezpośrednio z równania różniczkowego otrzymywaną wartością siły krytycznej.

Rozpatrzmy przypadek pręta ściskanego siłami $q(\zeta)$ na dwu końcach swobodnie podpartego i dodatkowo podpartego na podporze sprężystej (o podatności sprężystej k), znajdującej się w odległości x od podpory lewej.

Równanie całkowe zadania przyjmie postać:

$$(1.21) \quad w(x) = -\lambda \int_0^a w(\zeta) K(x, \zeta) d\zeta + w_R(x),$$

gdzie $w_R(x)$ jest ugięciem wywołanym przez siłę R wzajemnego oddziaływania pręta na podporę sprężystą:

$$(1.22) \quad w_R = \frac{2R}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_i x \sin \alpha_i \bar{x}}{\Delta_i}$$

Wstawiając (1.6) (1.7) i (1.22) do równania całkowego (1.21) otrzymamy po wykonaniu następujący układ równań:

$$(1.23) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a \Delta_i} \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_{ni} + \frac{2R}{a} \frac{\sin \alpha_i \bar{x}}{\Delta_i},$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty$$

Z warunku jednakowego ugięcia pręta i podpory sprężystej w punkcie \bar{x} , tj. z warunku:

$$(1.24) \quad \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin \alpha_p \bar{x} + R/k = 0,$$

otrzymamy następujący związek:

$$(1.25) \quad \frac{2\lambda}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin a_p \bar{x}}{\Delta_p} \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_{np} + \frac{2R}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_p \bar{x}}{\Delta_p} + \frac{R}{k} = 0.$$

Eliminując z równań (1.23) i (1.25) wielkość R uzyskamy nieskończony układ równań:

$$(1.26) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a \Delta_i} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(G_{ni} - \sin a_i \bar{x} \frac{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin a_p \bar{x}}{\Delta_p} G_{np}}{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_p \bar{x}}{\Delta_p} + \frac{a}{2k}} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Przyrównanie głównego wyznacznika układu (1.26) do zera jest warunkiem wyboczenia pręta. W szczególnym przypadku $k = \infty$ układ równań (1.26) odnosi się do przypadku wyboczenia pręta dwuprzęsłowego ze stałą podporą w punkcie \bar{x} . W przypadku symetrycznej postaci wyboczenia (przy $\bar{x} = a/2$, $k = \infty$) realizować będziemy przypadek utwierdzenia zupełnego pręta w przekroju $x = a/2$. Jeżeli przesunąć niepodatną podporę środkową bezpośrednio do lewego końca belki ($\sin a_p \bar{x} \approx a_p \bar{x}$), to układ równań (1.26) przekształci się na układ (1.14); zrealizujemy zatem przypadek zupełnego utwierdzenia pręta w przekroju $x = 0$ i swobodnie podpartego w przekroju $x = a$. Dowodzi to słuszności wyprowadzenia układu równań (1.14) podanym uprzednio sposobem.

Rozważmy jeszcze przypadek szczególny siły ściskającej: $r(\zeta) = r = 1$, $\lambda r = q$. Tutaj jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n G_{ni} = \frac{ar}{2} a_i^2 A_i, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p \bar{x}}{\Delta_p} G_{np} = \frac{ar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n a_n^2 \sin a_n \bar{x}}{\Delta_n}$$

Układ równań (1.27) uprości się do postaci

$$(1.27) \quad A_i = - \frac{q \sin a_i \bar{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n a_n^2 \sin a_n \bar{x}}{\Delta_n}}{(\Delta_i - q a_i^2) \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_p \bar{x}}{\Delta_p} + \frac{a}{2k} \right)}$$

lub też eliminując z równań (1.23) i (1.25) współczynniki A_i do dogodniejszej postaci

$$(1.28) \quad \frac{2q}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \bar{x}}{(\Delta_n - q a_n^2) a_n^2} + EI \left(\delta_{,1} + \frac{1}{k} \right) = 0,$$

gdzie

$$EI \delta_{11} = \frac{2}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_p \bar{x}}{a_p^4}.$$

Szereg występujący w równaniu (1.28) daje się zsumować i w rezultacie otrzymamy dla wyznaczenia siły krytycznej równanie przestępne.

