

NAUKOWE OSIĄGNIĘCIA MECHANIKI W WALCE O POSTĘP W BUDOWNICTWIE

CZEŚĆ III, ZESZYT I

**z materiałów nadesłanych na Zjazd Naukowy PZITB
w Gdańsku 1 – 4 grudnia 1949 r.**

Prof. Dr Inż. Witold Nowacki, Gdańsk.

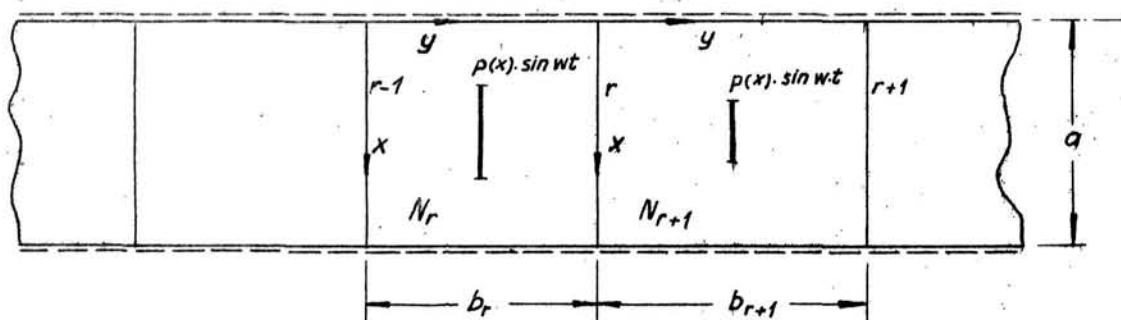
Zakład Mechaniki Budowli Politechniki Gdańskiej.

Drgania własne i wymuszone pewnego typu płyt ciągłych.

W obecnym czasie zagadnienia dynamiki układów ramowych są dostatecznie obszernie opracowane i punkt ciężkości zainteresowań techników zaczyna przesunąć się na dynamikę układów dwuwymiarowych płyt i tarcz.

Z tych ostatnich układów specjalne zainteresowanie dla zastosowań praktycznych wzbudza dynamika układów płytowych; coraz liczniej ukazują się prace poświęcone rozwiązaniom ścisłym i przybliżonym tych układów. *)

Zadanie, jakie sobie w niniejszej pracy stawiamy, to podanie ścisłego rozwiązania zagadnienia drgań własnych i wymuszonych płyty, spoczywającej na dowolnej ilości podpór poprzecznych oraz na dwóch podporach podłużnych według rys. 1. Jako obciążenie wzbudzające drgania przyjęto obciążenie liniowe $p(x)$, równoległe do podpór poprzecznych.



Rys. 1.

*) Wśród nich należy ze względu na zastosowanie praktyczne zwrócić uwagę na pracę W.Z. Własowa. "Pribliżennaja teoria tonkostiennych i zhibajemych prizmatycznych sistem i płastinok i raszczet ich na kolebania i ustojczewost." Issledowania po dinamike sooruzhenia - Stroitdat 1947-Moskwa.

A). Drgania własne płyty ciągłej.

Znane równanie różniczkowe powierzchni odkształcenia płyty pobudzonej do drgań własnych, brzmi:

$$N \Delta \Delta \bar{\omega} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial t^2} = 0 \quad \dots (1)$$

W powyższym równaniu oznaczają:

$N = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$ - charakterystykę sztywności zginania płyty;
 E - moduł sprężystości; h - grubość płyty; ν - liczbę Poissona; $\bar{\omega}(x, y, t)$ - pionowe przesunięcie punktów płaszczyzny środkowej płyty; μ - masa płyty odniesiona do jednostki płaszczyzny środkowej.

