

INTERNATIONAL CENTRE FOR MECHANICAL SCIENCES

COURSES AND LECTURES - No. 222



MECHANICAL WAVES IN SOLIDS

EDITED BY

J. MANDEL

LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES
ECOLE POLYTECHNIQUE - ECOLE NATIONALE DES MINES
PARIS

AND

L. BRUN

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE
CENTRE D'ETUDES DE LIMEIL
VILLENEUVE ST GEORGES

SPRINGER - VERLAG



WIEN - NEW YORK

ONDES DANS LES MILIEUX CONTINUS GENERALISES

Witold NOWACKI

UNIVERSITE DE VARSOVIE
Palais de la Culture et de la Science
00901 VARSOVIE

1 - INTRODUCTION

La théorie d'élasticité classique décrit exactement le comportement des matériaux de construction (différentes sortes d'acier, d'aluminium, de béton) sous les contraintes qui ne dépassent pas la limite de l'élasticité et dans tous les cas où les concentrations des contraintes n'interviennent pas.

Une divergence entre les résultats de la théorie d'élasticité et les expériences est particulièrement frappante là où entrent en jeu les propriétés de la microstructure du corps, notamment en proximité des entailles et des fentes, où nous avons à faire à des gradients de contraintes significatifs. Ces divergences se font remarquer également dans les corps granuleux et dans les corps multi-cellulaires tels que polymères.

L'influence de la microstructure du corps est marquée surtout dans les cas des oscillations élastiques à haute fréquence et à courte longueur d'ondes.

W. Voigt ⁽¹⁾ a essayé de parer aux insuffisances de la théorie d'élasticité classique en admettant que la transmission des actions réciproques de deux parties du corps à travers l'élément de surface pdA s'opère non seulement par l'intermédiaire du vecteur de force $p dA$, mais aussi par le vecteur du moment $m dA$. De la sorte à côté des contraintes (de force) σ_{ij} ont été définies les contraintes du moment μ_{ij} .

Ce sont les frères François et Eugène Cosserat ⁽²⁾ qui ont le mérite d'avoir établi une théorie complète de l'élasticité asymétrique, publiée en 1909 dans l'ouvrage "Théorie des corps déformables".

Ils ont admis qu'un corps est constitué de particules liées entre elles sous forme de petites boules parfaitement rigides. Chaque particule subit au cours de la déformation un déplacement $\underline{\xi}(x,t)$ et une rotation $\underline{\phi}(x,t)$ étant fonction de la position \underline{x} et du temps t .

De telle façon on a décrit un milieu élastique dans lequel tous les points sont orientés (milieu polaire) et dans lequel il s'agit d'une rotation du "point". Les vecteurs $\underline{\xi}$ et $\underline{\phi}$ sont indépendants les uns des autres et décrivent entièrement la déformation du corps. L'introduction des vecteurs $\underline{\xi}$, $\underline{\phi}$ et l'hypothèse que la transmission des forces par l'élément de surface dA s'opère à l'aide du vecteur de force \underline{p} et du vecteur du moment \underline{m} conduit par conséquent aux tenseurs de contrainte σ_{ij} et μ_{ij} asymétriques.

La théorie des frères Cosserat demeurerait pourtant inaperçue et n'a

pas été appréciée à sa juste valeur du vivant de ses auteurs. La présentation très générale (en tant que théorie non linéaire tenant compte des grandes déformations) et le fait que la théorie dépassait de beaucoup le cadre de la théorie d'élasticité en étaient la cause. Leur théorie constituait un essai d'une théorie des champs générale qui se prête à l'application aux problèmes de la mécanique, de l'optique et de l'électrodynamique basée sur le principe général du moindre effort (action euclidienne).

Les recherches poursuivies au cours des dernières quinze années dans le domaine des milieux généraux élastiques et non élastiques ont attiré l'attention des chercheurs sur l'oeuvre des Cosserat. Dans la recherche de nouveaux modèles qui décrivent mieux le comportement des corps élastiques réels l'on a trouvé des modèles proches ou identiques au modèle de Cosserat. Il y a lieu de mentionner ici les travaux de C. Truesdell et R.A. Toupin ⁽³⁾, de G. Grioli ⁽⁴⁾, R.D. Mindlin et H.F. Tiersten ⁽⁵⁾. Au début les chercheurs s'intéressaient à la théorie d'élasticité simplifiée dite pseudo-continuum des Cosserat. Sous cette notion nous entendons un milieu où apparaissent les contraintes de force et celles du moment asymétriques, mais la déformation est définie par le seul vecteur de déplacement $\underline{\xi}$. On admet ici que $\underline{\phi} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{\xi}$ comme dans la théorie d'élasticité classique. On doit retenir que les Cosserat ont étudié ce modèle et l'ont appelé le cas du tièdre caché.

Plusieurs auteurs allemands, tels W. Günther ⁽⁶⁾, H. Schäfer ⁽⁷⁾ H. Neuber ⁽⁸⁾ continuaient la théorie générale des Cosserat en la complétant par des équations constitutives. Les fondements et les équations de la théorie micropolaire ont été considérés dans les travaux de

E.W. Kuvsinski et A. L. Aero ⁽⁹⁾ et dans ceux de N. A. Palmov ⁽¹⁰⁾. Il faut mentionner ici également les travaux d'A.C. Eringen et E.S. Suhubi ⁽¹¹⁾ où l'on trouve une extension de la théorie.