Podany tu sposób można uogólnić na większą ilość podpór sprężystych. Oznaczając reakcje podpór sprężystych przez R_j ($j = 1, 2, \dots, r$), a ich podatności sprężyste przez k_j , napiszemy równanie całkowe w postaci

$$(1.29) \quad w(x) = -\lambda \int_0^a w(\xi) K(x, \xi) d\xi + \sum_{j=1}^{j=r} w_{Rj}(x),$$

gdzie

$$w_{Rj}(x) = \frac{2 R_j}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i \bar{x}_j \sin a_i x}{\Delta_i},$$

$$j = 1, 2, \dots, r.$$

Równanie całkowe doprowadzamy do układu równań:

$$(1.30) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a \Delta_i} \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_{ni} + \frac{2}{a \Delta_i} \sum_{j=1}^{j=r} R_j \sin a_i \bar{x}_j, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Z warunków wspólnego ugięcia pręta i podpory sprężystej w punktach $x = \bar{x}_p$ ($p = 1, 2, \dots, r$):

$$(1.31) \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin a_i \bar{x}_p + \frac{R_p}{k_p} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, r$$

otrzymamy r równań

$$(1.32) \quad \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i \bar{x}_p}{\Delta_i} \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_{ni} + \sum_{j=1}^{j=r} R_j \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i \bar{x}_p \sin a_i \bar{x}_j}{\Delta_i} + \frac{a R_p}{2 k_p} = 0,$$

$$p = 1, 2, \dots, r.$$

Z układu równań (1.30) i (1.32) należy wyeliminować R_j . Przyrównanie do zera wyznacznika w ten sposób uzyskanego nieskończonego układu równań jest warunkiem wyboczenia.

Rozważmy wreszcie przypadek ciągłego sprężystego podłoża, przy czym założmy, że współczynnik podłoża zmienia się wzdłuż osi pręta.

Równanie różniczkowe ma tu postać:

$$(1.33) \quad EI \frac{d^4 w}{dx^4} + q \frac{d^2 w}{dx^2} + k w = 0,$$

a przynależne temu równaniu równanie całkowe:

$$(1.34) \quad w(x) = -\lambda \int_0^a K(x, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \int_0^a k(\zeta) \bar{w}(\zeta, x) w(\zeta) d\zeta.$$

Wstawiając do równania (1.34) wyrażenia (1.6) (1.7) sprowadzimy to równanie do układu równań liniowych:

$$(1.35) \quad A_i = \frac{2}{a \Delta_i} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (G_{ni} \lambda - \mu \bar{a}_{ni}), \quad i = 1, 2, \dots, \infty,$$

gdzie

$$k(\zeta) = \mu t(\zeta),$$

a

$$\bar{a}_{ni} = \int_0^a t(\zeta) \sin \alpha_i \zeta \sin \alpha_n \zeta d\zeta.$$

W przypadku $k = \text{const}$ układ (1.35) uprości się do postaci

$$(1.36) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a(\Delta_i + \mu)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Nie rozwijamy dalej tematu stateczności pręta spoczywającego na sprężystym podłożu. Widocznym jest, że możemy tu powtórzyć wszelkie rozważania, które przeprowadziliśmy dla pręta nie spoczywającego na sprężystym podłożu. Bez trudu ustawimy tu odpowiednie układy równań dla przypadku utwierdzenia zupełnego końców pręta, czy też dla podparcia pręta na ciągłym sprężystym podłożu dodatkowymi podporemami sprężystymi.

W zagadnieniach wyboczenia pręta można się wreszcie spotkać z przypadkiem wyboczenia, spowodowanym wpływem ciężaru własnego pręta. W tym szczególnym przypadku równanie (1.33) przyjmie postać:

$$(1.37) \quad EI \frac{d^4 w}{dx^4} + px \frac{d^2 w}{dx^2} + p \frac{dw}{dx} + kw = 0.$$

Przyjęliśmy tu, że p jest ciężarem własnym pręta, odniesionym do jednostki jego długości oraz że siła ciężkości działa w kierunku osi x . W przekroju x działa siła ściskająca $q = px$.

Przekształcamy równanie (1.37) na równanie całkowe. W wyniku otrzymamy

$$(1.38) \quad w(x) = -p \int_0^a \bar{K}(x, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \int_0^a k(\zeta) \bar{w}(x, \zeta) w(\zeta) d\zeta,$$

gdzie

$$\bar{K}(x, \zeta) = \zeta \frac{d^3 w}{d \zeta^2} + \frac{dw}{d \zeta}.$$

Rozwiązaniem tego równania całkowego będzie nieskończony układ równań:

$$(1.39) \quad A_i = \frac{2}{a \Delta_i} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\bar{G}_{ni} p - \mu \bar{a}_{ni}), \quad i = 1, 2, \dots, \infty,$$