Wprowadzając oznaczenia $\eta = \frac{y}{b}$, $\xi = \frac{x}{b}$ oraz $\alpha = \frac{b}{a}$ oraz przy założeniu $\bar{\omega}(x, y, t) = w(x, y) \cdot \sin \omega t$ doprowadzamy równanie (1) do postaci:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^2 \cdot \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial \eta^4} - c^2 \cdot \omega = 0 \quad \dots (2)$$

gdzie

$$c^2 = \mu \cdot \frac{\omega^2 \cdot b^4}{N}$$

Przy założeniu $\omega_k = Y_k(\eta) \cdot \sin v_k \cdot \xi$: $v_k = K \cdot \pi \cdot \alpha$; $K = 1, 2, \dots$ jako całki szczególnej równania (2) spełniającej warunki brzegowe w krawędziach $x=0$, $x=a$ doprowadzamy równanie cząstkowe (2) do równania zwyczajnego:

$$\frac{\partial^4 Y_k}{\partial \eta^4} - 2v_k^2 \cdot \frac{\partial^2 Y_k}{\partial \eta^2} + Y_k \cdot v_k \cdot (1 - \delta_k) = 0 \quad \dots (3)$$

gdzie

$$\delta_k = \frac{K^2}{v_k^2} = \frac{\omega_k^2}{\omega_{k,0}^2}$$

Wielkość δ_k wyraża się stosunkiem kwadratów k -tej częstotliwości drgań własnych płyty ciągłej do k -tej częstotliwości drgań własnych płyty w kierunku y nieskończenie długiej

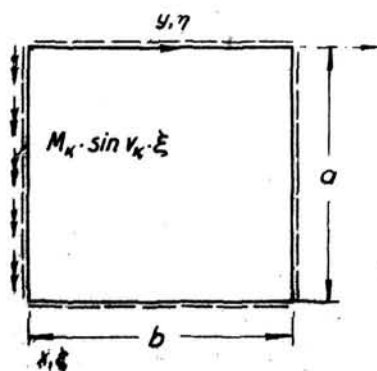
$$\omega_{k,0}^2 = \frac{N \cdot \pi^4 \cdot K^4}{\mu \cdot a^4}$$

Ponieważ dla płyty ciągłej częstotliwość drgań własnych jest stale wyższą niż dla płyty nieskończenie długiej, zatem $\delta_k > 1$, a zatem całka ogólna równania przyjmie postać:

$$Y_k = U_{1,k} \cdot \cosh m_k \cdot \eta + U_{2,k} \cdot \sinh m_k \cdot \eta + U_{3,k} \cdot \cos n_k \cdot \eta + U_{4,k} \cdot \sin n_k \cdot \eta \quad \dots (4)$$

Wskutek drgań własnych powstają na prostych podporowych poprzecznych momenty zginające i skręcające (z naszych rozważań eliminujemy jednak wypadek równych rozpiętości b i sztywności N przęseł, gdyż w tym wypadku momenty podporowe m_y są równe zeru). Momenty zginające m_y na liniach podporowych przyjmiemy jako nadliczbowe zadania. Z równań ciągłości płyty nad podporami poprzecznymi ustawimy związki między tymi "nadliczbowymi", co doprowadzi do jednorodnych równań trójczłonowych i stanowić będzie transpozycję znanych równań Clapeyrona na obszar dwuwymiarowy.

Przedtem zajmiemy się jednak wyznaczeniem pewnych elementów, stanowiących podstawę dalszych rozważań. Niech w krawędzi $y=0$ płyty prostokątnej dookoła swobodnie podpartej działa moment $m_y(x,0) = M_K \cdot \sin v_K \cdot \xi$ (rys.2).



Rys. 2

Powierzchnię odkształcenia, a właściwie amplitudę tej powierzchni określamy równaniami:

$$w_K(x,y) = Y_K(\eta) \cdot \sin v_K \cdot \xi$$

gdzie Y_K przedstawione jest równaniem (4).

Stałe $U_{1,K} \dots U_{4,K}$ wyznaczymy z czterech warunków brzegowych:

$$Y_K(0) = 0, \quad Y_K(1) = 0.$$

$$-N \cdot \frac{d^2 Y_K}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} = -M_K \cdot b^2; \quad \frac{d^2 Y_K}{d\eta^2} \Big|_{\eta=1} = 0$$

Wstawiając stałe całkowania do wyrażeń:

$$\frac{\partial w_K}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad \frac{\partial w_K}{\partial y} \Big|_{y=b}$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_K}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{M_K \cdot b}{N} \cdot F_K \cdot \sin v_K \cdot \xi \\ \frac{\partial w_K}{\partial y} \Big|_{y=b} &= -\frac{M_K \cdot b}{N} \cdot G_K \cdot \sin v_K \cdot \xi \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

gdzie

$$F_k = \frac{1}{2 \nu_k^2 \sqrt{\delta_k}} \cdot (m_k \cdot \operatorname{ctgh} m_k - n_k \cdot \operatorname{ctg} n_k), \quad \dots (6)$$

$$G_k = \frac{1}{2 \nu_k^2 \sqrt{\delta_k}} \cdot (n_k \cdot \operatorname{cosec} n_k - m_k \cdot \operatorname{cosech} m_k)$$