Actuellement la théorie du milieu des Cosserat est en plein essor. La littérature relative à ce sujet prend de l'ampleur. On a consacré deux symposiums au problème de l'élasticité asymétrique, à savoir : le symposium de l'IUTAM à Freudenstadt en 1968 et un symposium organisé par le CISM en 1972. En 1970 ont paru deux premières monographies de la théorie de l'élasticité micropolaire : de R. Stojanovic ⁽¹²⁾ et de W. Nowacki ⁽¹³⁾.

Dans les présentes conférences nous nous proposons de traiter la théorie de l'élasticité micropolaire.

Considérons un domaine régulier $V \cup A$, limité par une surface A , contenant un milieu micropolaire, milieu homogène, isotrope et, centrosymétrique ; à densité ρ et inertie rotative I .

Sous l'influence des charges extérieures le corps subit une déformation. Admettons que les parties A_σ de la surface limitant le corps soient sous l'action des forces \underline{p} et des moments \underline{m} et les parties A_u sous l'action des déplacements $\underline{\xi}$ et des rotations $\underline{\phi}$. A l'intérieur du corps agissent les forces de masse \underline{X} et les moments de masse \underline{Y} . Les charges mentionnées provoquent une déformation du corps définie par le vecteur de déplacement $\underline{\xi}(\underline{x}, t)$ et le vecteur de rotation $\underline{\phi}(\underline{x}, t)$. A l'intérieur du corps apparaîtront des contraintes σ_{ij} et des contraintes du moment μ_{ij} . Les contraintes sont liées au tenseur de déformation asymétrique γ_{ji} et au tenseur de torsion-courbure κ_{ji} . Les

composantes σ_{ij} , μ_{ij} de ces contraintes sont présentées sur la fig. 1.

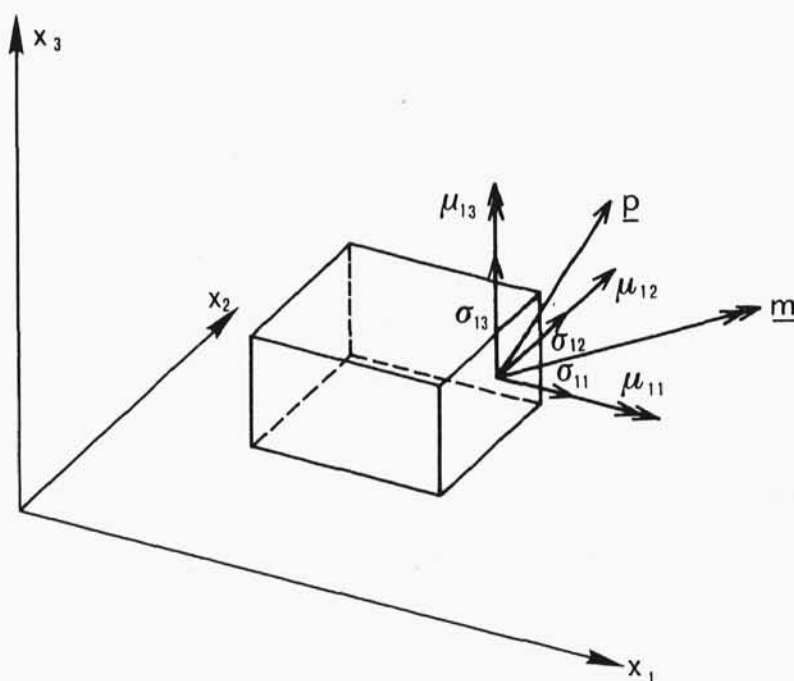


Figure 1.

Le problème dynamique de l'élasticité micropolaire consiste à déterminer les contraintes σ_{ij} , μ_{ij} , les déformations γ_{ij} , κ_{ij} et les déplacements ξ_i et rotations ϕ_i . Ces fonctions peuvent être déterminées en vérifiant des équations du mouvement, des équations constitutives, des conditions aux limites et des conditions initiales.

2 - PRINCIPE DU COMPORTEMENT DE L'ENERGIE - EQUATIONS CONSTITUTIVES -

Les équations du mouvement et les relations constitutives peuvent résulter du principe du comportement de l'énergie. Ce principe, avec l'hypothèse du processus adiabatique, prend la forme

$$\frac{d}{dt} \int_V (U + K) dV = \int_V (X_i v_i + Y_i W_i) dV + \int_A (p_i v_i + m_i W_i) dA \quad (2.1)$$

où

$$K = \frac{1}{2} (\rho v_i v_i + I W_i W_i), \quad v_i = \dot{\xi}_i, \quad W_i = \dot{\phi}_i.$$

Dans l'équation (2.1) ρ détermine la densité, I l'inertie de rotation. U est une énergie interne, K énergie cinétique, $p_i = \sigma_{ji} n_j$, $m_i = \mu_{ji} n_j$ sont des composantes du vecteur de force et du vecteur du moment sur la surface A , limitant le corps. Ensuite, $v_i = \dot{\xi}_i$, $W_i = \dot{\phi}_i$ sont des composantes de la vitesse du déplacement et de la vitesse de rotation.

Les termes du côté gauche de l'équation (2.1) représentent l'accroissement de l'énergie interne et cinétique avec le temps. Les termes du

côté droit de l'équation représentent la puissance des forces de masse, des moments de masse et des forces de surface et des moments de surface.