gdzie \bar{a}_{ni} i μ ma takie samo znaczenie jak w związku (1.35). Dalej mamy

$$\bar{G}_{ni} = a_i^2 a_{ni} - 2 a_i c_{ni},$$

gdzie a_{ni} , c_{ni} bierzemy ze wzorów (1.8'), kładąc w nich

$$r(\zeta) = \zeta.$$

2. Wyboczenie rusztów płaskich

W niniejszym ustępie pracy zajmiemy się statecznością rusztów składających się z układu wzajemnie prostopadłych poprzecznic i podłużnic. Ograniczymy się do takich układów, w których co najwyżej w jednym kierunku pręty są dostatecznie gęsto ułożone, tak że można traktować podłużnice jako pręty spoczywające na sprężystym ośrodku, złożonym z szeregu poprzecznic lub odwrotnie. Droga ta obierana w zagadnieniach statyki i stateczności rusztów [1] [2], a polegająca na traktowaniu zagadnień nieciągłych jako zagadnień częściowo lub całkowicie ciągłych, doprowadziła w wielu przypadkach do przybliżonych, ale dla praktyki wystarczających wyników. Niech będzie dany ruszt składający się z szeregu poprzecznic o jednakowej sztywności na zginanie EI i długości b oraz z jednej podłużnicy o sztywności EJ i długości a . Niech podłużnica ścisnana będzie siłami $q(x)$. Na razie założmy, że podłużnica jest na końcach swobodnie podparta. (Rys. 1).

Traktując poprzecznicę jako równomiernie rozłożone podłoże sprężyste, możemy przedstawić równanie ugięcia podłużnicy dla $q > q_{kr}$ w postaci [2]:

$$(2.1) \quad EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + q \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\beta_{11}}{a_1} w = 0.$$

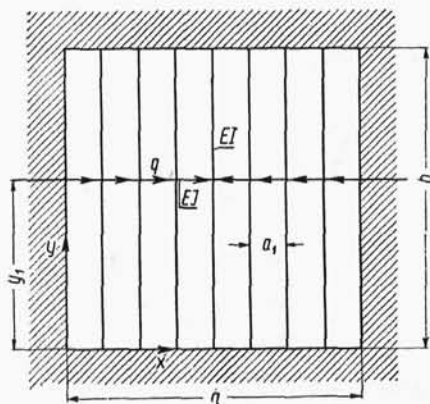
Tutaj $\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}}$, gdzie δ_{11} jest ugięciem poprzecznicy w punkcie (x, y_1) wywołanym działaniem siły jednostkowej $P = 1$; wielkość β_{11} jest reakcją podpory środkowej poprzecznicy (traktowanej tu jako belka

dwuprzęsłowa z podporą w punkcie (x, y_1) , wywołaną przesunięciem podpory w górę o wielkość równą jedności.

Równanie (2.1) przekształcimy w równanie całkowe:

$$(2.2) \quad w(x) = -\lambda \int_0^a K(x, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \frac{\beta_{11}}{a_1} \int_0^a w(\zeta) \bar{w}(x, \zeta) d\zeta.$$

Oznaczenia λ , $K(x, \zeta)$, $\bar{w}(x, \zeta)$, są identyczne z oznaczeniami wprowadzonymi w części pierwszej pracy. W kształcie swym równanie (2.2) jest



Rys. 1

identyczne z równaniem (1.34), jeśli w nim położyć $k = \text{const} = \beta_{11}/a_1$.

Możemy zatem od razu wypisać końcowe rozwiązanie równania (2.2), wzorując się na układzie równań (1.36). W naszym przypadku jest

$$(2.3) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a(\Delta_i + \beta_{11}/a_1)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Przyrównanie do zera głównego wyznacznika układu równań (2.3) jest warunkiem wyboczenia rusztu.

W nader szczególnym przypadku $q = \text{const}$ jest $G_{ni} = \frac{2a_i^2}{a}$, $i = n$.

Układ równań (2.3) uprości się do postaci [2]:

$$(2.4) \quad q_{kr} = EJ a_i^2 + \beta_{11}/a_1 a_i^2$$

Założmy teraz, że podłużnica jest zupełnie utwierdzona w przekroju $x = 0$, a swobodnie podparta w przekroju $x = a$. Równanie całkowe zagadnienia różnić się będzie od równania (1.9) jedynie członem dodat-

kowym — $\frac{\beta_{11}}{a_1} \int_0^a w(\zeta) \bar{w}(x, \zeta) d\zeta$.