Gdyby moment $M_k \cdot \sin \nu_k \cdot \xi$ działał wzdłuż krawędzi $y=b$ wtedy otrzymalibyśmy:

$$\frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{M_k \cdot b}{N} \cdot G_k \cdot \sin \nu_k \cdot \xi; \quad \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=b} = - \frac{M_k \cdot b}{N} \cdot F_k \cdot \sin \nu_k \cdot \xi \quad \dots (7)$$

Powróćmy teraz do płyty ciągłej (rys.1), pobudzonej do drgań własnych. Rozważmy dwa sąsiednie przęsła $(r-1) - r$ oraz $r - (r+1)$. Amplitudy momentów podporowych $r-1, r, r+1$ oznaczmy przez M_{r-1}, M_r, M_{r+1} .

Ciągłość płyty nad linią podporową określi równanie:

$$- \frac{\partial w_{k,r}}{\partial y} \Big|_{y=b-r} + \frac{\partial w_{k,r+1}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \dots (8)$$

Wyrażając nachylenie powierzchni odkształcenia z równania (8) przez momenty podporowe $M_{k,r-1}, M_{k,r}, M_{k,r+1}$ doprowadzimy równanie (8) do postaci:

$$M_{k,r-1} \cdot G_{k,r} \cdot c_r + M_{k,r} \cdot (F_{k,r} \cdot c_r + F_{k,r+1} \cdot c_{r+1}) + M_{k,r+1} \cdot G_{k,r+1} \cdot c_{r+1} = 0 \quad \dots (9)$$

$$(k = 1, 2, \dots \infty); \quad (r = 1, 2, \dots z-1)$$

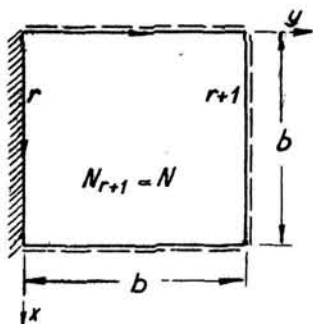
W powyższym równaniu c_r oznacza $\frac{b_r}{b_0} \cdot \frac{N_0}{N_r}$ gdzie b_0 jest porównawczą długością pola, a N_0 porównawczą sztywnością zginania płyty.

Dla każdego k ($k=1, 2, \dots$) ustawiamy $(z-1)$ równań trójczłonowych jednorodnych (przy $z+1$ podporach poprzecznych). Układ tych równań będzie niesprzeczny, gdyż wyznacznik $\Delta \delta_k$ układu równań będzie równy zeru. Przyrównanie do zera wyznacznika układu prowadzi do równania przystępnego, którego pierwiastki dają kolejne częstotliwości drgań własnych płyty ciągłej. Podstawową częstotliwość otrzymamy z najmniejszej wartości pierwiastka równania.

W równaniu trójczłonowym (9) mieści się szereg wypadków

szczególnych, z których dwa szczególnie proste omówimy.

α). Płyta w krawędzi $y=0$ utwierdzona zupełnie, w krawędzi $y=b$ swobodnie podparta (rys.3).



Rys. 3.

Stosując równanie (9) przy:

$$M_{r+1} = 0; \quad c_r = \frac{b_r}{b_o} \cdot \frac{N_o}{N_r} = 0$$

otrzymamy:

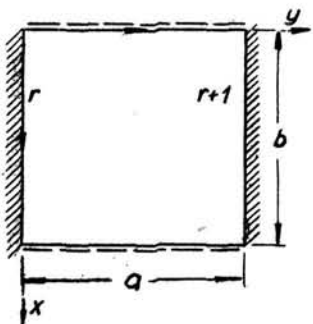
$$M_{K,r} \cdot c_{r+1} \cdot F_{K,r+1} = 0$$

co przy $M_{K,r} \neq 0; \quad c_{r+1} \neq 0$ prowadzi do związku $F_{K,r+1} = 0$ albo po prostych przekształceniach do zależności:

$$m_K \cdot \operatorname{ctgh} m_K = n_K \cdot \operatorname{ctg} n_K \quad \dots(a)$$

$$(K = 1, 2, \dots, \infty)$$

β). Płyta obustronnie utwierdzona zupełnie (rys.4).