Supposons que le bilan de l'énergie soit invariant dans le cas du mouvement de translation pendant que les grandeurs \underline{X} , \underline{Y} , \underline{m} , \underline{p} , ρ sont invariables.

En substituant à

$$v_i \rightarrow v_i + b_i, \quad \dot{v}_i \rightarrow \dot{v}_i, \quad (2.2)$$

où b_i est un vecteur constant arbitraire nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_V [\dot{U} + \rho(v_i + b_i)\dot{v}_i + I W_i \dot{W}_i] dV &= \int_V [X_i(v_i + b_i) + Y_i W_i] dV + \\ &+ \int_A [p_i(v_i + b_i) + m_i \dot{W}_i] dA \end{aligned} \quad (2.3)$$

En retranchant l'équation (2.1) à (2.3) nous arrivons à l'expression

$$b_i \left\{ \int_V X_i dV + \int_A p_i dA - \int_V \rho \dot{v}_i dV \right\} = 0. \quad (2.4)$$

L'application du théorème de divergence à l'intégrale de surface conduit à

$$b_i \int_V (\sigma_{ji,j} + X_i - \rho \dot{v}_i) dV = 0. \quad (2.5)$$

Compte-tenu du volume arbitraire admis V nous obtenons une équation locale

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \rho \ddot{\xi}_i. \quad (2.6)$$

Maintenant l'équation (2.3) peut être simplifiée compte-tenu de (2.6)

Nous obtenons :

$$\int_V (\dot{U} + I W_i \dot{W}_i) dV = \int_V (\sigma_{ji} v_{i,j} + Y_i W_i) dV + \int_A m_i \dot{W}_i dA \quad (2.7)$$

Représentant m_i sous la forme $m_i = \mu_{ji} n_j$ et en vertu du théorème de la divergence nous transformons (2.7) en forme

$$\int_V \dot{U} dV = \int_V (\sigma_{ji} v_{i,j} + \mu_{ji} W_{i,j}) dV + \int_V W_i (\mu_{ji,j} + Y_i - I \dot{W}_i) dV \quad (2.8)$$

Nous pouvons écrire la forme locale du bilan de l'énergie sous la forme

$$\dot{U} = \sigma_{ji} v_{i,j} + \mu_{ji} W_{i,j} + W_i (\mu_{ji,j} + Y_i - I \dot{W}_i) \quad (2.9)$$

Supposons ensuite que l'énergie interne est invariante dans le cas de la rotation du corps comme un corps parfaitement rigide. En ce cas là nous posons

$$\underline{v} \rightarrow \underline{v} + \underline{\omega} \times \underline{r} \quad , \quad \underline{W} \rightarrow \underline{W} + \underline{\omega} \quad (2.10)$$

ou bien

$$v_{i,j} \rightarrow v_{i,j} - \epsilon_{ijk} \omega_k \quad , \quad W_{i,j} \rightarrow W_{i,j}$$

Posons que U , K , σ_{ij} , μ_{ij} , I restent invariables nous arrivons à la deuxième équation du mouvement local

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i - I \ddot{\phi}_i = 0 \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) permet de simplifier facilement le bilan de l'énergie.

Nous trouvons :

$$\dot{U} = \sigma_{ji} (v_{i,j} - \epsilon_{Kji} W_K) + \mu_{ji} \kappa_{ji} \quad (2.12)$$

Introduisons une définition des tenseurs de déformation asymétriques :

$$\gamma_{ji} = \xi_{i,j} - \epsilon_{Kji} \phi_K \quad , \quad \kappa_{ji} = \phi_{i,j} \quad (2.13)$$

Nous appelons γ_{ji} tenseur asymétrique de déformation, κ_{ji} - tenseur asymétrique de torsion-courbure. Tenant compte des relations (2.13) nous présentons le bilan de l'énergie sous la forme :

$$\dot{U} = \sigma_{ji} \dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji} \dot{\kappa}_{ji} \quad (2.14)$$

L'énergie interne U est une fonction des variables indépendantes γ_{ji} , κ_{ji} et celle de l'état. Nous avons finalement

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}} \dot{\gamma}_{ji} + \frac{\partial U}{\partial \kappa_{ji}} \dot{\kappa}_{ji} \quad (2.15)$$

Posons que les fonctions σ_{ij} , μ_{ij} ne résultent pas directement des dérivées au respect du temps des fonctions γ_{ji} , κ_{ji} .

De la confrontation de (2.14) et (2.15) nous obtenons

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}} \quad , \quad \mu_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \kappa_{ji}} \quad (2.16)$$

On peut présenter l'énergie interne sous la forme

$$U = \frac{\mu+\alpha}{2} \gamma_{ji} \gamma_{ji} + \frac{\mu-\alpha}{2} \gamma_{ji} \gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2} \gamma_{KK} \gamma_{nn} + \\ + \frac{\gamma+\varepsilon}{2} \kappa_{ji} \kappa_{ji} + \frac{\gamma-\varepsilon}{2} \kappa_{ji} \kappa_{ij} + \frac{\beta}{2} \kappa_{KK} \kappa_{nn} \quad (2.17)$$

On explique la forme d'énergie interne présentée ci-dessus comme suit :

vu que l'énergie interne est un scalaire, toute formule du côté droit doit être un scalaire. Des composantes du tenseur γ_{ji} , κ_{ji} on peut construire trois invariants carrés indépendants : $\gamma_{ji} \gamma_{ji}$, $\gamma_{ji} \gamma_{ij}$, $\gamma_{KK} \gamma_{nn}$. C'est le cas également du tenseur κ_{ji} . Les termes $\gamma_{ji} \kappa_{ji}$ n'apparaissent pas dans l'expression (2.17), ceci étant contraire au postulat de la centrosymétrie.