Łatwo przekonać się, że równanie to sprowadzić możemy do nieskończonego układu równań

$$(2.5) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a D_i} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(G_{ni} - a_i \frac{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_p}{D_p} G_{np}}{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{D_p}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, \infty,$$

gdzie

$$D_i = \Delta_i + \beta_{11}/a_1.$$

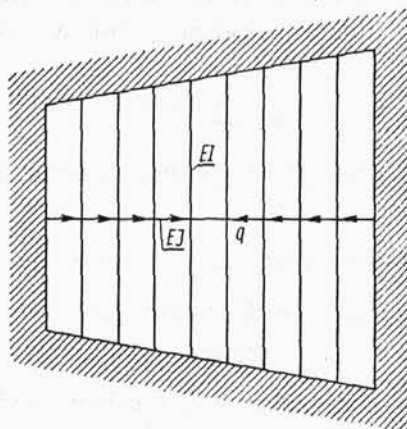
W przypadku szczególnym, gdy $q = \text{const}$, warunek wyboczenia rusztu wypisać możemy w postaci

$$(2.6) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{\Delta_p + \frac{\beta_{11}}{a_1} - q \alpha_p^2} = 0$$

lub

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_p + \frac{\beta_{11}}{a_1} - q \alpha_p^2} + \frac{a^2}{6q} = 0.$$

Rozpatrzmy wreszcie ruszt z jedną podłużnicą (rys. 2) o sztywności EJ i ściskany siłami $q(x)$. Niech poprzecznice (ustawione dostatecznie gęsto) mają rozmaite sztywności zginania i niech będą rozmieszczone w różnych odstępach a_1 . W tym przypadku wielkość β_{11} będzie zmieniać się



Rys. 2

skokowo wzdłuż podłużnicy. Załóżmy, że zmienność $\beta_{11}(x)$ da się aproksymować krzywą ciągłą. $\beta_{11}(x) = \mu t(x)$, gdzie μ jest wartością stałą. Równanie całkowe zagadnienia przyjmie tu postać

$$(2.7) \quad w(x) = -\lambda \int_0^a K(x, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \frac{\mu}{a_1} \int_0^a t(\zeta) \bar{w}(x, \zeta) w(\zeta) d\zeta.$$

Równanie to przez analogię ze wzorem (1.34) sprowadzimy do nieskończonego układu równań:

$$(2.8) \quad A_i = \frac{2}{a \Delta_i} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(G_{ni} \lambda - \frac{\mu \bar{a}_{ni}}{a_1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, \infty,$$

gdzie

$$\bar{a}_{ni} = \int_0^a t(\zeta) \sin \alpha_i \zeta \sin \alpha_n \zeta d\zeta.$$

Zauważmy, że przy $q = \text{const}$, $G_{ni} = \frac{\alpha_i^2 a}{2}$ $i = n$ otrzymamy układ równań

$$(2.9) \quad A_i = -\frac{2\mu}{a a_1 (\Delta_i - q \alpha_i^2)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{a}_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

W przypadku r podłużnic o sztywnościach EJ_k , ściskanych siłami $q_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, r$, oraz przy dostatecznie gęsto i w jednakowych odstępach rozmieszczonych poprzecznicach ugięcie rusztu dla $q > q_{kr}$ wyrażone będzie układem równań różniczkowych [2]

$$(2.10) \quad EJ_k \frac{d^4 w_k}{dx^4} + q_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} + \frac{1}{a_1} \sum_{j=1}^{j=r} \beta_{kj} w_j = 0.$$

$$k = 1, 2, \dots, r.$$

Tutaj w_k oznacza ugięcie k -tej podpory; β_{kj} wyraża reakcję podporową j -tej podpory poprzecznic (traktowanej jako belka na $r+2$ podporach), wywołaną przesunięciem k -tej podpory poprzecznic w górę o wartość równą jedności. Wielkości β_{kj} łatwo obliczymy stosując znane metody statyki belek ciągłych. Zastępując równanie (2.10) równoważnym jemu równaniem całkowym i wprowadzając przy założeniu swobodnego podparcia końców podłużnic związki

$$w_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{(k)} \sin \alpha_i x$$

sprowadzimy równanie całkowite zagadnienia do nieskończonego układu równań:

$$(2.11) \quad A_i^{(k)} = \frac{2\lambda_k}{a \Delta_i^{(k)}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(k)} G_{ni}^{(k)} - \frac{1}{a_1 \Delta_i^{(k)}} \sum_{j=1}^{j=r} \beta_{kj} A_i^{(j)}$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

W szczególnym przypadku $q_k = \text{const}$ układ powyższy uprości się znacznie:

$$(2.9a) \quad A_i^{(k)} = - \frac{1}{a_1 (\Delta_i^{(k)} - a_i^2 q_k)} \sum_{j=r}^{j=r} \beta_{kj} A_i^{(j)}.$$

Szczegółowiej rozpatrzmy przypadek rusztu składającego się z dwu jednakowych podłużnic, obciążonego siłami $q(x)$. Jeżeli podłużnice będą ponadto umieszczone symetrycznie względem prostej $y = b/2$, to linie ugięcia obu podłużnic będą jednakowe.