Rys. 4.

1) symetryczna postać drgań w kierunku y :

$$M_{K,r} = M_{K,r+1} \neq 0.$$

Równanie (8) daje:

$$M_K \cdot (F_K + G_K) = 0$$

co przy prostych przekształceniach prowadzi do dzwiazku:

$$\frac{m_K}{2} \cdot \operatorname{tgh} \frac{m_K}{2} + \frac{n_K}{2} \cdot \operatorname{tgh} \frac{n_K}{2} \quad \dots(b)$$

2) antymetryczna postać drgań w kierunku y :

$$M_{K,r} = -M_{K,r+1} \neq 0.$$

Otrzymamy tu $F_K - G_K = 0$, a po przekształceniach:

$$m_K \cdot \operatorname{tg} \frac{n_K}{2} = n_K \cdot \operatorname{tgh} \frac{m_K}{2} \quad \dots(c)$$

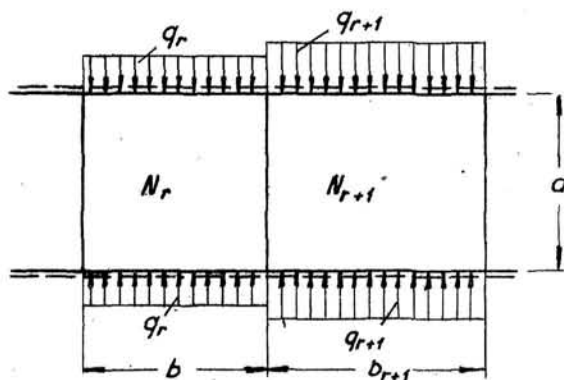
W powyższych trzech równaniach warunkowych drgań (równ. a, b, c) wielkość m_K daje się wyrazić przez n_K ze związku $m_K^2 - n_K^2 = 2v_K$. Po wyznaczeniu z powyższych równań kolejnych pierwiastków m_K względnie n_K , częstotliwość drgań własnych znajdujemy ze związku:

$$m_K^2 + n_K^2 = 2v_K^2 \cdot \sqrt{5_K}$$

albo

$$\omega_K^2 = \frac{N \cdot K^4 \cdot K^4}{a^4 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{m_K^2 + n_K^2}{2v_K^2} \right)^2.$$

U w a g a . Rozważania dotyczące drgań własnych płyty ciągłej bez trudu rozszerzyć można na zagadnienie drgania płyty przy jednoczesnym ściskaniu jej stałym obciążeniem σ działającym w płaszczyźnie płyty w kierunku x (rys.5).



Rys. 5.

W tym przypadku określonym rozszerzonym równaniem różniczkowym:

$$N \Delta \bar{w} + q \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0$$

postępując analogicznie jak w wypadku braku sił podłużnych dojdziemy do tych samych równań trójczłonowych z tą jednak różnicą, że za δ_K wstawić należy

$$\delta_K = \frac{\omega_K^2}{\omega_{K,0}^2} + \frac{q}{q_{K,0}} \quad \dots (10)$$

gdzie

$$q_{K,0} = \frac{N \cdot \pi^2 \cdot K^2}{a^2}$$

Dla zagadnienia więc wyboczenia płyty (rys.3 i 4) otrzymamy równanie (a) i (b) jako równanie warunkowe wyboczenia, wstawiając jedynie w wyrażeniu δ_K wartość $\omega = 0$ *) Bez trudu też stwierdzamy, że między siłą krytyczną q wyboczenia płyty ciągłej a częstotliwością drgań własnych płyty ciągłej zachodzi związek:

$$\omega_K^2 = \bar{\omega}_K^2 \cdot \left(1 - \frac{q}{q_K}\right) \quad \dots (11)$$

gdzie $\bar{\omega}_K$ oznacza częstotliwość drgań własnych płyty ciągłej dla $q=0$, a \bar{q}_K oznacza k -tą siłę krytyczną płyty ciągłej dla stanu $\omega=0$.