Nous avons donc six constantes matérielles, α , β , γ , ε , λ , μ . Ces constantes doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad 3\beta + 2\gamma > 0, \quad \gamma > 0 \\ \mu + \alpha > 0, \quad \gamma + \varepsilon > 0, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Ces restrictions résultent du fait que U est une forme carrée positive définie. Compte-tenu du (2.16) nous obtenons les équations constitutives suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \lambda\delta_{ij}\gamma_{KK}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ij} + \beta\delta_{ij}\kappa_{KK}\end{aligned}\quad (2.18)$$

ou

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2\mu\gamma_{(ij)} + \lambda\delta_{ij}\gamma_{KK} + 2\alpha\gamma_{<ij>} \\ \mu_{ij} &= 2\gamma\kappa_{(ij)} + \beta\delta_{ij}\kappa_{KK} + 2\varepsilon\kappa_{<ij>}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Les symboles $()$ et $< >$ représentent respectivement la partie symétrique et celle asymétrique du tenseur.

3 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES FONDAMENTALES D'ELASTODYNAMIQUE

Introduisons les contraintes σ_{ij} , μ_{ij} des relations (2.18) aux équations du mouvement (2.6) et (2.11). Compte-tenu des relations entre les tenseurs de déformations et les déplacements $\underline{\xi}$ et les rotations $\underline{\phi}$ nous obtenons 6 équations de déplacements et de rotations

$$(\mu + \alpha)\xi_{i,jj} + (\lambda + \mu - \alpha)\xi_{j,ji} + 2\alpha\varepsilon_{ijk}\phi_{K,j} + X_i = \rho\ddot{\xi}_i, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}(\gamma + \varepsilon)\phi_{i,jj} - 4\alpha\phi_i + (\beta + \gamma - \varepsilon)\phi_{j,ji} + \\ + 2\alpha\varepsilon_{ijk}\xi_{K,j} + Y_i = I\ddot{\phi}_i.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Cette équation peut être écrite sous une forme vectorielle plus simple

$$\square_2 \underline{\xi} + (\lambda + \mu - \alpha)\text{grad div } \underline{\xi} + 2\alpha \text{rot } \underline{\phi} + \underline{X} = 0, \quad (3.3)$$

$$\square_4 \underline{\phi} + (\beta + \gamma - \varepsilon)\text{grad div } \underline{\phi} + 2\alpha \text{rot } \underline{\xi} + \underline{Y} = 0. \quad (3.4)$$

Nous avons introduit des opérateurs différentiels

$$\square_2 = (\mu + \alpha)\nabla^2 - \rho\partial_t^2, \quad \square_4 = (\gamma + \varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha - I\partial_t^2.$$

Le premier en est opérateur d'Alembert, le second opérateur de Klein-Gordon.

Nous avons obtenu un système composé des équations différentielles hyperboliques. Il faut ajouter à ces équations les conditions aux limites et les conditions initiales.

Les conditions aux limites prennent la forme

$$\sigma_{ji}(\underline{x}, t)n_j(\underline{x}) = p_i(\underline{x}, t), \quad \mu_{ji}(\underline{x}, t)n_j(\underline{x}) = m_i(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in A_\sigma, \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$\xi_i(\underline{x}, t) = f_i(\underline{x}, t), \quad \phi_i(\underline{x}, t) = g_i(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in A_u, \quad t > 0,$$

où \underline{n} est un vecteur unitaire de la normale, p_i , m_i , f_i , g_i sont des fonctions données.

Les conditions initiales ont la forme

$$\begin{aligned} \xi_i(\underline{x}, 0) &= k_i(\underline{x}), & \phi_i(\underline{x}, 0) &= l_i(\underline{x}), \\ \dot{\xi}_i(\underline{x}, 0) &= h_i(\underline{x}), & \dot{\phi}_i(\underline{x}, 0) &= j_i(\underline{x}), \quad \underline{x} \in V, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Considérons les équations de déplacements et de rotations (3.3) et (3.4).

En appliquant l'opérateur de divergence à ces équations nous obtiendrons les relations indépendantes les unes des autres

$$\square_1 \operatorname{div} \underline{\xi} + \operatorname{div} \underline{X} = 0, \quad (3.7)$$

$$\square_3 \operatorname{div} \underline{\phi} + \operatorname{div} \underline{Y} = 0, \quad (3.8)$$

où

$$\square_1 = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 - \rho\partial_t^2, \quad \square_3 = (\beta + 2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha - I\partial_t^2.$$

En effectuant successivement l'opération de rotation sur les équations (3.3) et (3.4), nous avons

$$\square_2 \operatorname{rot} \underline{\xi} + 2\alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\phi} + \operatorname{rot} \underline{X} = 0, \quad (3.9)$$

$$\square_4 \operatorname{rot} \underline{\phi} + 2\alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\xi} + \operatorname{rot} \underline{Y} = 0. \quad (3.10)$$

Effectuons l'opération $\square_1 \square_4$ sur l'équation (3.3) et utilisons les relations (3.7) et (3.10) ; appliquons ensuite l'opérateur $\square_3 \square_4$ à l'équation (3.4) en utilisant les relations (3.8) et (3.9).

