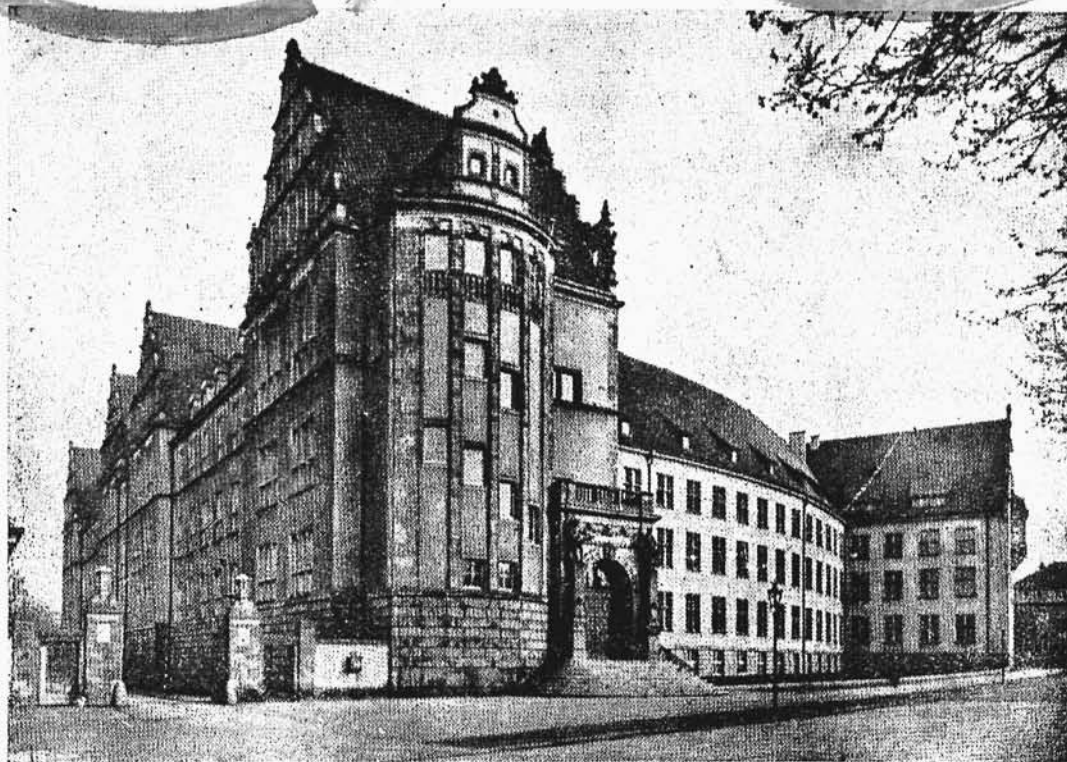


Politechnika

Pracownia Naukowo Techniczna
Studentów Politechnik
Krajowych



Gmach Główny Politechniki Wrocławskiej od strony zachodniej.
The main Building of Polytechnical School at Wrocław from the western side
Ecole polytechnique de Wrocław de cote de l'est
Главное Здание Политехники Вроцлавской с западной стороны

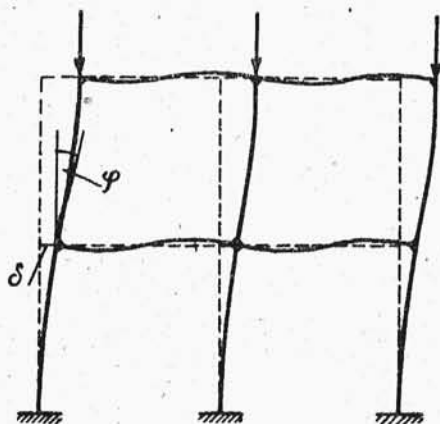
Lipiec-Sierpień
Nr. 7-8 1947r.

Wyboczenie układu ramowego w płaszczyźnie i z płaszczyzny ramy

I. Wyboczenie w płaszczyźnie ramy.

A. Rozważmy dowolny płaski układ ramowy, składający się z prętów prostych i obciążony w węzłach siłami skupionymi. Niech siły w trakcie wyboczenia zachowują swe kierunki działania, a wyboczenie niech nastąpi w obszarze sprężystych odkształceń. Zakładamy, że pręty są idealnie proste, a siły podłużne działają ściśle osiowo. Pomijamy wpływ sił poprzecznych, a pręty traktujemy jako nieściśliwe.

Przy badaniu stateczności układu ramowego rozważamy występujące pod obciążeniem wyboczenia dwa nieskończenie bliskie położenia równowagi układu: jedno przy prętach idealnie prostych, drugie przy prętach nieskończenie mało wygiętych. Na granicy między stanem statecznym a niestatecznym układu ramowego muszą leżeć te stany, dla których przejście z położenia równowagi o prętach prostych do położenia nieskończenie mało wygiętego nie jest związane z nakładem pracy. Szukamy takich warunków, przy których równocześnie obok postaci wolnej od zginania istnieje postać równowagi o znikomo małym wygięciu rys. Nr. 1.



Rys. 1.

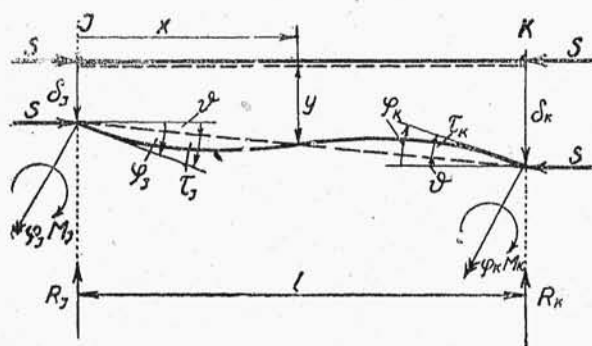
Nadajemy węzłom układu ramowego nieskończenie małe przesunięcia δ kąty obrotu φ , zgodnie z warunkami ograniczającymi ruch układu ramowego. W wygiętej postaci równowagi układu ramowego wystąpią nieskończenie małe momenty zginające i siły tnące jako funkcje przesunięć δ i obrotów φ .

Ilość l niezależnych przesunięć δ określona jest przez ilość dodatkowych prętów potrzebnych do stabilizacji łańcucha prętowego, który powstanie przez zamianę węzłów sztywnych układu na przeguby; ilość k kątów φ określona jest przez ilość węzłów wolnych układu.

Warunki równowagi węzłów przeciw obrotowi węzłów dają k równań, warunki równowagi przeciw przesunięciu układu ramowego l równań.

Równania równowagi są równaniami jednorodnymi i liniowymi względem φ i δ . Układ równań będzie niesprzecznym, gdy wyznacznik układu będzie równy zero. Warunek ten, charakteryzujący stan, w którym obok postaci równowagi wolnej od zginania wystąpić może postać równowagi o znikomo małym wygięciu, jest warunkiem wyboczenia układu ramowego.

