

PRACE IPPT • IBTP REPORTS

Witold Nowacki

Twierdzenie o zupełności
funkcji naprężeń
w termosprężystości

1/1967



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Twierdzenie o zupełności funkcji naprężeń
w termosprężystości

Witold Nowacki

1. Wstęp

Rozważmy ciało sprężyste, izotropowe i jednorodne, zajmujące obszar B ograniczony powierzchnią A . Ciało poddane działaniu sił zewnętrznych i ogrzaniu dozna deformacji. W ciele powstanie pole przemieszczeń $\vec{u}(x,t)$ oraz pole temperatury $\theta(x,t)$, zależne od położenia punktu x i czasu t . Pola te opisane są układem równań różniczkowych [1]

$$1.1/ \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \vec{X} = \rho \ddot{\vec{u}} + f \text{grad } \theta,$$

$$1.2/ \nabla^2 \theta - \frac{1}{\alpha} \dot{\theta} - \eta \text{div } \dot{\vec{u}} = -\frac{Q}{\alpha}.$$

Tutaj $\theta = T - T_0$ jest przyrostem temperatury, T jest temperaturą bezwzględną, T_0 temperaturą stanu naturalnego, w którym tak odkształcenia jak i naprężenia są równe zeru. Przez \vec{X} oznaczono wektor sił masowych, przez ρ - gęstość. Wielkości μ, λ są stałymi Lamégo dla stanu izotermicznego, a $\mu = 3K\alpha_t$, gdzie $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ jest modułem ściśliwości, a α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności termicznej. Dalej: $\alpha = \lambda_0 / c_\theta$, gdzie λ_0 jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, a c_θ jest ciepłem właściwym przy stałej deformacji. Wreszcie $\eta = \mu T_0 / \lambda_0$ oraz $Q = \dot{W} / \lambda_0$,

gdzie przez W oznaczono ilość ciepła, wytwarzaną w jednostce objętości i w jednostce czasu. Kropka nad funkcją oznacza jej pochodną czasową: $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t$, $\ddot{u} = \partial^2 u/\partial t^2$.

Dokonując dekompozycji wektora przemieszczenia na część potencjalną i solenoidalną

$$11.3/ \quad \vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\chi}, \quad \text{div } \vec{\chi} = 0,$$

oraz w podobny sposób rozkładając wektor sił masowych

$$11.4/ \quad \vec{X} = \rho(\text{grad } v_3 + \text{rot } \vec{\sigma}),$$

doprowadzamy układ równań /1.1/ i /1.2/ do postaci [2]

$$11.5/ \quad \square_1^2 \phi = m \theta - \frac{1}{c_1^2} v_3,$$

$$11.6/ \quad \square_2^2 \vec{\chi} = -\frac{1}{c_2^2} \vec{\sigma}.$$

$$11.7/ \quad D \theta - \eta \nabla^2 \dot{\phi} = -\frac{Q}{\alpha}.$$

Wprowadziliśmy tu następujące oznaczenia:

$$11.8/ \quad \square_\alpha^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad D = \nabla^2 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad m = \frac{\eta}{\lambda + 2\mu}.$$

Eliminacja temperatury z równań /1.5/ i /1.7/ prowadzi do równań

$$11.9/ \quad \Omega \phi = -\frac{m}{\alpha} Q - \frac{1}{c_1^2} D v_3,$$

$$11.10/ \quad \square_2^2 \vec{\chi} = -\frac{1}{c_2^2} \vec{\sigma},$$

gdzie

$$\Omega = \square_1^2 D - m \eta \partial_t v^2, \quad \partial_t = \partial / \partial t.$$

Równanie /1.9/ przedstawia podłużną, a równanie /1.10/ poprzeczną falę termosprężystą.