B). D r g a n i a w y m u s z o n e p ł y t y c i ą g ł e j

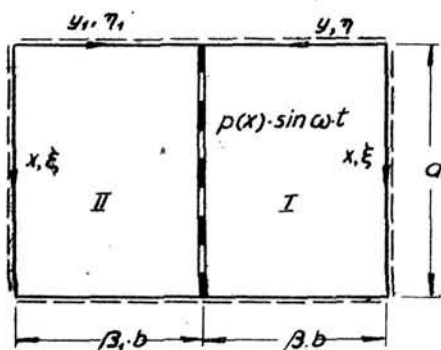
Niech w poszczególnych przęsłach płyty ciągłej działa obciążenie liniowe $p(x) \cdot \sin \omega \cdot t$, wprowadzające płytę ciągłą

*) Porównaj: W.Nowacki: Flexion et flambage d'un certain type de plaques continues orthotropes. III-me Congres A.I. P.Ch. -Liege 1948.

w drgania wymuszone. Niech obciążenia te zmieniają się z tą samą częstotliwością i w tej samej fazie (rys.1)

Zanim jednak przystąpimy do płyt ciągłych rozważyć musimy dwa wypadki drgań wymuszonych płyty swobodnie podpartej wzdłuż wszystkich jej brzegów.

1). Płyta prostokątna (rys.6) poddana działaniu obciążenia liniowego $p(x) \cdot \sin \omega t$.



Rys. 6.

Płytę traktujemy jako dwie płyty I i II oddzielone przekrojem $y_1 = \beta_1 \cdot b$.

Dla każdej z tych płyt otrzymujemy jednorodne równanie różniczkowe:

dla płyty I

$$N \cdot \Delta \Delta \bar{w}_I + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0$$

dla płyty II

$$N \cdot \Delta \Delta \bar{w}_{II} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0$$

...(12)

W przekroju $y_1 = \beta_1 \cdot b$ spełnić należy następujące warunki brzegowe:

$$w_I = w_{II}; \quad \frac{\partial \bar{w}_I}{\partial y_1} = - \frac{\partial w_{II}}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial^2 \bar{w}_I}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 \bar{w}_{II}}{\partial y_1^2}$$

...(13)

$$N \cdot \left(\frac{\partial^3 \bar{w}_I}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 \bar{w}_{II}}{\partial y_1^3} \right) = - p(x) \cdot \sin \omega t$$

Przy założeniu

$$\bar{w}(x, y, t) = w(x, y) \cdot \sin \omega t = \sin \omega t \cdot \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} Y_k(\eta) \cdot \sin v_k \cdot \xi$$

i oznaczeniach

$$\frac{y}{b} = \eta; \quad \frac{y_1}{b} = \eta_1; \quad \xi = \frac{x}{b}; \quad v = k \cdot \pi \cdot a$$

oraz wykorzystaniu równań (2,3,4) napiszemy równanie powierzchni odkształcenia płyty I i II w postaci:

$$\omega_I = \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} (U_{2,k} \cdot \sinh m_k \cdot \eta + U_{4,k} \cdot \sin n_k \cdot \eta) \cdot \sin v_k \cdot \xi$$

...(14)

$$\omega_{II} = \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} (U'_{2,k} \cdot \sinh m_k \cdot \eta_1 + U'_{4,k} \cdot \sin n_k \cdot \eta_1) \cdot \sin v_k \cdot \xi$$

gdzie, jak w ustępie (A).

$$m_k = v_k \sqrt{\delta_k + 1} ; \quad n_k = v_k \sqrt{\delta_k - 1} ; \quad \delta_k = \frac{\omega^2}{\omega_{ak}^2} > 1.$$

Założenie $\delta_k > 1$ może nie być spełnione we wszystkich członach szeregów (14); gdyby w którym z członów tych szeregów było $\delta_k < 1$ to należy w miejsce $\sin n_k \eta$ wstawić $i \cdot \sinh n_k \eta$ (gdzie $i = \sqrt{-1}$).

Dodać należy, że funkcje (14) są tak dobrane, aby obok spełnienia równań (12) spełnione były warunki brzegowe w krawędziach $y=0, y_1=0$.