B. Rozważmy pręt J—K układu ramowego. Końiec pręta doznaje nieskończenie małych obrotów φ_J i φ_K oraz przesunięć δ_J i δ_K . Obok siły S (o skończonej wartości) dochodzą na końcach prętów nieskończenie małe momenty zginające M_J , M_K i reakcje R_J , R_K . Dodatkowo kierunki brzegowych odkształceń i składowych stanu naprężeń obrazuje rys. 2.



Rys. 2.

Równanie różniczkowe problemu brzmi:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Sy + M_x = 0$$

$$\text{Ale: } M_x = M_J - \xi (M_J + M_K) \quad (1)$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \xi' = 1 - \xi$$

Wprowadzając skrót

$$\alpha^2 = \frac{Sl^2}{EJ}$$

doprowadzimy równanie (1) do postaci

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \alpha^2 y = \frac{\alpha^2}{S} [(M_J + M_K) \xi - M_J] \quad (1a)$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego (1a) będzie:

$$y = \frac{M_J}{S} (\cos \alpha \xi - \cotg \alpha = \sin \alpha \xi - \xi') - \frac{M_K}{S} (\sin \alpha \xi \operatorname{cosec} \alpha - \xi)$$

Stąd:

$$\begin{aligned}\tau_J &= \frac{dy}{dx}|_{x=0} = -\frac{M_J}{SI} (\alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1) - \\ &\quad - \frac{M_K}{SI} (\alpha \operatorname{cosec} \alpha - 1) \\ \tau_K &= \frac{dy}{dx}|_{x=1} = -\frac{M_J}{SI} (\alpha \operatorname{cosec} \alpha - 1) - \\ &\quad - \frac{M_K}{SI} (\alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1)\end{aligned}\quad (1b)$$

Z rys. 2 odczytujemy:

$$\varphi_J = \vartheta + \tau_J; \quad \varphi_K = \vartheta + \tau_K.$$

Wstawiając do powyższych związków τ_J i τ_K i rozwiązując równania (a) względem M_J i M_K ,

a dalej oznaczając $m = \frac{2EJ}{l}$ otrzymujemy*):

$$\begin{aligned}M_J &= m [c(\alpha)\varphi_J + s(\alpha)\varphi_K - r(\alpha)\vartheta] \\ M_K &= m [s(\alpha)\varphi_J + c(\alpha)\varphi_K - r(\alpha)\vartheta] \\ \vartheta &= \frac{\delta_K - \delta_J}{l}\end{aligned}\quad [2]$$

$$\begin{aligned}\text{gdzie: } s(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - \alpha \sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha} \\ c(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha \sin \alpha - \alpha^2 \cos \alpha}{2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha} \\ r(\alpha) &= s(\alpha) + c(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 (1 - \cos \alpha)}{2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha}\end{aligned}$$

Miedzy momentami brzegowymi M_J, M_K i reakcjami R_J i R_K istnieje następująca zależność (rys. 2):

$$\begin{aligned}R_K &= -R_J = \frac{1}{l} [M_J + M_K + S(\delta_K - \delta_J)] \\ \text{albo} \quad R_K &= -R_J = \frac{1}{l} [M_J + M_K + SI \vartheta]\end{aligned}$$

Wstawiając do powyższej zależności wielkości M_J i M_K ze wzorów (2) i podstawiając za SI wartość $IS = \frac{\alpha^2 EJ}{l} = \frac{\alpha^2}{2} m$ dochodzimy do związku

$$\begin{aligned}R_K &= -R_J = m' [r(\alpha)(\varphi_J + \varphi_K) - t(\alpha)\vartheta] \\ \text{gdzie} \quad t(\alpha) &= 2r(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}; \quad m' = \frac{m}{l}\end{aligned}\quad (3)$$

W wypadku siły rozciągającej S równanie różniczkowe problemu brzmi:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} - Sy + M_x = 0$$

Rozwiązanie otrzymamy z równania (1b), jeżeli w miejsce α podstawimy α_i : $i = \sqrt{-1}$.

Otrzymamy:

$$\begin{aligned}y &= \frac{M_J}{S} [\operatorname{Ctg} \alpha \sin \alpha \xi - \operatorname{Cosec} \xi + \xi'] + \\ &\quad + \frac{M_K}{S} [\operatorname{Cosec} \alpha \sin \alpha \xi - \xi]\end{aligned}$$

Przy tych samych warunkach brzegowych co przy siły ściskającej dochodzimy do następujących równań:

$$\begin{aligned}M_J &= m [C(\alpha)\varphi_J + S(\alpha)\varphi_K - R(\alpha)\vartheta] \\ M_K &= m [S(\alpha)\varphi_J + C(\alpha)\varphi_K - R(\alpha)\vartheta] \\ R_K &= -R_J = m' [R(\alpha)(\varphi_J + \varphi_K) - T(\alpha)\vartheta]\end{aligned}\quad (4)$$

gdzie

$$\begin{aligned}C(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha \sin \alpha - \alpha^2 \cos \alpha}{2(\cos \alpha - 1) - \alpha \sin \alpha}; \\ S(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - \alpha \sin \alpha}{2(\cos \alpha - 1) - \alpha \sin \alpha}; \\ R(\alpha) &= C(\alpha) + S(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 (1 - \cos \alpha)}{2(\cos \alpha - 1) - \alpha \sin \alpha}; \\ T(\alpha) &= 2R(\alpha) + \frac{\alpha^2}{2}\end{aligned}$$

Dla $S \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ zarówno wzory (2, 3) jak i (4) przechodzą na znane związki metody odkształceń pręta zginanego, nie obciążonego poprzecznie.

$$M_J = m (2\varphi_J + \varphi_K - 3\vartheta) \quad (5)$$

$$M_K = m (\varphi_J + 2\varphi_K - 3\vartheta)$$

$$R_K = -R_J = 3m'(\varphi_J + \varphi_K - 2\vartheta)$$

Rozważmy jeszcze wypadki szczególne. Pręt J—K jest w punkcie J opatrzony przegubem, w węzle K sprężysto zamocowany.

Wtedy $M_J = 0$. Eliminując z równań (2) i (4) kąt φ_J uzyskamy następujące związki:

a) dla siły ściskającej:

$$\begin{aligned}(6a) \quad M_J &= 0 \\ M_K &= mc(\alpha)(\varphi_K - \vartheta) \\ R_K &= -R_J = m' [c(\alpha)\varphi_K - t(\alpha)\vartheta]\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\bar{c}(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \\ \bar{t}(\alpha) &= \bar{c}(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}\end{aligned}$$

b) dla siły rozciągającej:

$$\begin{aligned}(6b) \quad M_J &= 0 \\ M_K &= m \bar{C}(\alpha)(\varphi_K - \vartheta) \\ R_K &= -R_J = m' [\bar{C}(\alpha)\varphi_K - \bar{T}(\alpha)\vartheta] \\ \bar{C}(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{2} \frac{\sin \alpha}{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha} \\ \bar{T}(\alpha) &= \bar{C}(\alpha) + \frac{\alpha^2}{2}\end{aligned}$$

Dla $S \rightarrow 0$ otrzymujemy równania transformacyjne pręta zginanego nie obciążonego poprzecznie

*) E. Chwella i Fr. Jokisch: Über des ebene knickproblem des Stockwerksrahmen. Der Stahlbau 1941.

nie, sprężystości utwardzonego w K, przegubowego w J.