W klasycznej elastokinetyce przy założeniu procesu adiabatycznego mamy do czynienia z układem równań przemieszczeniowych

$$\mu_s v^2 \vec{u} + (\lambda_s + \mu_s) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \vec{X} = \rho \ddot{\vec{u}}, \quad /1.11/$$

$$\Theta = -\eta_r m_r x \operatorname{div} \vec{u}.$$

Występujące w tych równaniach stałe Lamégo μ_s, λ_s odnoszą się do stanu adiabatycznego, a $\eta_r = \gamma_r T_0 / \lambda_0$, $m_r = \gamma_r / (\lambda_r + 2\mu_r)$, $\gamma_r = (3\lambda_r + 2\mu_r) \alpha_t$, gdzie μ_r, λ_r są stałymi Lamégo, mierzonymi w warunkach izotermicznych. Przedstawiając przemieszczenie w postaci /1.3/ otrzymamy następujące równanie falowe:

$$/1.12/ \quad \square_1^2 \phi = -\frac{1}{a_1^2} v, \quad \square_2^2 \vec{X} = -\frac{1}{a_2^2} \vec{b},$$

gdzie

$$a_1 = \left(\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho} \right)^{1/2}, \quad a_2 = \left(\frac{\mu_s}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \mu_s = \mu_r, \quad \lambda_s = \lambda_r + \gamma_r \eta_r x.$$

G.Somigliana [3] oraz P.Duhem [4] udowodnili, że przedstawienie /1.3/ przy pomocy potencjałów ϕ i \vec{X} stanowi zupełne rozwiązanie równań /1.11/. E.Sternberg w pracy [5] przedstawił argumenty, uzasadniające zupełność rozwiązania generalnego sprzężonych równań termosprężystości /1.1/ i /1.2/ dla reprezentacji /1.3/ i założenia, że funkcje ϕ i \vec{X} spełniają układ równań /1.9/ i /1.10/. Do sprawy tej powrócimy w p.3 niniejszej pracy.

Układ równań /1.1/ i /1.2/ można również rozdzielić na układ równań niezależnych na innej drodze przez wprowadzenie funkcji wektorowej $\vec{\varphi}$ i funkcji skalarnej ψ , związanych z przemieszczeniem \vec{u} i temperaturą w następującej postaci:

$$/1.13/ \quad \vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \nabla \vec{\varphi} - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div}(\Gamma \vec{\varphi}) + \frac{\lambda}{\mu} \operatorname{grad} \psi,$$

$$/1.14/ \quad \Theta = \eta \partial_t \operatorname{div} \square_2^2 \vec{\varphi} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \square_1^2 \psi,$$

gdzie

$$\Gamma = D - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \eta \partial_t.$$

Funkcje $\vec{\varphi}$ i ψ powinny spełniać następujące równania:

$$/1.15/ \quad \square_2^2 \nabla \vec{\varphi} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \vec{X} = 0,$$

$$/1.16/ \quad \nabla \psi + \frac{Q\mu}{\lambda(\lambda+2\mu)} = 0.$$

Równania /1.15/ i /1.16/ otrzymuje się przez podstawienie /1.13/ i /1.14/ do równań różniczkowych termosprężystości /1.1/ i /1.2/.

Związki /1.13/ i /1.14/ zostały podane najpierw przez S.Kalińskiego [6], później na innej drodze przez J.S.Podstrigacza [7] i D.Rüdigera [8].

Zauważmy, że związki /1.13/ i /1.14/ są uogólnione na problemy termosprężystości funkcji naprężeń, podanych przez A.Jacovache [10] dla elastooptyki klasycznej. Jednak sposób wyprowadzenia związków /1.13/ i /1.14/, stosowanych w pracach [6, 7, 8] nie zapewnia zupełności rozwiązań. Dowód zupełności rozwiązań dla przedstawienia /1.13/ i /1.14/ jest podany w p.2.

2. Twierdzenie o zupełności rozwiązań

Niech $\vec{u}(x,t)$ i $\theta(x,t)$ będą rozwiązaniem układu równań /1.1/ i /1.2/ w obszarze B dla $-\infty < t < \infty$. Wtedy istnieje taka funkcja wektorowa $\vec{\varphi}$ i funkcja skalarna ψ , że przemieszczenie $\vec{u}(x,t)$ i temperatura $\theta(x,t)$ są przedstawione przez /1.13/ i /1.14/, a funkcje $\vec{\varphi}$ i ψ spełniają równania falowe /1.15/ i /1.16/.