Après avoir fait plusieurs opérations nous arrivons à deux équations indépendantes les unes des autres

$$\square_1 (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \underline{\xi} = - (\square_1 \square_4 - \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi) \underline{X} + 2\alpha \operatorname{rot} \square_1 \underline{Y}, \quad (3.11)$$

$$\square_3 (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \underline{\phi} = - (\square_2 \square_4 - \operatorname{grad} \operatorname{div} \Theta) \underline{Y} + 2\alpha \operatorname{rot} \square_3 \underline{X}. \quad (3.12)$$

Nous avons introduit ici les notations

$$\Pi = (\lambda + \mu - \alpha) \square_4 - 4\alpha^2, \quad \Theta = (\beta + \gamma - \varepsilon) \square_2 - 4\alpha^2.$$

Posons la représentation suivante pour les déplacements et les rotations, introduisant deux fonctions vectorielles \underline{F} et \underline{G}

$$\underline{\xi} = (\square_1 \square_4 - \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi) \underline{F} - 2\alpha \operatorname{rot} \square_3 \underline{G}, \quad (3.13)$$

$$\underline{\phi} = (\square_2 \square_4 - \operatorname{grad} \operatorname{div} \Theta) \underline{G} - 2\alpha \operatorname{rot} \square_1 \underline{F}. \quad (3.14)$$

En introduisant cette représentation aux équations (3.11) et (3.12) nous arrivons à deux équations des ondes pour les fonctions \underline{F} et \underline{G} .

$$\square_1 (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \underline{F} + \underline{X} = 0, \quad (3.15)$$

$$\square_3 (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \underline{G} + \underline{Y} = 0. \quad (3.16)$$

Les représentations (3.13) (3.14) de déplacements et de rotations avec application des vecteurs \underline{F} et \underline{G} ont été données par N. Sandru ⁽¹⁵⁾ qui recourait pour les introduire à l'algorithme opératoire de Gr. C. Moisil. Les équations (3.15) (3.16) sont particulièrement utiles à obtenir des déplacements et des rotations engendrés par l'action des forces et des moments concentrés dans l'espace infini.

Revenons aux équations (3.3) et (3.4). Faisons une décomposition du vecteur de déplacement $\underline{\xi}$ et de celui de rotation $\underline{\phi}$ sur la partie potentielle et selonoidale

$$\left. \begin{aligned} \underline{\xi} &= \text{grad} \phi + \text{rot } \underline{\Psi}, \quad \text{div } \underline{\Psi} = 0, \\ \underline{\phi} &= \text{grad} \Gamma + \text{rot } \underline{H}, \quad \text{div } \underline{H} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Nous procédons de la même façon avec les forces de masse et les moments de masse

$$\left. \begin{aligned} \underline{X} &= \rho(\text{grad } \tilde{v} + \text{rot } \underline{X}), \quad \text{div } \underline{X} = 0, \\ \underline{Y} &= I(\text{grad } \sigma + \text{rot } \underline{\eta}), \quad \text{div } \underline{\eta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

En introduisant ces fonctions aux équations (3.3) et (3.4) nous obtenons les équations ondulatoires simples suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \square_1 \phi + \rho \tilde{v} &= 0, & \square_3 \Gamma + I \sigma &= 0, \\ \square_2 \underline{\Psi} + 2\alpha \text{rot } \underline{H} + \rho \underline{X} &= 0, \\ \square_4 \underline{H} + 2\alpha \text{rot } \underline{\Psi} + I \underline{\eta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

La première de ces équations est une équation de l'onde longitudinale, identique dans sa forme à celle de l'onde longitudinale dans l'élastocinétique classique. La seconde équation constitue un nouveau type d'équation, équation de l'onde longitudinale de microrotation. Les équations trois et quatre décrivent la propagation des ondes transversales, de celles de déplacement et de microrotation.

L'onde longitudinale est bien connue en élastocinétique classique.

Après l'élimination de la fonction $\underline{\Psi}$ et \underline{H} le système de deux équations des ondes transversales du groupe (3.19) prendra la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \underline{\Psi} &= 2\alpha I \operatorname{rot} \underline{\eta} - \rho \square_4 \underline{\chi} , \\ (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \underline{H} &= 2\alpha \rho \operatorname{rot} \underline{\chi} - I \square_2 \underline{\eta} . \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Ce type d'ondes était l'objectif des recherches de J. Ignaczak⁽¹⁵⁾ qui a donné pour ces équations "les conditions de radiation", analogues à celles que A. Sommerfeld a données pour l'élastodynamique classique.

4 - PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS - PRINCIPE D'HAMILTON -

Il est facile de vérifier que l'équation suivante est valable

$$\begin{aligned} \int_V [(X_i - \rho \ddot{\xi}_i) \delta \xi_i + (Y_i - I \ddot{\phi}_i) \delta \phi_i] dV + \int_A (p_i \delta \xi_i + m_i \delta \phi_i) dA = \\ = \int_V (\sigma_{ji} \delta \gamma_{ji} + \mu_{ji} \delta \kappa_{ji}) dV . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Le côté gauche représente le travail virtuel des forces extérieures, le côté droit - le travail virtuel des forces internes. Les grandeurs $\delta \xi_i$, $\delta \phi_i$ constituent des accroissements virtuels des déplacements ξ_i et des rotations ϕ_i . Nous admettons que les grandeurs $\delta \xi_i$, $\delta \phi_i$ sont infiniment petites et arbitraires. Ce sont des fonctions continues satisfaisant aux conditions délimitant le mouvement du corps.