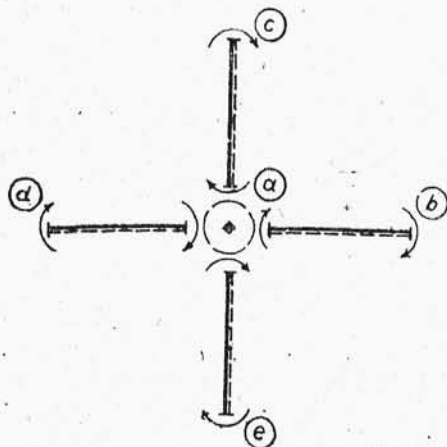
$$M_J = 0; \quad M_K = 1,5 \text{ m} (\varphi_K - \vartheta); \quad (6c)$$

$$R_K = -R_J = 1,5 \text{ m}' (\varphi_K - \vartheta)$$

C. Ramy nieprzesuwne. Dla ram nieprzesuwnych kąty obrotu prętów δ są równe zero. Jako niewiadome pozostają kąty obrotu φ węzłów.

Dla każdego węzła wolnego ramy otrzymamy równanie równowagi węzła:

$$\sum M_{ai} = 0 = M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} + M_{ae} \quad (7)$$



Rys. 3.

Znak sumy rozciąga się na pręty zbiegające się w węzłach. Momenty przywęzłowe wyrażamy przez kąty φ przy pomocy wzorów (2—6b). Jeżeli w pręcie a—b działa siła ściskająca to:

$$M_{ab} = m_{ab} [c(\alpha_{ab}) \varphi_a + s(\alpha_{ab}) \varphi_b]$$

jeśli siła rozciągająca, to:

$$M_{ab} = m_{ab} [C(\alpha_{ab}) \varphi_a + S(\alpha_{ab}) \varphi_b]$$

przy braku siły osiowej:

$$M_{ab} = m_{ab} (2\varphi_a + \varphi_b)$$

Wyrażając momenty przywęzłowe we wzorze (7) przez kąty obrotu węzłów $\varphi_a, \dots, \varphi_e$ otrzymamy równanie liniowe względem φ i jednorodne. Dla węzłów wolnych uzyskamy układ k równań liniowych jednorodnych. Układ równań dopuszcza różne od zera wartości φ , gdy wyznacznik układu równań będzie równy zero. Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań stanowi warunek wyboczenia. Wyznacznik układu zawiera funkcje trygonometryczne i hyperboliczne: przyrównany do zera daje nieskończoną ilość pierwiastków. Najmniejszy z nich określi wartość krytyczną układu. Dla układu ramowego (rys. 4), zrównoważenie węzłów: 1, 2 i 3 daje

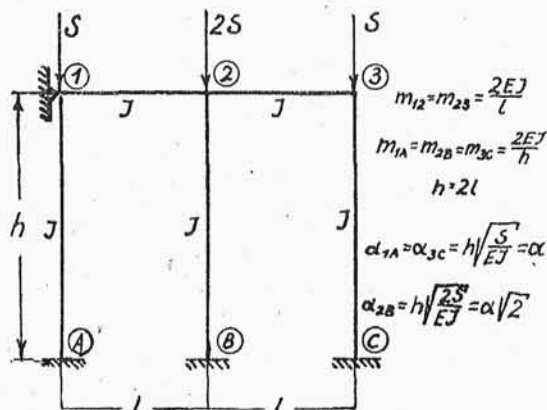
$$M_{1A} + M_{12} = 0,$$

$$M_{21} + M_{2B} + M_{23} = 0, \quad M_{32} + M_{3C} = 0.$$

$$\text{albo } [m_{1A} c(\alpha_{1A}) + 2m_{12}] \varphi_1 + m_{12} \varphi_2 = 0$$

$$m_{12} \varphi_1 + [2m_{12} + 2m_{23} + m_{2B} c(\alpha_{2B})] \varphi_2 + m_{23} \varphi_3 = 0$$

$$m_{23} \varphi_2 + [2m_{23} + c(\alpha_{3C})] \varphi_3 = 0 \quad (a)$$



Rys. 4

Dzieląc całość przez m_{1A} , uzyskamy

$$\begin{aligned} [c(\alpha) + 4] \varphi_1 + \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_1 + [8 + c(\sqrt{2}\alpha)] \varphi_2 + \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_2 + [c(\alpha) + 4] \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (a')$$

Wyznacznik układu równań przyrównany do zera:

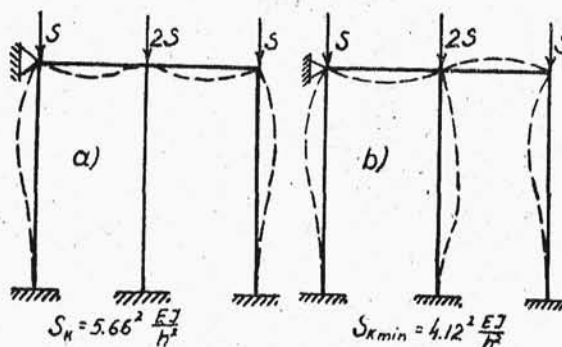
$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} c(\alpha) + 4 & 1 & 0 \\ 1 & 8 + c(\sqrt{2}\alpha) & 1 \\ 0 & 1 & c(\alpha) + 4 \end{vmatrix} = 0$$

rozpada się na dwa niezależne rozwiązania:

$$c(\alpha) + 4 = 0 \quad (c)$$

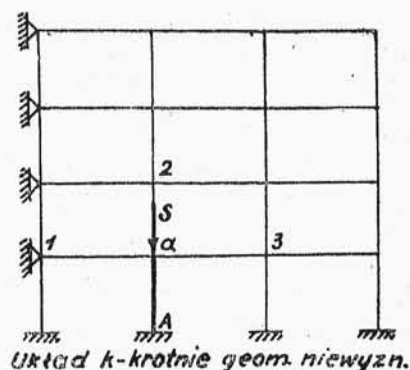
$$(8 + c[\sqrt{2}\alpha])[c(\alpha) + 4] - 2 = 0 \quad (d)$$

Pierwszy związek daje symetryczną postać wyboczenia, co sprawdzić można z układu równań (a'), gdzie dla $c(\alpha) + 4 = 0$ znajdziemy $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = -\varphi_3$; drugi związek daje antysymetryczną postać wyboczenia. Rys. 5a, b, przedstawia postacie wyboczenia układu dla dwóch pierwszych pierwiastków równań (c) i (d). Najmniejszą wartość S_k otrzymamy dla postaci antysymetrycznej.