Na podstawie rozwiązania Stokesa-Helmholtza istnieją takie funkcje $\phi(x,t)$ i $\vec{\chi}(x,t)$, że

$$12.1/ \quad \vec{u}(x,t) = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\chi}, \quad \text{div } \vec{\chi} = 0.$$

Wstawmy /2.1/ do układu równań różniczkowych termosprężystości /1.1/ i /1.2/. W rezultacie otrzymamy następujące równanie:

$$12.2/ \quad \text{grad } \square_1^2 \phi + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \text{rot } \square_2^2 \vec{\chi} + \frac{\vec{\chi}}{\lambda+2\mu} = m \text{grad } \theta,$$

$$12.3/ \quad D\theta - \eta \partial_t^2 \phi = -\frac{Q}{x}.$$

Wyeliminujmy z tych równań temperaturę θ i posługując się równaniem /1.16/ otrzymamy w ten sposób równanie

$$12.4/ \quad \text{grad } (\Omega \phi) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \text{rot } (D \square_2^2 \vec{\chi}) + \frac{D \vec{\chi}}{\lambda+2\mu} - \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \text{grad } (\Omega \psi) = 0$$

Zdefiniujmy obecnie funkcję $\vec{\varphi}$ za pomocą funkcji skalarnej ξ oraz funkcji wektorowej $\vec{\eta}$

$$12.5/ \quad \vec{\varphi} = \text{grad } \xi + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \text{rot } \vec{\eta}.$$

Następnie wstawmy /2.5/ do równania /1.15/ i dokonajmy na tym równaniu operacji różniczkowej D . Otrzymamy w rezultacie równanie

$$/2.6/ \operatorname{grad}(D\Omega\Box_2^2\xi) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \operatorname{rot}(D\Omega\Box_2^2\vec{\eta}) + \frac{D\vec{\chi}}{\lambda+2\mu} = 0.$$

Z porównania równań /2.2/ i /2.6/ wynika, że funkcje ξ i $\vec{\eta}$ powinny spełniać następujące równania różniczkowe:

$$/2.7/ D\Box_2^2\xi = \phi - \frac{\mu}{\mu} \psi,$$

$$/2.8/ \Omega\vec{\eta} = \vec{\chi}$$

Wykonajmy na związku /2.7/ operację Ω i uwzględnijmy równanie /2.8/:

$$/2.9/ \Omega\vec{\phi} = \operatorname{grad}(\Omega\xi) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \operatorname{rot}\vec{\chi}.$$

Wstawmy $\operatorname{rot}\vec{\chi}$ z równania /2.9/ do związku /2.1/. Otrzymamy w ten sposób równanie przemieszczenia \vec{u} przez funkcje ψ , $\vec{\phi}$ i ξ :

$$/2.10/ \vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \Omega\vec{\phi} + \frac{\mu}{\mu} \operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}(D\Box_2^2 - \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \Omega)\xi.$$

Zważywszy, że

$$/2.11/ \Box_1^2\xi = \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \Box_2^2\xi + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \nabla^2\xi,$$

przekształcimy operator przy ξ w związku /2.10/ do postaci

$$(D \square_2^2 - \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \Omega) \xi = - \frac{\lambda+\mu}{\mu} (D - \frac{\mu \nabla^2}{\lambda+\mu}) \nabla \xi$$

$$/2.12/ \quad \quad \quad = - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \Gamma \nabla^2 \xi.$$

Wstawiając /2.12/ do /2.10/ i uwzględniając wynikającą z /2.5/ zależność

$$/2.13/ \quad \quad \quad \operatorname{div} \vec{\varphi} = \nabla^2 \xi,$$

doprowadzimy /2.10/ do postaci

$$/2.16/ \quad \vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \Omega \vec{\varphi} - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div} (\Gamma \vec{\varphi}) + \frac{\mu}{\mu} \operatorname{grad} \psi,$$

zgodnej ze związkiem /1.13/.