Zatem układ (2.11) przyjmie postać

$$(2.3a) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a \left[\Delta_i + \frac{1}{a_1} (\beta_{11} + \beta_{12}) \right]} \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

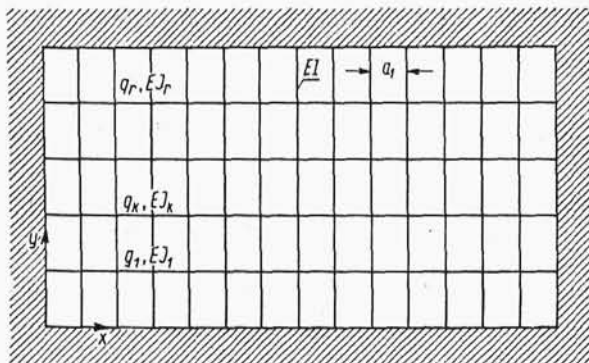
W przypadku szczególnym $q = \text{const}$ otrzymamy z (2.11):

$$(2.12) \quad q = E J a_i^2 + \frac{\beta_{11} + \beta_{12}}{a_1 a_i^2}.$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Zbadać należy jeszcze, dla jakiej wartości i przyjmie q najmniejszą wartość, wartość siły krytycznej q_{kr} .

Jest widoczne, że rozważania nasze dadzą się rozszerzyć na przypadek



Rys. 3

rusztu, w którym wielkości β_{kj} można przedstawić funkcjami zmiennej x .

Rozpatrzmy wreszcie ruszt przedstawiony na rys. 3 przy założeniu, że podłużnice są utwierdzone zupełnie w przekrojach $x = 0$. Dla $q > q_{kr}$ zgięcie rusztu określone jest układem równań różniczkowych (2.10) lub też następującym układem równań całkowych.

$$(2.13) \quad w_k(x) = -\lambda_k \int_0^a w_k(\zeta) K^{(k)}(x, \zeta) d\zeta - \\ - \frac{1}{a_1} \sum_{j=1}^{j=r} \beta_{kj} \int_0^a w_j(\zeta) \bar{w}_k(x, \zeta) d\zeta + w_{M_k}(x),$$

gdzie $w_{M_k}(x)$ jest ugięciem k -tej podłużnicy, wywołanej działaniem momentu M_k w przekroju $x = 0$.

Układ równań (2.13) sprowadzimy do r układów równań

$$(2.14) \quad A_i^{(k)} = \frac{2\lambda_k}{a\Delta_i^{(k)}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(k)} G_{ni}^{(k)} - \frac{1}{a_1\Delta_i^{(k)}} \sum_{j=1}^{j=r} \beta_{kj} A_i^{(j)} + M_k \frac{a_i}{\Delta_i^{(k)}}, \\ i = 1, 2, \dots, \infty, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Z warunków brzegowych $\frac{dw_k(0)}{dx} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r$
albo inaczej z warunków

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p^{(k)} a_p = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r$$

otrzymamy r równań:

$$(2.15) \quad \frac{2\lambda_k}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p}{\Delta_p^{(k)}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(k)} G_{pn}^{(k)} - \sum_{j=1}^{j=r} \beta_{kj} \frac{A_p^{(j)}}{\Delta_p^{(k)}} + M_k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\Delta_p^{(k)}} = 0, \\ k = 1, 2, \dots, r.$$

Eliminując z równań (2.14) i (2.15) współczynniki M_k otrzymamy jeden układ równań o współczynnikach $A_i^{(k)}$.

W szczególnym przypadku stałych sił ściskających q_k otrzymamy, eliminując z (2.14) i (2.15) współczynniki M_k , następujący układ równań

$$(2.17) \quad A_i^{(k)} = -\frac{1}{a_1\Delta_i^{(k)}} \sum_{j=1}^{j=r} \beta_{kj} \left(A_i^{(j)} - a_i \frac{\sum_{p=1}^{\infty} A_p^{(j)} \frac{a_p}{\Delta_p^{(k)}}}{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\Delta_p^{(k)}}} \right), \\ \bar{\Delta}_p^{(k)} = \Delta_p^{(k)} - q_k a_p^2 \\ i = 1, 2, \dots, \infty, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

W szczególnym przypadku dwu jednakowych i w jednakowy sposób ściskanych podłużnic, symetrycznie ułożonych względem prostej $y = b/2$ jest $A_i^{(1)} = A_i^{(2)} = A_i$. Zatem przy $q = \text{const}$, otrzymamy

$$(2.18) \quad A_i = - \frac{a_i (\beta_{11} + \beta_{12})}{a_1 \left(\bar{\Delta}_i + \frac{\beta_{11} + \beta_{12}}{a_1} \right)} \frac{\sum_{p=1}^{\infty} A_p \frac{a_p}{\bar{\Delta}_p}}{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\bar{\Delta}_p}}, \quad \bar{\Delta}_p = \Delta_p - q a_p^2, \\ i = 1, 2, \dots, \infty.$$