Wyrażając obciążenie $p(x)$ szeregiem Fouriera:

$$\sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} p_k \sin v_k \xi = p(x)$$

otrzymamy z warunków brzegowych (13) układ czterech równań, z którego kolejno wyznaczymy:

$$U_{2,k} = - \frac{p_k \cdot b^3}{N}.$$

$$\frac{1}{m_k \cdot (m_k^2 + n_k^2) \cdot \cosh m_k \beta \cdot [1 + \tanh m_k \beta \cdot \coth m_k \beta_1]} ;$$

$$U_{4,k} = \frac{p_k \cdot b^3}{N}.$$

$$\frac{1}{n_k \cdot (m_k^2 + n_k^2) \cdot \cos n_k \beta \cdot [1 + \tanh n_k \beta \cdot \coth n_k \beta_1]} ;$$

$$U'_{2,k} = \frac{\sinh m_k \beta}{\sin m_k \beta} \cdot U_{2,k} ;$$

$$U'_{4,k} = U_{4,k} \cdot \frac{\sin n_k \beta}{\sin n_k \beta_1}.$$

... (15)

Znajomość stałych $U_{2,k} \dots U'_{4,k}$ pozwoli już z równania (14) wyznaczyć powierzchnię ugięcia w_I i w_{II} , a tym samym i wszelkie składowe stanu naprężeń płyty.

Nachylenie powierzchni ugięcia płyty w kierunku y w prostej $y=0$ i $y_1=0$ wyrażają związki:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_I}{\partial y}_{y=0} &= \frac{b^2}{N} \cdot \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} p_k \cdot \Theta_k^I \cdot \sin v_k \cdot \xi \\ \frac{\partial w_{II}}{\partial y}_{y=0} &= \frac{b^2}{N} \cdot \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} p_k \cdot \Theta_k^P \cdot \sin v_k \cdot \xi \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \Theta_k^I &= \frac{1}{m_k^2 + n_k^2} \cdot \left(\frac{\sinh m_k \cdot \sin n_k \cdot \beta_1 - \sin n_k \cdot \sinh m_k \cdot \beta_1}{\sinh m_k \cdot \sin n_k} \right) \\ \Theta_k^P &= \frac{1}{m_k^2 + n_k^2} \cdot \left(\frac{\sinh m_k \cdot \sin n_k \cdot \beta - \sin n_k \cdot \sinh m_k \cdot \beta}{\sinh m_k \cdot \sin n_k} \right) \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

(Zauważmy przy tej sposobności, że dla siły skupionej P działającej w odległości x_0 należy postawić:

$$p_k = \frac{2P}{a} \cdot \sin \frac{k \cdot \pi \cdot x_0}{a};$$

dla obciążenia jednostajnie rozłożonego p na długości a :

$$p_k = \frac{4p}{k \cdot \pi}$$

Z równań (16) odczytamy, że:

$$\frac{\partial w_I}{\partial y} \rightarrow \infty \quad \text{dla} \quad \sin n_k = 0.$$

Nastąpi to, gdy $n_k = j \cdot \pi$; $j = 1, 2, 3, \dots, \infty$;

tzn. gdy

$$\omega^2 = \omega_k^2 = \frac{\pi^4 \cdot k^4}{a^4} \cdot \frac{N}{\mu} \cdot \left[1 + \left(\frac{j \cdot a}{k \cdot b} \right)^2 \right]^2 \quad \dots (\alpha)$$

Ponieważ równanie (α) przedstawia kwadrat k -tej częstotliwości drgań własnych płyty prostokątnej, stwierdzamy znany fakt, że wypadek rezonansu nastąpi gdy częstotliwość drgań wymuszających pokryje się z jakąkolwiek częstotliwością drgań własnych płyty.

2). Płyta prostokątna (rys.7), obciążona momentem:

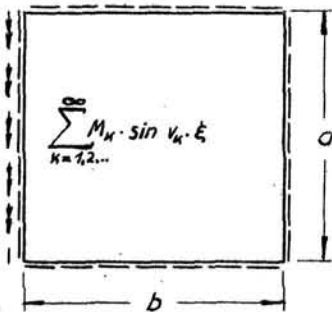
$$\sum M_k \cdot \sin v_k \cdot \xi \cdot \sin \omega t$$

wzdłuż prostej $y=0$.