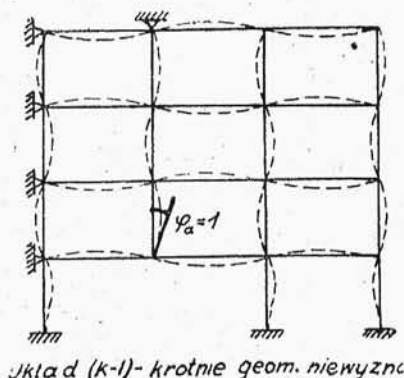
Rys. 5.

W wypadku szczególnym, gdy siła podłużna działa w jednym tylko pręcie nieprzesuwnej ramy piętrowej, wyznacznik układu $D(\alpha)$ sprowadzić możemy do jednego tylko równania, postępując w sposób następujący.



Rys. 6a.

Nakręcamy węzeł a kątem $\varphi_a = 1$ (rys. 6b) i dla tego stanu wyznaczamy momenty przywęzłowe M_{a1} , M_{a2} , M_{a3} , operując na układzie $(k-1)$ krotnie niewyznaczalnym. Zrównanie węzła (rys. 6b)

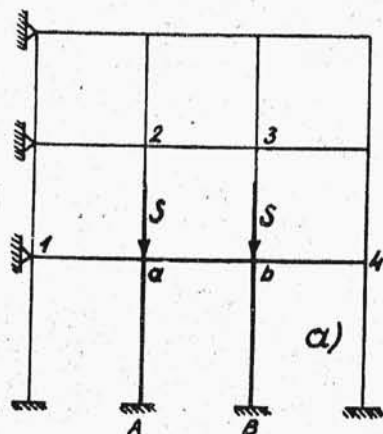


Rys. 6b.

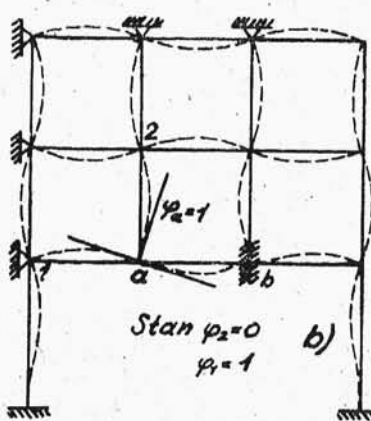
daje: $\varphi_1 [m_{aA} c(\alpha_{aA}) + \sum_1^8 M_{ai}] = 0$

o wyznaczniku: $c(\alpha_{aA}) + \frac{1}{m_{aA}} \sum_1^8 M_{ai} = 0$

Z ostatniego związku wyznaczmy kolejne wartości α_{aA} i odpowiadające im wartości sił krytycznych. Dla ramy piętrowej (rys. 7) otrzymamy wyznacznik drugiego rzędu, operując na



Układ 12-krotnie geom. niewyzn.



Układ 10-krotnie geom. niewyznaczalny.

układach $(k-2)$ — krotnie geometrycznie niewyznaczalnych. Nakręcając węzeł a kątem $\varphi_a = 1$ wyznaczamy momenty przywęzłowe

$$M_{a1}, M_{a2}, M_{a3}, M_{a4}.$$

nakręcając węzeł b kątem $\varphi_b = 1$ wyliczamy momenty

$$\bar{M}_{ba}, \bar{M}_{b3}, \bar{M}_{b4}, \bar{M}_{ab}.$$

Zrównoważenie węzła a i b daje ostatecznie:

$$[c(\alpha_{aA})m_{aA} + M_{a1} + M_{a2} + M_{a3}] \varphi_1 + \bar{M}_{ab} \varphi_2 = 0$$

$$M_{ba} \varphi_1 + [c(\alpha_{bB})m_{bB} + \bar{M}_{ba} + \bar{M}_{b3} + \bar{M}_{b4}] \varphi_2 = 0$$

Przy dużej ilości węzłów układu ramowego i znacznej ilości prętów obciążonych siłą podłużną, wzrasta trudność wyznaczenia pierwiastków równania $D(\alpha) = 0$

W tym wypadku duże usługi może oddać algorytm Gauss'a.

Wyznacznik układu liniowych równań jednorodnych:

$$a_{K1} \varphi_1 + a_{K2} \varphi_2 + \dots + a_{KK} \varphi_K + \dots + a_{Kn} \varphi_n = 0$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{Ki} \varphi_i = 0 \quad (8)$$

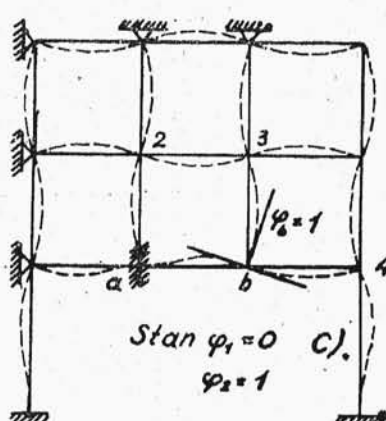
da się przedstawić w postaci:

$$D(\alpha) = a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot a_{33}^{(3)} \cdot \dots \cdot a_{KK}^{(k-1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \quad (9)$$

gdzie $a_{kk}^{(k-1)}$ jest współczynnikiem przy φ_k w pierwszym równaniu $(k-1)$ -nej eliminacji. Przyjmując, za α kolejne wartości $\alpha = \pi, 1, 1\pi, 1, 2\pi$ itd. otrzymamy coraz to inne układy równań (8) a po wykonaniu eliminacji coraz to nowe wartości $D(\alpha)$ ze wzoru (9). Równanie (9) przedstawia krzywą, której pierwiastki dają wartości α_1, α_2

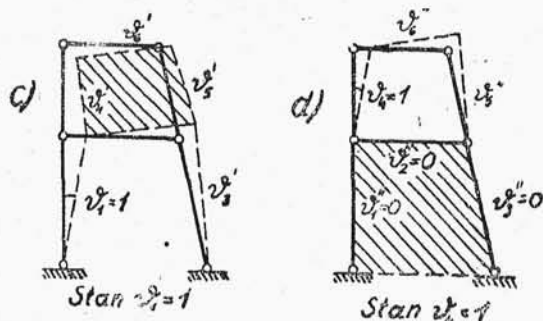
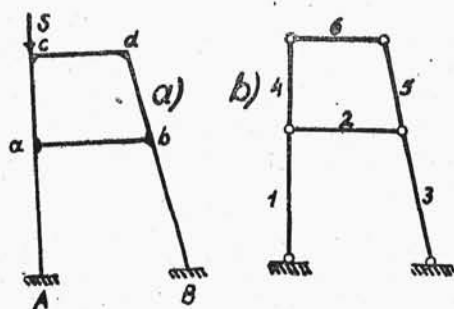
D. Ramy przesuwne. W wypadku ram przesuwnych obok kątów obrotu węzłów φ wystąpią niezależne od siebie kąty obrotu prętów. Ilość ich pokrywa się z ilością stopni swobody, jakie posiada łańcuch prętowy, który powstał z zastąpienia węzłów sztywnych przegubami.