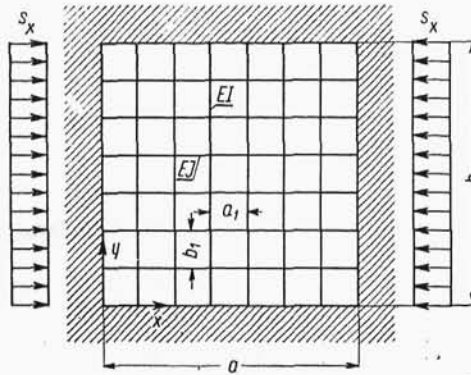
Jeśli z równań (2.14) i (2.15) wyeliminować współczynniki A_i to warunek wyboczenia rusztu można również zapisać w postaci szeregu

$$(2.19) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\Delta_p + \frac{1}{a_1} (\beta_{11} + \beta_{12}) - q a_p^2} = 0.$$

Przedstawiony tu sposób postępowania może znaleźć zastosowanie jedynie w przypadku dwu, a najwyżej trzech symetrycznie ułożonych i w jednakowy sposób obciążonych podłużnic. Przy większej ilości podłużnic nakład pracy rachunkowej tak niepomrotnie wzrasta, że trzeba szukać innych metod przybliżonego rozwiązania.

Podamy tu rozwiązanie dla przypadku znacznej ilości podłużnic o jednakowych przekrojach, w równych odstępach rozmieszczonych i ściskanych jednakowymi siłami $q(x)$.

Podłużnice niech posiadają również jednakowe wymiary i będą rozmieszczone dostatecznie gęsto w odstępach jednakowych b_1 (rys. 4).



Rys. 4

W tym przypadku możemy zastąpić ruszt modelem ortotropowej płyty, nie posiadającej sztywności na skręcanie, o równaniu powierzchni ugięcia:

$$(2.20) \quad D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + s_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

gdzie $w(x, y)$ — rzędna ugięcia,

D_x, D_y — sztywność na zginanie płyty w kierunkach x, y ,
 s_x — obciążenie ściskające w kierunku osi x , jednostajnie rozłożone
na krawędziach $x = 0, x = a$ i będące funkcją jedynie zmiennej x .

Przejście od płyty ortotropowej do rusztu dane jest związkami

$$EJ = b_1 D_x, \quad EI = a_1 D_y, \quad q = b_1 s_x,$$

a równanie (2.20) przyjmie postać [2]:

$$(2.21) \quad \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{q}{b_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Wstawiając do (2.21): $w(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ zastąpimy równanie (2.21) układem dwu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(2.22) \quad Y^{IV} - \omega^4 Y = 0 \quad EJ X^{IV} + q X'' + k X = 0.$$

$$\text{gdzie } \omega^4 = \frac{\beta^4 a_1}{EI}, \quad k = b_1 \beta^4,$$

a β jest parametrem, który należy jeszcze określić.

Pierwsze z równań układu (2.22) można traktować jako równania różniczkowe drgań swobodnych poprzecznic o długości b i sztywności $\frac{EI}{a_1}$. Ponieważ wyboczenie rusztu nastąpi według jednej półfali w kierunku osi y , interesować nas będzie najmniejsza częstotliwość drgań własnych $\omega = \omega_1$.

Wiadomo z teorii drgań swobodnych pręta, że

$$\begin{aligned} \omega_1 b &= \pi && \text{dla pręta obustronnie swobodnie podpartego,} \\ \omega_1 b &= 4,730 && \text{dla pręta obustronnie utwierdzonego zupełnie,} \\ \omega_1 b &= 3,927 && \text{dla pręta w jednym końcu swobodnie podpartego,} \\ &&& \text{w drugim utwierdzonego zupełnie,} \\ \omega_1 b &= 1,875 && \text{dla pręta w jednym końcu swobodnego, w drugim} \\ &&& \text{utwierdzonego zupełnie.} \end{aligned}$$

W zależności od założonych warunków brzegowych dla poprzecznic przyjmujemy wartość ω_1 i wyliczamy parametr β ze związku

$$\beta^4 = \frac{EI}{a_1} \omega_1^4.$$

Drugie z równań (2.22) traktować możemy jako równanie wyboczenia pręta spoczywającego na sprężystym podłożu o stałej podłoża $k = b_1 \beta^4$. Ma ono postać identyczną z równaniem (1.33). Możemy więc skorzystać ze wzoru (1.36) jako rozwiązania naszego zadania. Jeśli przyjąć, że

$$X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin a_i x, \quad \text{co spełnia warunki brzegowe, doprowadzimy rozwiązanie drugiego z równań (2.22) do układu nieskończonego równań:}$$

$$(2.22) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a(\Delta_i + k)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad k = b_1 \beta^4.$$

W szczególnym przypadku gdy $q = \text{const}$, znajdziemy siłę krytyczną ze wzoru:

$$q = \frac{\Delta_i + k}{a_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty,$$

zgodnie ze znanym wynikiem [2].