Pour arriver à l'équation (4.1) nous procédons comme suit : nous multiplions par $\delta \xi_i$ l'équation du mouvement (2.6), l'équation du mouvement (2.11) par $\delta \phi_i$. Nous effectuons la somme des équations et intégrons par le champ du corps. Nous obtiendrons de la sorte l'équation :

$$\begin{aligned} \int_V [(X_i - \rho \ddot{\xi}_i) \delta \xi_i + (Y_i - I \ddot{\phi}_i) \delta \phi_i] dV + \\ + \int_V (\sigma_{ji,j} \delta \xi_i + (\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j}) \delta \phi_i) dV = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

En transformant par une voie appropriée la seconde des intégrales volumétriques nous arrivons à l'équation (4.1). En introduisant du côté droit de l'équation (4.1) des relations constitutives (2.18) l'équation (4.1) prend la forme

$$\begin{aligned} \int_V [(X_i - \rho \ddot{\xi}_i) \delta \xi_i + (Y_i - I \ddot{\phi}_i) \delta \phi_i] dV + \\ + \int_A (p_i \delta \xi_i + m_i \delta \phi_i) dA = \delta W \end{aligned} \quad (4.3)$$

où

$$\begin{aligned} W = \int_V (\mu \gamma_{(ij)} \gamma_{(ij)} + \alpha \gamma_{<ij>} \gamma_{<ij>} + \frac{\lambda}{2} \gamma_{KK} \gamma_{nn} + \gamma^K_{(ij)} \gamma_{(ij)}^K + \\ + \epsilon^K_{<ij>} \gamma_{<ij>}^K + \frac{\beta}{2} \gamma_{KK} \gamma_{nn}^K) dV \end{aligned}$$

Le principe de variation (4.3) se prête à la mise au point du théorème énergétique, à savoir par comparaison des fonctions $\underline{\xi}$, $\underline{\phi}$ au point \underline{x} et au moment t avec les mêmes grandeurs au même point \underline{x} , au moment $t + dt$. En introduisant à l'équation

$$\delta \xi_i = v_i dt, \quad \delta \phi_i = W_i dt, \quad v_i = \dot{\xi}_i, \quad W_i = \dot{\phi}_i$$

nous obtiendrons la formule suivante

$$\frac{d}{dt}(K + W) = \int_V (X_i v_i + Y_i W_i) dV + \int_A (p_i v_i + m_i W_i) dA. \quad (4.4)$$

L'équation énergétique (4.4) est identique au bilan de l'énergie (2.1).

L'équation (4.4) sert à la démonstration du théorème de l'unicité. On déduit ce théorème d'une façon analogue qu'en élastodynamique classique.

Nous passons aisément du principe du travail virtuel à la présentation du principe d'Hamilton pour les milieux micropolaires.

Considérons un corps élastique changeant sa position d'une façon continue entre les moments : $t = t_1$ et $t = t_2$. Comparons les déplacements actuels $\underline{\xi}(\underline{x}, t)$ et les rotations $\underline{\phi}(\underline{x}, t)$ avec ceux $\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}$ et les rotations $\underline{\phi} + \delta\underline{\phi}$, les accroissements $\delta\underline{\xi}_i, \delta\underline{\phi}_i$ étant choisis tels qu'ils satisfassent aux conditions

$$\delta\underline{\xi}(\underline{x}, t_1) = \delta\underline{\xi}(\underline{x}, t_2) = 0, \delta\underline{\phi}(\underline{x}, t_1) = 0, \delta\underline{\phi}(\underline{x}, t_2) = 0 \quad (4.5)$$

Nous présentons le principe des travaux virtuels de la façon suivante :

$$\delta L - \int_V (\rho \ddot{\xi}_i \delta \xi_i + I \ddot{\phi}_i \delta \phi_i) dV = \delta W, \quad (4.6)$$

où

$$\delta L = \int_V (X_i \delta \xi_i + Y_i \delta \phi_i) dV + \int_A (p_i \delta \xi_i + m_i \delta \phi_i) dA$$

Nous intégrons l'équation (4.6) dans l'intervalle de temps $t_1 \leq t \leq t_2$,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} W dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\rho \ddot{\xi}_i \delta \xi_i + I \ddot{\phi}_i \delta \phi_i) dV \quad (4.6')$$

En introduisant l'énergie cinétique K et la variation de cette énergie.

$$\delta K = \rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\xi}_i \delta \xi_i) dV + I \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\phi}_i \delta \phi_i) dV - \int_V (\rho \ddot{\xi}_i \delta \xi_i + I \ddot{\phi}_i \delta \phi_i) dV,$$

et en faisant l'intégration dans le temps dans l'intervalle

$t_1 \leq t < t_2$ nous obtiendrons

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = - \rho \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \dot{\xi}_i \delta \xi_i dV - I \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \dot{\phi}_i \delta \phi_i dV. \quad (4.7)$$

Nous avons eu recours aux conditions (4.5) posées sur les déplacements et les rotations virtuels. Compte-tenu des (4.6') et (4.7), nous obtiendrons

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{W} - K) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \quad (4.8)$$

C'est l'extension du principe d'Hamilton sur le milieu micropolaire.