I tak rama piętrowa (rys. 8) posiada dwa stopnie swobody; przynależny jej łańcuch prętowy stanowi kratownicę o dwóch stopniach swobody.



Rys. 7.

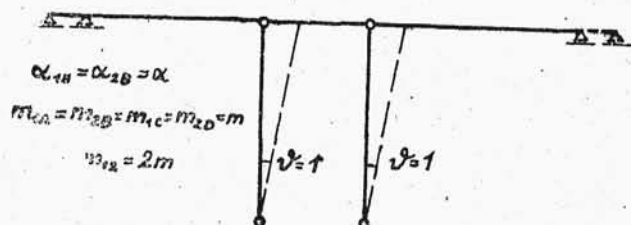
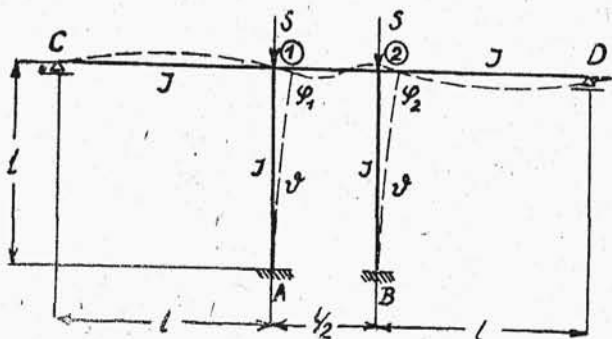
Jako niewiadome niezależne obrotów prętów wystąpią wielkości ϑ_1 i ϑ_2 . Ograniczymy się w dalszych rozważaniach do układów ramowych o siatce ortogonalnej^{*)}. Przy kątach



Rys. 8.

obrotu węzłów i t niezależnych kątach ϑ dysponujemy k równaniami równowagi węzłów i t równaniami równowagi pęter. I tak dla ramy przesuwaney rys. 9 zrównoważenie węzłów 1 i 2 daje:

$$M_{1A} + M_{12} + M_{1C} = 0, \quad M_{21} + M_{2D} + M_{2B} = 0$$



Rys. 9.

^{*)} Układy o dowolnej siatce prętowej omówione będą w oddzielnej pracy.

Zrównoważenie wyciętego rygla C—1—2—D daje $R_{1A} + R_{2B} = 0$ Dla rygla: $\vartheta = 0$ dla słupa: $1A$ i $2B$. $\vartheta = \vartheta_{1A} = \vartheta_{2B}$

Wyrażając momenty przywęzłowe i reakcje (siły tnące) z równań (2....6a) przez kąty φ i ϑ otrzymamy układ 3-ch równań:

$$\begin{aligned} \varphi_1 / [1,5m_{1C} + 2m_{12} + m_{1AC}(\alpha_{1A})] + m_{12}\varphi_2 - m_{1A}r(\alpha)\vartheta &= 0 \\ m_{12}\varphi_1 + [1,5m_{2D} + 2m_{12} + m_{2BC}(\alpha_{2B})] \varphi_2 - m_{2B}r(\alpha)\vartheta &= 0 \\ m_{1A} / [r(\alpha_{1A})\varphi_1 - t(\alpha_{1A})\vartheta] + m_{2B} / [r(\alpha_{2B})\varphi_1 - t(\alpha_{2B})\vartheta] &= 0 \end{aligned}$$

Dzielimy pierwsze i drugie równanie przez m_{1A} trzecie przez $-\frac{m_{1A}}{1}$

$$\begin{aligned} \text{Wtedy } [c(\alpha) + 5,5] \varphi_1 + \varphi_2 - r(\alpha)\vartheta &= 0 \\ \varphi_1 + [5,5 + c(\alpha)] \varphi_2 - r(\alpha)\vartheta &= 0 \\ \text{(a)} \quad -r(\alpha)\varphi_1 - r(\alpha)\varphi_2 + 2t(\alpha)\vartheta &= 0 \end{aligned}$$

Wyznacznik układu

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} c(\alpha) + 5,5 & 1 & -r(\alpha) \\ 1 & c(\alpha) + 5,5 & -r(\alpha) \\ -r(\alpha) & -r(\alpha) & 2t(\alpha) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(b)}$$

rozpada się na dwa niezależne rozwiązania

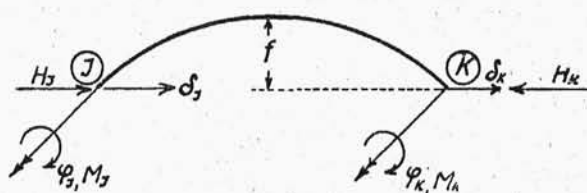
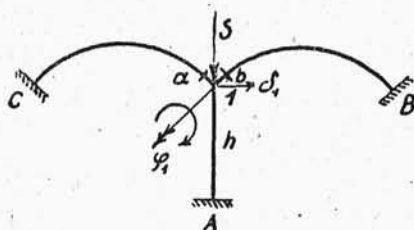
$$\begin{aligned} 1). \quad c(\alpha) + 4,5 &= 0 \\ 2). \quad 2t(\alpha) [c(\alpha) + 6,5] - 2r^2(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad \text{(c)}$$

Pierwsze równanie daje symetryczną, drugie antysymetryczną postać wybożenia. Łatwo to sprawdzić wstawiając do układu równań raz $\varphi_1 = -\varphi_2$; $\vartheta = 0$ drugi raz $\varphi_1 = \varphi_2$; $\vartheta = 0$

Najmniejszy pierwiastek znajdziemy dla postaci antysymetrycznej

$$\alpha_1 = 2,91; \quad SK_1 = 2,91^2 \frac{EJ}{h^2}$$

Powyższe rozważania rozszerzyć można na układy ramowe o słupach prostych, ryglach zakrzywionych lub załamanych i nieobciążonych.



Rys. 10.

Jeżeli pręt zakrzywiony lub załamany J — K przesuniemy na prawo o wielkość $(\delta_K - \delta_J)$ przy jednoczesnym obrocie końców pręta o kąty φ_J, φ_K , to wyrazić możemy przy pomocy równań analogicznie zbudowanych jak równania (5) związek między momentami M_J, M_K reakcjami H_J, H_K a kątami φ_J, φ_K i przesunięciami δ_J, δ_K .

Współczynniki przy φ i δ są wielkościami stałymi, zależnymi od geometrycznych i sprężystych właściwości pręta (E, J, L, f).