Również bez trudu znajdziemy układ równań dla przypadku utwierdzenia zupełnego rusztu w przekroju $x = 0$:

$$(2.24) \quad A_i = \frac{2\lambda}{a(\Delta_i + k)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(G_{ni} - a_i \frac{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p G_{np}}{\Delta_p + k}}{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p}{\Delta_p + k}} \right) \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Łatwo wykazać można, że dla $q = \text{const}$ wyznacznik układu równań (2.24) daje się sprowadzić do wyrażenia

$$(2.25) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\Delta_p + k - a_p^2 q} = 0.$$

Rozpatrzmy wreszcie ruszt składający się jak na rys. 4 z podłużnic i poprzecznic ułożonych w sposób regularny, ale ściskanych w dwu kierunkach. Oznaczając stosownie do kierunku osi współrzędnych przez $q(x)$ siłę podłużną w podłużnicach, przez $r(y)$ siłę podłużną w poprzecznicach, napiszemy równanie różniczkowe ugięcia rusztu w postaci:

$$(2.26) \quad \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{q}{b_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{r}{a_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Poszukując rozwiązania w postaci $w(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ otrzymamy dwa układy równań

$$(2.27) \quad \frac{EI}{a_1} Y^{IV} + \frac{r}{a_1} Y^{II} - \beta^4 Y = 0, \quad \frac{EJ}{b_1} X^{IV} + \frac{q}{b_1} X^{II} + \beta^4 X = 0.$$

Układ tych równań rozwiążemy w przypadku najprostszym, mianowicie stałej siły ściskającej i swobodnego podparcia podłużnic na jej skrajnych podporach. Obciążenie $q(x)$ niech będzie zmienne.

Zakładając $Y(y) = a_i \sin \gamma_i y$ $\gamma_i = \frac{i\pi}{b}$ otrzymamy z układu równań (2.27) następujący związek:

$$(2.28) \quad \beta_i^4 = \frac{EI}{a_1} \gamma_i^4 - \frac{r}{a_1} \gamma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Drugie z równań (2.27) napiszemy w postaci:

$$(2.29) \quad E J X^{IV} + q(x) X^{II} + \frac{b_1}{a_1} (E I \gamma_i^2 - r) \gamma_i^2 X = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Równanie (2.29) ma identyczną postać z równaniem (1.33), jeśli w tym ostatnim przyjąć $k = k_i = \text{const}$. Odpowiadający równaniu (2.29) układ nieskończony równań liniowych zapiszemy, jako

$$(2.30) \quad A_p^{(i)} = \frac{2 \lambda^{(i)}}{a (\Delta_p + k_i)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(i)} G_{np}, \quad p = 1, 2, \dots, \infty,$$

gdzie

$$k_i = \frac{b_1}{a_1} \gamma_i^2 (E I \gamma_i^2 - r).$$

Ponieważ na ogół z góry nieznana jest ilość pólfal przy wyboczeniu poprzecznic, przyjmujemy najpierw $i = 1$ i z przyrównania do zera wyznacznika układu (2.30) wyznaczamy najmniejszą wartość $\lambda^{(1)}$. Dalej przyjmujemy $i = 2$ i wyznaczamy $\lambda^{(2)}$ itd. Najmniejsza z wartości $\lambda^{(i)}$ będzie siłą krytyczną wyboczenia rusztu.

W przypadku szczególnym $q = \text{const}$ otrzymamy bezpośrednio z (2.30) związek:

$$q^{(i)} = \frac{\Delta_p + k_i}{\sigma_p^2}, \quad i, p = 1, 2, \dots, \infty.$$

W przypadku utwierdzenia zupełnego rusztu w krawędzi $x = 0$ i przy $q = q(x)$ wyznaczenie siły krytycznej prowadzi do wyznaczenia najmniejszej wartości $\lambda^{(i)}$ z przyrównanego do zera wyznacznika układu równań.