Przypadek ten prowadzi do powierzchni ugięcia (por. wzór 4).

$$\omega(x, y) = \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} (U_{1,k} \cdot \cosh m_k \cdot \eta + U_{2,k} \cdot \sinh m_k \cdot \eta + U_{3,k} \cdot \cos n_k \cdot \eta + U_{4,k} \cdot \sin n_k \cdot \eta) \cdot \sin v_k \cdot \xi \quad \dots (18)$$

gdzie



Rys. 7.

$$\left. \begin{aligned} U_{1,K} &= -U_{3,K} = -\frac{M_K \cdot b}{N} \cdot \frac{1}{2v^2 \sqrt{\delta_K}} \\ U_{2,K} &= -U_{4,K} \cdot \operatorname{ctgh} m_K ; \\ U_{4,K} &= U_{1,K} \cdot \operatorname{ctg} n_K \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

Nachylenie powierzchni odkształcenia w prostych $y=0, y=b$ prowadzi do związków.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y}_{y=0} &= \frac{b}{N} \cdot \sum_{K=1,2,\dots}^{\infty} M_K \cdot F_K \cdot \sin v_K \cdot \xi ; \\ \frac{\partial w}{\partial y}_{y=b} &= -\frac{b}{N} \cdot \sum_{K=1,2,\dots}^{\infty} M_K \cdot G_K \cdot \sin v_K \cdot \xi \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

gdzie funkcje F_K, G_K określają równania (6).

Po tak opracowanych zadaniach pomocniczych B1 i B2 przystąpić możemy do ustawienia równania ciągłości płyty ciągłej na podporze r (rys.1):

$$-\frac{\partial w_r}{\partial y}_{y=b_r} + \frac{\partial w_{r+1}}{\partial y}_{y=0} = 0 \quad \dots (21)$$

Uzyskamy stąd:

$$\begin{aligned} c_r \cdot G_{K,r} \cdot M_{K,r-1} + M_{K,r} \cdot (c_r \cdot F_{K,r} + c_{r+1} \cdot F_{K,r+1}) + M_{K,r+1} \cdot c_{r+1} \cdot G_{K,r+1} + \\ + b_r \cdot c_r \cdot \Theta_{K,r}^p \cdot p_{K,r} + b_{r+1} \cdot c_{r+1} \cdot \Theta_{K,r+1}^l \cdot p_{K,r+1} = 0 \end{aligned} \quad \dots (22)$$

$$(K=1,2,\dots,\infty), \quad (r=1,2,\dots,Z-1)$$

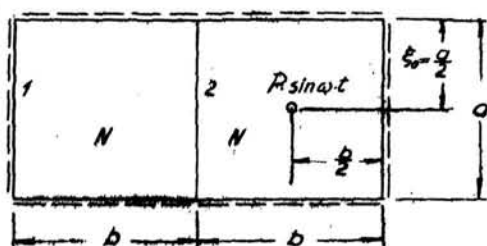
Otrzymaliśmy tu układ niejednorodnych równań liniowych. Dla kolejnych wartości n przy $(Z+1)$ podporach poprzecznych płyty ciągłej otrzymamy $(Z-1) \cdot n$ równań trójczłonowych, których rozwiązanie w sposób jednoznaczny określi wartości $M_{K,r}$, a tym samym momenty podporowe

$$M_r = \sum_K M_{K,r} \cdot \sin v_K \cdot \xi$$

Rozważmy dwa wypadki szczególne:

a) Płyta dwuprzęsłowa obciążona siłą $P \cdot \sin \omega \cdot t$ (rys.8).

Z równania (22) przy $M_{K,1} = M_{K,Z} = 0$ otrzymamy:



Rys. 8.

$$2M_{k,2} \cdot (F_k) + b \cdot \theta_k^p \cdot \frac{2P}{a} \cdot \sin v_k \cdot \xi = 0$$

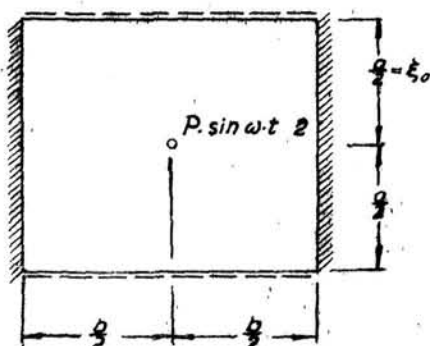
$$M_{2,k} = \sum_n M_{k,2} \cdot \sin v_k \cdot \xi =$$

$$= - \frac{P \cdot b}{a} \cdot \sum_n \frac{\theta_k^p}{F_k} \cdot \sin v_k \cdot \xi_0 \cdot \sin v_k \cdot \xi$$

Wstawiając wartości funkcji θ_k^p dla $\xi_0 = \frac{a}{2b}$, $\beta = \frac{1}{2}$ oraz funkcji F_k uzyskamy ostatecznie:

$$M_2 = - \frac{P \cdot b}{a} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{n_k}{2} \cdot \sinh m_k - \sinh \frac{m}{2} \cdot \sin n_k}{n_k \cdot \sin m_k - m_k \cdot \sin n_k} \cdot \sin v_k \cdot \xi \quad (a')$$

- b) Płyta obustronnie utwierdzona zupełnie. Obciążenie: $P \cdot \sin \omega t$ według rys.9.