Zrównoważenie zatem węzła 1 daje 2 równania $M_{1C} + M_{1B} + M_{1A} = 0, \quad H_{1C} - H_{1B} + R_{1A} = 0$ albo

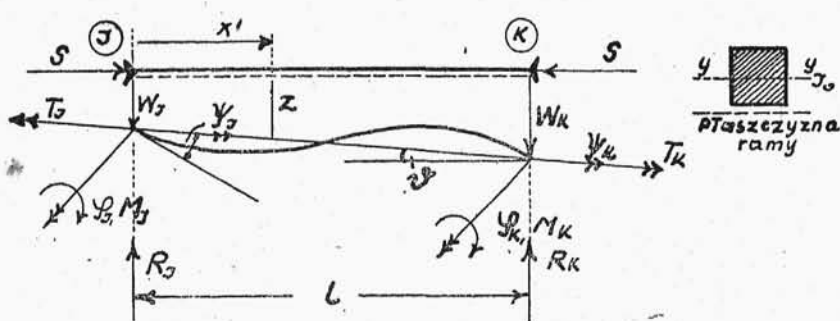
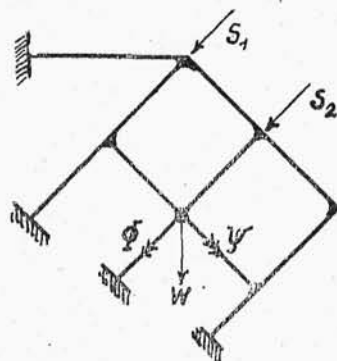
$$\begin{aligned} & [M_{aa}^{\varphi} + M_{bb}^{\varphi} + m_{1A} c (\alpha_{1A})] \varphi_1 + \\ & + [M_{aa}^{\delta} + M_{bb}^{\delta} - \frac{m_{1A}}{h} r (\alpha)] \delta_1 = 0 \\ & [H_{aa}^{\varphi} - H_{bb}^{\varphi} + r (\alpha) m'_{1A}] \varphi_1 + \\ & + [H_{aa}^{\delta} - H_{bb}^{\delta} - \frac{m'_{1A}}{h} t (\alpha)] \delta_1 = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

$$\delta \cdot h = \delta_1$$

Pierwiastki przyrównanego do zera wyznacznika układu równań (d) określają kolejne wartości sił krytycznych. Przy symetrii układu otrzymamy symetryczną i antysymetryczną postać wyboczenia.

II. Wyboczenie z płaszczyzny ramy.

A. Nadajmy węzłom układu ramowego nieskończenie małe przesunięcia W prostopadłe do płaszczyzny ramy oraz kąty obrotu Φ, Ψ o wektorach wzajemnie prostopadłych, leżących w płaszczyźnie ramy. W pręcie J — K obok skończonej wartości siły S dochodzą nieskończenie małe momenty zginające M i skręcające T .



Rys. 11.

Na końcach prętów powstaną momenty zginające M_J, M_K momenty skręcające T_J, T_K (wektory momentów zginających i skręcających leżą w płaszczyźnie ramy) oraz reakcje R_J, R_K (prostopadłe do płaszczyzny ramy). Stan odkształceń charakteryzują kąty obrotu φ_J, φ_K kąty skręcenia ψ_J, ψ_K (wektory w płaszczyźnie ramy) oraz przesunięcia W_J, W_K (wektory \perp do płaszczyzny ramy).

Przy takim oznaczeniu stanu odkształceń postuluje się możemy równaniami (2) do (6c), z tą jednak różnicą, że.

$$\alpha^2 = \frac{SI}{EJ_0}$$

(J_0 moment bezwładności przekroju względem osi $y - y$ leżącej w płaszczyźnie ramy) oraz

$$\Phi = \frac{W_K - W_J}{l}$$

Związek między momentami skręcającymi T_K i T_J , oraz kątami skręcenia ψ_J, ψ_K można wyrazić równaniem

$$T_J = T_K = \lambda (\psi_K - \psi_J) \quad 11$$

$\lambda = \frac{GC}{l}$; GC — sztywność pręta na skręcanie.

Związek (11) należy traktować jako przybliżenie. Jeżeli pręt zaopatrzone przegubami na końcach, obciążony będzie momentami skręcającymi $T_J = T_K = T$ oraz siłą podłużną S , to otrzymamy w wypadku niestateczności następującą zależność

$$S_K = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left[1 - \left(\frac{Tl}{2\pi EJ} \right)^2 \right]$$

Zależność tę dla pręta o przekroju kołowym ustalił A. G. Grenhill.

Wpływ momentu skręcającego na wielkość siły S_K jest dla normalnych prętów ramowych bardzo mały i odgrywać może pewną rolę przy znacznych smukłościach prętów.

Dlatego też przyjmując zależność (11) słuszną dla $S = 0$ popełnimy nieznaczny błąd dla tych prętów skręconych, w których wystąpi siła podłużna.

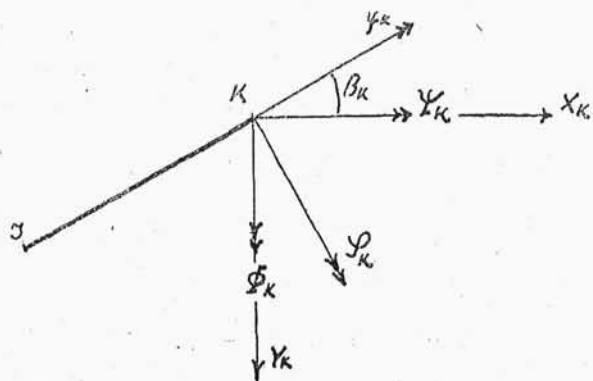
B. Przechodząc z położenia równowagi wolnej od momentów do położenia równowagi

o nieskończenie małe wygiętych prętach wypisujemy dla ostatniego położenia równowagi wyciętych węzłów.

W każdym węźle K założmy pomocniczy układ współrzędnych X_K, Y_K, Z_K .

Jako nadliczbowe przyjmijmy dwa kąty obrotu Ψ_K, Φ_K o wektorach leżących w kierunku osi X_K, Y_K , oraz przesunięcia pionowe do płaszczyzny W , skierowane w kierunku osi Z_K Wy-

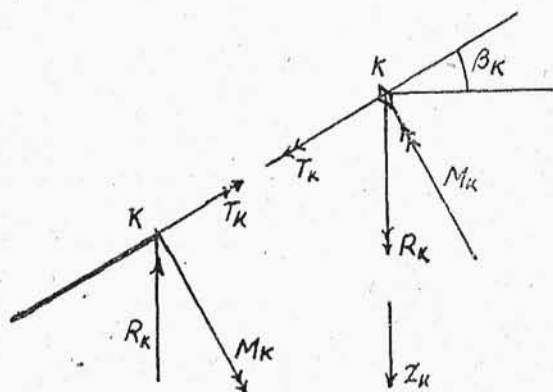
dzielmy dalej pręt J — K łączący węzły J i K. Brzegowe wartości stanu odkształceń $\varphi_K, \psi_K, \vartheta$ wyrazimy przez nadliczbowe Φ_K, Ψ_K, W_K



Rys. 12.