Należy jeszcze udowodnić słuszność wzoru /1.14/. W tym celu dokonajmy na równaniu /1.1/ operację dywergencji i wykorzystajmy związek $\operatorname{div} \vec{u} = \nabla^2 \phi$, wynikający z /2.1/. W rezultacie otrzymamy

$$/2.17/ \quad \square_1^2 \nabla^2 \phi + \frac{1}{\lambda+2\mu} \operatorname{div} \vec{X} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \nabla^2 \theta.$$

Następnie wyeliminujmy z równań /2.3/ i /2.17/ funkcję ϕ , wykorzystując równanie /1.16/. W rezultacie otrzymamy równanie

$$/2.18/ \quad \Omega \theta + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \partial_z \operatorname{div} \vec{X} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \square_1^2 \Omega \psi$$

Dokonajmy wreszcie na równaniu /1.16/ operacji dywergencji, co prowadzi do związku

$$12.19/ \quad \frac{1}{\lambda+2\mu} \operatorname{div} \vec{X} = -\operatorname{div} (\square_2^2 \Omega \vec{\varphi}).$$

Wstawiając 12.19/ do 12.18/ i wykonując na tym przekształconym równaniu operację Ω^{-1} , doszodźmy do związku

$$12.20/ \quad \Theta = \eta \partial_t \operatorname{div} \square_2^2 \vec{\varphi} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \square_1^2 \psi,$$

zgodnego z przedstawieniem 1.14/. W ten sposób dowód zupełności został zakończony.

Szczególnym przypadkiem termosprężystości sprzężonej jest tzw. techniczna teoria naprężeń cieplnych, w której poznaje się sprzężenie równań 1.1/ i 1.2/ przez pominięcie wyrazu $\eta \operatorname{div} \vec{u}$ w równaniu przewodnictwa cieplnego. Łatwo wykazać przyjmując $\eta=0$ w równaniach 1.13/ do 1.16/ i wprowadzając funkcję $\vec{G} = D \vec{\varphi}$, że prawdziwe są następujące związki:

$$12.21/ \quad \vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \square_1^2 \vec{G} - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div} \vec{G} + \frac{\mu}{\mu} \operatorname{grad} \psi,$$

$$12.22/ \quad \Theta = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \square_1^2 \psi.$$

Funkcje \vec{G} i ψ powinny spełniać równania

$$12.23/ \quad \square_1^2 \square_2^2 \vec{G} + \frac{\vec{X}}{\lambda+2\mu} = 0,$$

$$12.24/ \quad D \square_1^2 \psi + \frac{Q\mu}{\lambda(\lambda+2\mu)} = 0.$$

Wreszcie w przypadku szczególnym elastooptyki klasycznej mamy

$$/2.25/ \quad \vec{u} = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1} \square_1^2 \vec{G} - \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_1} \operatorname{div} \vec{G}, \quad \theta = -\rho_r m_r x \operatorname{div} \vec{u}$$

gdzie funkcja \vec{G} spełnia równanie bifalowe

$$/2.26/ \quad \square_1^2 \square_2^2 \vec{G} + \frac{\bar{X}}{\lambda_3 + 2\mu_3} = 0.$$

Związki /2.25/ i /2.26/ zostały podane przez M.Jacovache [10] , a twierdzenie o zupełności tego rozwiązania przez E.Sternberga i R.A.Eubanksa [11] .

3. Związki między potencjałami $\phi, \bar{\chi}$ a funkcjami $\bar{\varphi}, \psi$.

Rozpatrzmy jednorodny układ równań /1.1/ i /1.2/. Przez wprowadzenie wzorów /1.13/ i /1.14/ doprowadzamy ten układ równań do równań falowych

$$/3.1/ \quad \square_2^2 \Omega \bar{\varphi} = 0,$$

$$/3.2/ \quad \Omega \psi = 0.$$

Zauważmy, że w myśl twierdzenia T.Boggio [12] , rozwiązanie równania /3.1/ przedstawić można w postaci

$$/3.3/ \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}' + \bar{\varphi}'',$$