$$(2.31) \quad A_p^{(i)} = \frac{2 \lambda^{(i)}}{a (\Delta_p + k_i)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(G_{np} - a_p \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r G_{nr}}{\Delta_r + k_i}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r^2}{\Delta_r + k_i}} \right),$$

$$i, p = 1, 2, \dots, \infty,$$

gdzie

$$k_i = \frac{b_1}{a_1} \gamma_i^2 (E I \gamma_i^2 - r).$$

W przypadku szczególnym stałej siły $q = \text{const}$ siłę krytyczną znajdziemy jako najmniejszy pierwiastek wyrażenia:

$$(2.32) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2}{\Delta_p + k_i - a_p^2 q^{(i)}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Rozważania nasze pozwoliły na rozwiązanie szeregu złożonych zagadnień stateczności prętów i rusztów płaskich, poddanych działaniu sił ściskających zmieniających się z miejscem. Wszelkie rozwiązania dla prętów należy traktować jako rozwiązania formalnie ścisłe. Efektywne jednak rozwiązanie poszczególnych przypadków prowadzić będzie do wyników przybliżonych, spowodowanych tym, że przy wyznaczaniu sił krytycznych ograniczamy się do znajdowania pierwiastków wyznacznika skończonego rzędu. Rozwiązanie zagadnień stateczności rusztów obarczone są dalszym przybliżeniem, spowodowanym przyjęciem ciągłego sprężystego podłoża. W pracy [2] przeanalizowano rząd przybliżenia tych założeń dla rusztów na brzegach swobodnie podpartych przy stałych siłach ściskających. Przeprowadzone tam rozważania przenieść można i na rozpatrywane tu przypadki wyboczenia rusztów.

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. Timoschenko: *Über die Biegung von Trägerrosten*, Z. A. M. M. 1933.
 [2] W. Nowacki: *Z zagadnień teorii rusztów płaskich*, Arch. Mech. Stos. tom VI/I (1954).

К ВОПРОСАМ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛОСКИХ ПЕРЕКРЫТИЙ

Резюме

В первой части работы приводится решение задачи об устойчивости стержня сжатого осевой нагрузкой являющейся функцией абсциссы x . Решение получено путем преобразования дифференциального уравнения задачи в интегральное уравнение, и замены последнего бесконечной системой линейных уравнений. Приравнение нулю определителя этой системы дает условие потери устойчивости и приводит к бесконечному вековому уравнению. Далее обсуждается выпучивание стержня сжатого осевой нагрузкой — функцией x , на упругих опорах и лежащего на упругом основании.

Результаты полученные в первой части работы использованы во второй части — посвященной задачам устойчивости перекрытий сжа-

тых осевыми нагрузками, являющимися функциями x или y . При этом принято, что стержни одного направления размещены достаточно часто так, что стержни другого направления могут рассматриваться как лежащие на упругом основании. При таком предположении прогиб стержня для $S > S_{kr}$ может быть представлен системой дифференциальных уравнений. Эти уравнения преобразованы в систему интегральных уравнений, а последние — в бесконечные системы линейных уравнений.

В случае стержней одинакового сечения, размещенных на одинаковых расстояниях и сжатых одинаковой нагрузкой для определения критической силы применена модель ортотропной пластинки с нулевой жесткостью кручения. В этом случае дифференциальное уравнение задачи с частными производными доведено до обыкновенного дифференциального уравнения аналогичного уравнению выпучивания сжатого стержня лежащего на упругом основании. Решение этого уравнения приводит к бесконечной системе линейных уравнений.

SOME PROBLEMS OF STABILITY OF STRAIGHT BARS AND FLAT GRIDWORKS

Summary

In the first part the problem of stability of a bar subjected to an axial force variable in function of x is solved. This is done by transforming the differential equation of the problem into an integral equation and reducing the problem to the solution of an infinite system of secular equations. The buckling condition is obtained by taking the determinant of this equation equal to zero. The problem of buckling of a bar compressed by a variable axial force and resting on elastic supports and on an elastic foundation is also solved.

The above results are used in the second part, devoted to the problem of stability of flat gridworks compressed by axial forces variable in function of x or y . It is assumed that the spacing of the members are sufficiently dense in one direction so that the other members can be treated as resting on an elastic foundation. Thus, the deflection of the bar for $S > S_{kr}$ can be expressed by a system of differential equations which are transformed into a system of integral equations and then into a system of infinite number of secular equations.

In the case of bars compressed in a uniform manner, having the same cross-section and evenly spaced, the critical force is found by using the model of an orthotropic plate of zero torsional rigidity. In this case the partial differential equation of the problem is reduced to an ordinary equation analogous to that of buckling of a compressed bar resting on an elastic foundation. The solution of this equation is reduced to that of an infinite system of secular equations.

Pracę złożono w Redakcji dnia 22.II.1956 r.