Z rys. 12 odczytamy następujące zależności

$$\begin{aligned}\psi_K &= \Psi_K \cos \beta_K - \Phi_K \sin \beta_K \\ \varphi_K &= \Psi_K \sin \beta_K + \Phi_K \cos \beta_K \\ \vartheta_{JK} &= \frac{W_K - W_J}{l_j}\end{aligned}\quad (12)$$



Rys. 13.

Brzegowe wartości statyczne podaje rys. 13. Rzuły ich na kierunki X_K, Y_K, Z_K dają następujące wielkości

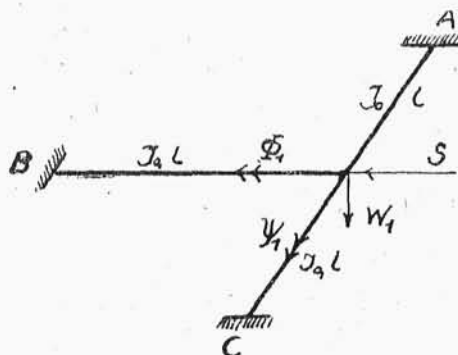
$$\begin{aligned}-T_K \cos \beta_K - M_K \sin \beta_K \\ T_K \sin \beta_K - M_K \cos \beta_K \\ -R_K\end{aligned}$$

Zrównoważenie węzła K prowadzi do trzech równań

$$\begin{aligned}\sum T_K \cos \beta_K + \sum M_K \sin \beta_K &= 0 \\ \sum T_K \sin \beta_K - \sum M_K \cos \beta_K &= 0 \\ \sum R_K &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

Znak sumy rozciąga się na wszystkie pręty zbiegające się w węzle K. Równań typu (13) wypisujemy tyle, ile mamy węzłów. Jeżeli za T_K, M_K, R_K ze wzorów (13) podstawimy ich wartości ze wzorów transformacyjnych jako liniowe funkcje kątów i przesunięć φ, ψ, ϑ a ostatnie wyrazimy przez przyjęte nadliczbowe Φ, Ψ, W , to otrzymamy układ jednorodnych równań liniowych. Układ tych równań będzie niesprzecznym, gdy

wyznacznik układu $D(\alpha) = 0$. Jest to równanie warunkowe wybożenia układu.



Rys. 14.

Dla układu ramowego rys. 14 przy wybożeniu układu z płaszczyzny ramy, zrównoważenie węzła 1 prowadzi do układu trzech równań

$$\begin{aligned}M_{1A} + M_{1C} - T_{1B} &= 0; \quad M_{1B} + T_{1A} - T_{1C} = 0; \\ R_{1A} + R_{1B} + R_{1C} &= 0\end{aligned}\quad /a/$$

Powyższe wielkości wyrazimy przy pomocy równań transformacyjnych:

$$\begin{aligned}M_{1A} &= m(2\varphi_{1A} - 3\vartheta_{1A}) = 2m\Phi_1 - 3m'\Psi_1 \\ M_{1B} &= m[c(\alpha)\varphi_{1B} - r(\alpha)\vartheta_{1B}] = mc(\alpha)\Psi_1 - m'r(\alpha)W_1 \\ T_{1B} &= \lambda\psi_{1B} = -\lambda\Phi_1 \\ R_{1A} &= 3m'(\varphi_{1A} - 2\vartheta) = 3m'\Phi_1 - 6m''W_1 \text{ i t. d.}\end{aligned}$$

$$m' = \frac{m}{l}, \quad m'' = \frac{m'}{l}$$

Wstawiając powyższe zależności do równań (a) otrzymamy układ 3-ech równań

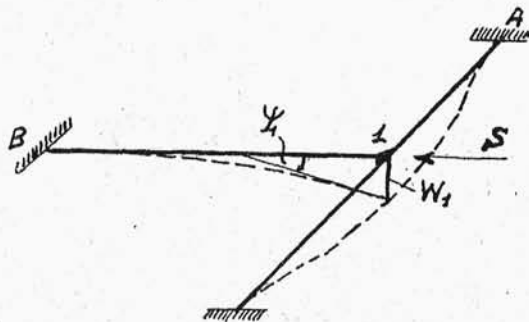
$$\begin{aligned}\Phi_1(4m + \lambda) &= 0, \quad \Phi_1 = 0 \\ \Psi_1[mc(\alpha) + 2\lambda] - m'r/a/W_1 &= 0 \\ -m'r/a/\Psi_1 + [12 + t/a/m'']W_1 &= 0\end{aligned}$$

o wyznaczniku

$$D/a/ = [c/a/ + \frac{2\lambda}{m}][t/a/ + 12] - r^2/a/ = 0$$

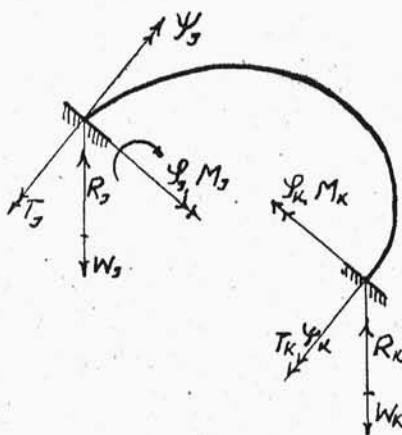
Kąt obrotu Φ_1 , jest stale równy zeru. Dla $2\frac{\lambda}{m} = 1$ wyliczono pierwiastek α_1 i wykreślono przynależną postać wybożenia.

$$\begin{aligned}S_{k \min} &= 4,58 \frac{E J_0}{l} \\ \alpha_1 &= 4,58\end{aligned}$$



Rys. 15.

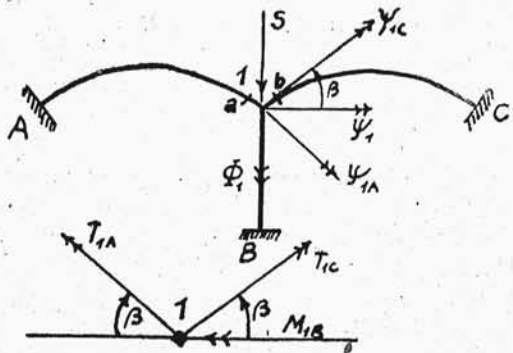
Powyższe rozwiązanie rozszerzyć można na płaski układ ramowy, składający się z prętów prostych oraz z prętów zakrzywionych lub załamanych. Założymy jednak, że obciążenie jest tego rodzaju, że w stanie wyjściowym pręty nie podlegają zginaniu i skręcaniu.