przy czym funkcje $\bar{\varphi}', \bar{\varphi}''$ powinny spełniać równania

$$/3.4/ \quad \Omega \bar{\varphi}' = 0,$$

$$13.5/ \quad \square_2^2 \vec{\varphi}'' = 0.$$

Wstawiając /3.3/ do równania /1.13/ oraz uwzględniając równania /3.4/ i /3.5/ otrzymamy

$$13.6/ \quad \vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \Omega \vec{\varphi}'' - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \text{grad div } \Gamma(\vec{\varphi}' + \vec{\varphi}'') + \frac{\lambda}{\mu} \text{grad } \psi.$$

Przekształćmy obecnie wyrażenie $\Omega \vec{\varphi}''$, zważywszy, że $\Omega = \square_1^2 D - m\rho \partial_t \nabla^2$ i biorąc pod uwagę związek /3.5/. Po prostych przekształceniach przy uwzględnieniu związku /2.11/ otrzymamy

$$13.7/ \quad \Omega \vec{\varphi}'' = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} (\nabla^2 \Gamma \vec{\varphi}'').$$

W ten sposób biorąc pod uwagę zależności /3.7/ przedstawimy równanie /3.6/ w postaci

$$13.8/ \quad \vec{u} = \frac{\lambda+\mu}{\mu} [\nabla^2 \Gamma \vec{\varphi}'' - \text{grad div } \Gamma(\vec{\varphi}' + \vec{\varphi}'')] + \frac{\lambda}{\mu} \text{grad } \psi.$$

zważywszy że

$$\text{grad div } (\Gamma \vec{\varphi}'') = \nabla^2 (\Gamma \vec{\varphi}'') + \text{rot rot } (\Gamma \vec{\varphi}''),$$

otrzymamy z /3.8/:

$$13.9/ \quad \vec{u} = \frac{\lambda+\mu}{\mu} [-\text{rot rot } (\Gamma \vec{\varphi}'') - \text{grad div } (\Gamma \vec{\varphi}')] + \frac{\lambda}{\mu} \text{grad } \psi.$$

Łatwo już obecnie sprowadzić związek /3.9/ do postaci Stokesa - Helmholtza

$$13.10/ \quad \vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\chi},$$

Porównanie równań /3.9/ i /3.10/ prowadzi do następującej transformacji:

$$/3.11/ \quad \phi = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div}(\Gamma \vec{\varphi}') + \frac{\mu}{\mu} \psi,$$

$$/3.12/ \quad \vec{\chi} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{rot}(\Gamma \vec{\varphi}'),$$

która wiąże funkcje $\phi, \vec{\chi}$ z funkcjami $\vec{\varphi}, \psi$.

Wykonajmy następnie operację D na wzorze /1.14/. Otrzymamy po wykorzystaniu równania /3.5/ następujący związek:

$$/3.13/ \quad D\theta = \eta \partial_t \operatorname{div}(D\Box_2^2 \vec{\varphi}') + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} D\Box_1^2 \psi.$$

Przekształćmy równanie /3.4/, które możemy również zapisać w postaci:

$$/3.14/ \quad \Box_1^2 D\vec{\varphi}' - m \eta \partial_t \nabla^2 \vec{\varphi}' = 0.$$

Wykorzystując związek /2.11/ otrzymamy

$$/3.15/ \quad D\Box_2^2 \vec{\varphi}' = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \nabla^2 \Gamma \vec{\varphi}'.$$

Wstawiając /3.15/ do /3.13/ i uwzględniając równanie /3.2/ dochodzimy do równania

$$/3.16/ \quad D\theta = \eta \partial_t \nabla^2 \left[-\frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div}(\Gamma \vec{\varphi}') + \frac{\mu}{\mu} \psi \right].$$

Ale wyrażenie w nawiasach kwadratowych równa się ze względu na /3.11/ funkcji ϕ . Mamy zatem

$$/3.17/ \quad D\theta - \rho \partial_t \nabla^2 \phi = 0.$$

Równanie to jest jednorodnym równaniem przewodnictwa cieplnego /1.7/.