Nous pouvons changer le symbole de la variation du côté droit de cette équation seulement dans le cas où les forces extérieures sont conservatrices et dérivent du potentiel v .

Dans ce cas

$$\delta L = - \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_i} \delta \xi_i + \frac{\partial v}{\partial \phi_i} \delta \phi_i \right) = - \delta \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_i} \xi_i + \frac{\partial v}{\partial \phi_i} \phi_i \right),$$

où v est un potentiel des forces extérieures. L'équation (4.8) prendra alors la forme suivante

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - K) dt = 0 \quad \Pi = \mathcal{W} - v \quad (4.9)$$

Ici Π détermine l'énergie potentielle entière, $\Pi - K$ la forme l'agrangienne.

5 - THEOREME DE LA RECIPROCITE DU TRAVAIL

Considérons deux systèmes des causes et des effets agissant sur un corps élastique à volume V et limité par la surface A . Désignons le premier groupe des causes par les forces et les moments de masse \underline{X} , \underline{Y} et par les charges \underline{p} et \underline{m} . Les composantes du vecteur de déplacement $\underline{\xi}$ et du vecteur de rotation $\underline{\phi}$ seront leurs effets. Le second système des causes et des effets se distinguera du premier par les "primes". Dans nos considérations consécutives nous posons l'homogénéité des conditions initiales.

Appliquons la transformation de Laplace aux équations constitutives (2.18)

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ji} &= (\mu + \alpha)\bar{\gamma}_{ji} + (\mu - \alpha)\bar{\gamma}_{ij} + \lambda\delta_{ij}\bar{\gamma}_{KK}, \\ \bar{\mu}_{ji} &= (\gamma + \varepsilon)\bar{\kappa}_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\bar{\kappa}_{ij} + \beta\delta_{ij}\bar{\kappa}_{KK}\end{aligned}\quad (5.1)$$

où

$$\bar{\sigma}_{ji}(\underline{x}, p) = L(\sigma_{ji}(\underline{x}, t)) = \int_0^\infty \sigma_{ji}(\underline{x}, t)e^{-pt}dt, \text{ etc...}$$

Procédons d'une façon analogue avec les grandeurs $\bar{\sigma}'_{ij}$, $\bar{\mu}'_{ji}$.

On peut vérifier aisément l'exactitude de l'identité suivante

$$\bar{\sigma}_{ji}\bar{\gamma}'_{ji} + \bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}'_{ji} = \bar{\sigma}'_{ji}\bar{\gamma}_{ji} + \bar{\mu}'_{ji}\bar{\kappa}_{ji}. \quad (5.2)$$

Intégrons la relation (5.2) par le champ du corps. Finalement nous obtiendrons

$$\int_V (\bar{\sigma}_{ji}\bar{\gamma}'_{ji} + \bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}'_{ji})dV = \int_V (\bar{\sigma}'_{ji}\bar{\gamma}_{ji} + \bar{\mu}'_{ji}\bar{\kappa}_{ji})dV. \quad (5.3)$$

Faisons ensuite la transformation de Laplace sur les équations du mouvement

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ji,j} + \bar{X}_i &= p^2\rho\bar{\xi}_i, \quad \varepsilon_{ijk}\bar{\sigma}_{jK} + \bar{\mu}_{ji,j} + \bar{Y}_i = p^2I\bar{\phi}_i, \\ \xi_i(\underline{x}, 0) &= 0, \quad \dot{\xi}_i(\underline{x}, 0) = 0, \quad \phi_i(\underline{x}, 0) = 0, \quad \dot{\phi}_i(\underline{x}, 0) = 0\end{aligned}\quad (5.4')$$

Procédons d'une façon analogue avec les équations du mouvement pour le second système des causes et des effets

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}'_{ji,j} + \bar{X}'_i &= p^2\rho\bar{\xi}'_i, \quad \varepsilon_{ijk}\bar{\sigma}'_{jK} + \bar{\mu}'_{ji,j} + \bar{Y}'_i = p^2I\bar{\phi}'_i, \\ \xi'_i(\underline{x}, 0) &= 0, \quad \dot{\xi}'_i(\underline{x}, 0) = 0, \quad \phi'_i(\underline{x}, 0) = 0, \quad \dot{\phi}'_i(\underline{x}, 0) = 0\end{aligned}\quad (5.4'')$$

A l'aide des relations (5.4') et (5.4'') nous arriverons à l'équation (5.3) sous forme

$$\begin{aligned}
& \int_V (\bar{X}_i \bar{\xi}_i' + \bar{Y}_i \bar{\phi}_i') dV + \int_A (\bar{p}_i \bar{\xi}_i' + \bar{m}_i \bar{\phi}_i') dA = \\
& = \int_V (\bar{X}_i' \bar{\xi}_i + \bar{Y}_i' \bar{\phi}_i) dV + \int_A (\bar{p}_i' \bar{\xi}_i + \bar{m}_i' \bar{\phi}_i) dA .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Dans cette équation apparaissent toutes les causes et tous les effets.