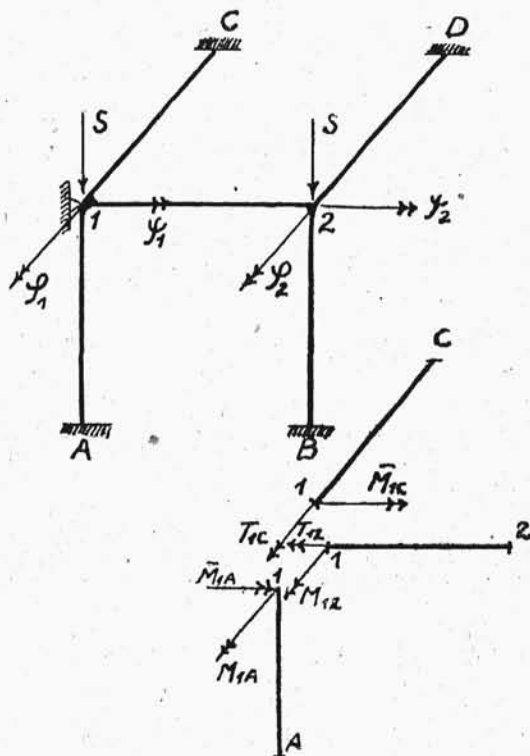
C. Dla prętów zakrzywionych otrzymamy analogiczne do wzorów (10) równanie transformacyjne. Dla przyjętych brzegowych wartości odkształceń (rys. 16) otrzymamy następujące związki między odkształceniami a brzegowymi składowymi stanu naprężeń

$$Z_k = Z_{kj}^{\varphi} \varphi_j + Z_{kk}^{\varphi} \varphi_k + Z_{kj}^{\psi} \psi_j + Z_{kk}^{\psi} \psi_k + \\ + Z_{kj}^W W_j + Z_{kk}^W W_k \quad i \quad \sqrt{(Z = M, T, K)}$$

Współczynniki Z_{JJ} , Z_{KK} ... są wartościami stałymi zależnymi jedynie od sprężystych i geometrycznych właściwości pręta (G , E , J_0 , C , I)
Dla symetrycznej ramy nieprzesuwnej (w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ramy) $\Phi_1 = Q$
 $W_1 = 0$ do wyznaczenia siły krytycznej wystarczy zrównoważyć węzeł 1


$$\text{Stqd} \quad \psi_1 [m_1 \beta c / \alpha / + 2 I_{aa}^{\psi} \cos^2 \beta] = 0$$
$$c/|\alpha| = -2 \frac{T_{aa}^{\psi} \cos^2 \beta}{m_{1B}}$$

D). **Wyboczenie ramy przestrzennej.** W ramach przestrzennych o siatce ortogonalnej wyboczenie nastąpić może w kilku płaszczyznach. W układzie ramowym (rys. 17) istnieje możliwość wyboczenia w płaszczyźnie 12AB, jak i w płaszczyznach A1C, B2D.



Rys. 17.

Układ taki należy badać na te możliwości. I tak przy wyboczeniu w płaszczyźnie A12B przy niezależnych wielkościach odkształceń φ_1, φ_2 warunkiem wyboczenia będzie wyznacznik $D(\alpha) = 0$ układu równań

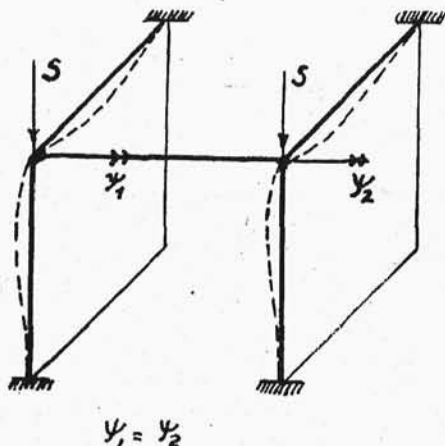
$$M_{12} + M_{14} + T_{1C} = 0, \quad M_{21} + M_{2B} + T_{2D} = 0 \quad (\text{a})$$

Przy wyoboczeniu z płaszczyzny 1AC, B2D warunkiem wyoboczenia będzie wyznacznik $D(\alpha) = 0$ układu równań

$$-T_{12} + \bar{M}_{14} + \bar{M}_{1C} = 0, \quad T_{21} + \bar{M}_{2D} = 0 \quad (b)$$

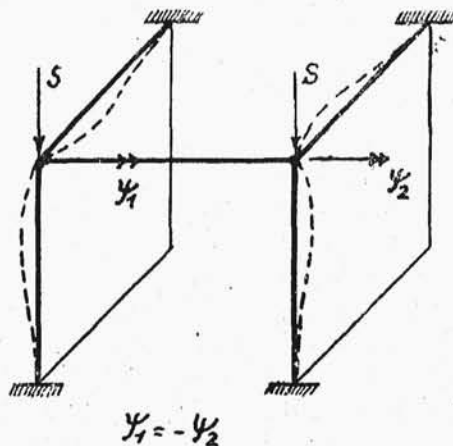
Przy jednakowych rozpiętościach i jednakowym dla wszystkich prętów przekroju kołowym uzyskamy

$$\begin{aligned} [mc/a + 2m + \lambda] \varphi_1 + m \varphi_2 &= 0, \\ m \varphi_1 + [mc/a + 2m + \lambda] \varphi_2 &= 0, \\ [mc/a + 2m + \lambda] \psi_1 - \lambda \psi_2 &= 0, \\ -\lambda \psi_1 + [mc/a + 2m + \lambda] \psi_2 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} c/a + 2 &= 0, \quad \psi_1 = \psi_2 \\ c/a + 2 + \frac{2\lambda}{m} &= 0; \quad \psi_1 = -\psi_2. \end{aligned}$$

Przytoczony przykład pozwala ocenić, że wyboczenie układów ramowych przestrzennych o siatce ortogonalnej tak nieprzesuwnych jak i przesuwnych nie nastręcza żadnych trudności,



Rys. 18.

Wyznacznik $D(a)$ układu równań (a') daje:

$$c/a + \frac{\lambda}{m} + 3 = 0, \quad c/a + \frac{\lambda}{m} + 1 = 0$$

Pierwsze równanie określa antymetryczną $\varphi_1 = \varphi_2$, drugie symetryczną postać wyboczenia $\varphi_1 = -\varphi_2$. Najmniejszy pierwiastek α_1 otrzymamy dla symetrycznej postaci wyboczenia. Wyznacznik $D'(a)$ układu równań (b') daje się sprowadzić do dwóch równań

wzrasta jedynie ilość niezależnych przesunięć i obrotów, a tym samym rząd wyznacznika. Jednak dla ram symetrycznych i symetrycznie obciążonych (a takie wypadki na ogół występują) można wyznacznik układu zawsze rozbić na iloczyn dwóch wyznaczników

$$D/a = D_a/a \cdot D_s/a = 0$$

przyczem $D_a(a) = 0$ daje antymetryczną, $D_s(a) = 0$ symetryczną postać wyboczenia.