Pozostaje jeszcze sprawdzić, czy funkcje $\phi, \vec{\chi}$, wyrażone przez funkcje $\vec{\varphi}$ i ψ spełniają jednorodne równania falowe /1.9/ i /1.10/

$$/3.18/ \quad \Omega \phi = 0, \quad \square_2^2 \vec{\chi} = 0$$

Łatwo sprawdzić, że

$$/3.19/ \quad \Omega \phi = \frac{\mu}{\mu} \Omega \psi - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \operatorname{div}(\Gamma \Omega \vec{\varphi}') = 0,$$

a to ze względu na /3.2/ oraz /3.4/.

Również i

$$/3.20/ \quad \square_2^2 \vec{\chi} = - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \operatorname{rot}(\Gamma \square_2^2 \vec{\varphi}'') = 0,$$

ze względu na równanie /3.5/.

W przypadku teorii naprężeń cieplnych, w której poznaje się sprzężenie pola temperatury i pola przemieszczeń, otrzymuje się zamiast transformacji /3.11/ i /3.12/ następującą:

$$/3.21/ \quad \phi = - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \operatorname{div} \vec{G} + \frac{\mu}{\mu} \psi,$$

$$/3.22/ \quad \vec{\chi} = - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \operatorname{rot} \vec{G}, \quad \vec{G} = D \vec{\varphi}.$$

Przemieszczenia \vec{u} i temperatura θ określone są tu przez związki /2.21/ i /2.22/ i winny spełniać równania jednorodne

$$/3.23/ \quad \square_1^2 \square_2^2 \vec{G} = 0, \quad D \square_1^2 \psi = 0.$$

Łatwo też wykazać, że funkcje $\phi, \vec{\chi}$ określone związkami /3.21/ i /3.22/ spełniają równania

$$/3.24/ \quad \square_1^2 \phi = m \theta, \quad \square_2^2 \vec{\chi} = 0, \quad D \theta = 0.$$

W przypadku klasycznej elastooptyki wzory /3.21/ i /3.22/ przechodzą w

$$/3.25/ \quad \phi = - \frac{\lambda_s + \mu_s}{\mu} \operatorname{div} \vec{G},$$

$$/3.26/ \quad \vec{\chi} = - \frac{\lambda_s + \mu_s}{\mu} \operatorname{rot} \vec{G}.$$

zgodnie z wynikiem otrzymanym przez E. Sternberga [5] .

References

1. M.A.Biot, Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, J.Appl.Phys., 27/1956/.
2. W.Nowacki, Some dynamic problems in thermoelasticity, Arch. Mech.Stos., 1, 11 /1959/.
3. C.Somigliana, Sulle espressioni analitiche generali dei movimenti oscillatori, Atti Reale Accad. Linc. Roma Ser.5, 1 /1892/, 111.
4. P.Duhem, Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch, J.Math.Pures et Appl., 6 /1900/, 215.
5. E.Sternberg, On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity, Arch.Rat.Mech.Analysis, 1, 6 /1960/.
6. S.Kaliski, Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych, Warszawa, PWN, 1957.
7. J.S.Podstrigacz, Podstawowe rozwiązanie nieustalonego zagadnienia termosprężystego /w jęz.ukraińskim/, Prikl.Mech., 2, 6 /1960/.
8. D.Rudiger, Bemerkung zur Integration der thermo-elastischen Grundgleichungen, Österr.Ing.Arch., 1-2, 18 /1964/.
9. B.Galerkin, Contribution à la solution générale du problème de la théorie dans le cas de trois dimensions, C.R.Acad.Sci., Paris, 190 /1930/, 1047.
10. M.Jacovache, O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuațiilor elasticității, Bul.stiint.Acad.Rep.Pap. Române, Ser.A, 1 /1949/, 593.

11. E.Sternberg, R.A.Eubanks, On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation, Quart.Appl.Math., 15 /1957/, 149.
12. T.Boggio, Sull' integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali, Ann.Math.Ser.III, 8 /1903/, 181.