Rys. 9.

Z równania (22) przy $M_{k,1} = M_{k,2}$:

$$M_{k,1} \cdot (F_k + G_k) + b \cdot \theta_k^p \cdot \frac{2P}{a} \cdot \sin v_k \cdot \xi_0 = 0$$

$$M_1 = M_2 =$$

$$= - \frac{2Pb}{a} \cdot \sum_k \frac{\theta_k^p}{F_k + G_k} \cdot \sin v_k \cdot \xi_0 \cdot \sin v_k \cdot \xi$$

Wstawiając za θ_k^p , F_k , G_k odpowiednie wartości ze wzorów (17) i (6) otrzymamy:

$$M_1 = M_2 = - \frac{P \cdot b}{a} \cdot \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\cos \frac{n_k}{2} \cdot \cosh \frac{m_k}{2}} \cdot \frac{\cosh \frac{m_k}{2} - \cos \frac{n_k}{2}}{m_k \cdot \tanh \frac{m_k}{2} + n_k \cdot \tanh \frac{n_k}{2}} \cdot \sin v_k \cdot \xi \quad \dots (b)$$

Zauważmy, że M_1, M_2 dąży do ∞ dla $m_k \cdot \tanh \frac{m_k}{2} + n_k \cdot \tanh \frac{n_k}{2} = 0$.

Odpowiada to warunkowi (b) (ustęp A.β.), z którego otrzymujemy częstotliwość drgań symetrycznych. Przy symetrycznym układzie i symetrycznym obciążeniu otrzymujemy, jak wynika z równania (b') symetryczny wykres momentów podporowych, oraz symetryczną postać wygięcia, a w wypadku kiedy częstotliwość drgań wymuszających zbliża się do częstotliwości drgań własnych ugięcie pły-

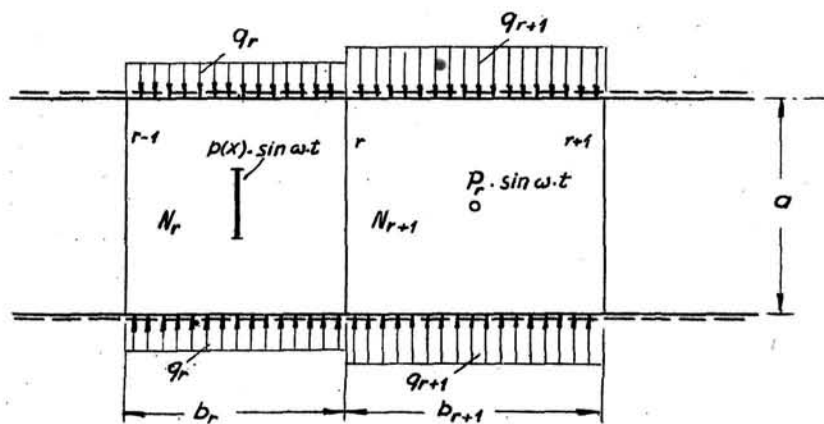
ty rośnie ponad wszelką miarę (wypadek współbrzmienia).

U w a g a :

Powyższe rozważania rozszerzyć można i na drgania wymuszone płyty ciągłej, ściskanej dodatkowo w płaszczyźnie płyty (rys.10). Wystarczy, zachowując wzory (12 - 22), wstawić

za $\delta = \frac{\omega^2}{\omega_{k,0}^2}$ wartość $\delta = \frac{\omega^2}{\omega_{k,0}^2} + \frac{q \cdot a}{N \cdot \pi^2 \cdot k^2}$.

Zauważymy, że dla $\omega \rightarrow 0$ przechodzimy do zagadnienia jednoczesnego ściskania i zginania płyty ciągłej.



Rys. 10.