Après avoir fait la transformation de Laplace inverse sur l'équation

(5.5) nous arrivons au théorème de la réciprocité des travaux ⁽¹⁵⁾

$$\begin{aligned}
& \int_V (X_i * \xi_i' + Y_i * \phi_i') dV + \int_A (p_i * \xi_i' + m_i * \phi_i') dA = \\
& = \int_V (X_i' * \xi_i + Y_i' * \phi_i) dV + \int_A (p_i' * \xi_i + m_i' * \phi_i) dA .
\end{aligned} \tag{5.6}$$

où

$$X_i * \xi_i' = \int_0^t X_i(\underline{x}, t - \tau) \xi_i'(\underline{x}, \tau) d\tau , \text{ etc...}$$

Dans le cas du corps infini le théorème de la réciprocité des travaux prend une forme particulière.

$$\int_V (X_i * \xi_i' + Y_i * \phi_i') dV = \int_V (X_i' * \xi_i + Y_i' * \phi_i) dV \tag{5.7}$$

Les théorèmes de la réciprocité (5.6) (5.7) constituent une généralisation du théorème de Graffi ⁽¹⁷⁾ de l'élastodynamique classique.

Le théorème de la réciprocité des travaux est l'un des plus intéressants dans la théorie de l'élasticité micropolaire. Ce théorème est très général et susceptible de servir à la mise au point de méthodes d'intégration des équations de l'élastodynamique avec recours aux fonctions de Green.

6 - ONDES MONOCHROMATIQUES PLANES

Considérons une onde plane qui change avec le temps d'une façon harmonique. Soit le front de l'onde reste au moment $t = \text{const.}$ sur le plan $p = x_i n_i$ où \underline{n} est un vecteur unitaire d'un plan normal. Dans ce cas, il faut prêter aux déplacements et aux rotations la forme suivante :

$$\xi_j = A_j \exp \left[-ik(\Omega t - n_K K_K) \right], \quad (6.1)$$

$$\phi_j = B_j \exp \left[-ik(\Omega t - n_K K_K) \right], \quad k = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{2\pi}{l}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (6.2)$$

Ici Ω est une vitesse de phase, ω -une vitesse angulaire, l -la longueur des ondes. En introduisant (6.1) (6.2) au système des équations (3.6) (3.7) nous arrivons au système des équations algébriques suivant :

$$\left. \begin{aligned} (\mu + \alpha - \rho\Omega^2)A_j + (\lambda + \mu - \alpha)n_j n_K A_K + \frac{2\alpha i}{k} \epsilon_{jKl} n_l B_K &= 0, \\ (\gamma + \epsilon + \frac{4\alpha}{k^2} - I\Omega^2)B_j + (\beta + \gamma - \epsilon)n_j n_K B_K + \frac{2\alpha i}{k} \epsilon_{jKl} n_l A_K &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Ce système possède une solution non triviale seulement dans le cas de la disparition du déterminant de système. Cette condition conduit à l'équation :

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu - \rho\Omega^2)(2\gamma + \beta + \frac{4\alpha}{k^2} - I\Omega^2) \\ \left[(\mu + \alpha - \rho\Omega^2)(\gamma + \epsilon + \frac{4\alpha}{k^2} - I\Omega^2) - \frac{2\alpha^2}{k^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Nous déterminerons à partir de cette équation les vitesses de la propagation de différents types d'ondes planes.

De l'équation $\lambda + 2\mu - \rho\Omega^2 = 0$

nous trouverons une vitesse de phase constante et indépendante de ω

$$\Omega = \Omega_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

De l'équation

$$2\gamma + \beta + \frac{4\alpha}{k^2} - I\Omega^2 = 0 \quad (6.5)$$

il résulte la vitesse de phase

$$\Omega = \Omega_3 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad \Omega_3 = \left(\frac{2\gamma + \beta}{I} \right)^{1/2}, \quad \omega_0^2 = 4\alpha/I. \quad (6.6)$$

Cette vitesse dépend de la fréquence ω ; l'onde subit donc une dispersion.

La vitesse de phase ω a une signification physique seulement pour

$\omega > \omega_0$, prenant pour ces seules valeurs des valeurs réelles.

L'équation

$$(\mu + \alpha - \rho\Omega^2)(\gamma + \varepsilon + \frac{4\alpha}{k^2} - I\Omega^2) - \frac{4\alpha}{k^2} = 0 \quad (6.7)$$

conduit à l'équation suivante

$$k^4 - k^2(\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + p(s-2) + \sigma_2^2(\sigma_4^2 - 2p)) = 0. \quad (6.8)$$

Nous avons introduit ici les notations suivantes :

$$\sigma_2 = \frac{\omega}{\Omega_2}, \quad \sigma_4 = \frac{\omega}{\Omega_4}, \quad \Omega_2 = \left(\frac{\mu + \alpha}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \Omega_4 = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{I} \right)^{1/2},$$

$$s = \frac{2\alpha}{\mu + \alpha}, \quad p = \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon}.$$

Les solutions de l'équation biquadratiques (6.8) sont :

$$\left. \begin{matrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + p(s-2) \pm \sqrt{(\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + p(s-2))^2 + 4\sigma_2^2(2p - \sigma_4^2)} \right) \quad (6.9)$$

ou

$$\left. \begin{matrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + p(s-2) \pm \sqrt{(\sigma_4^2 - \sigma_2^2 + p(s-2))^2 + 4ps\sigma_2^2} \right). \quad (6.10)$$

Il est évident que le discriminant (voir (6.10) !) est positif ; k_1^2 , k_2^2 sont des valeurs réelles. De (6.9) les inégalités suivantes résultent pour $\sigma_4^2 > 2p$ (c'est-à-dire pour $\omega^2 > \omega_0^2$) :

$$k_1^2 > 0, \quad k_2^2 > 0$$

ce qui conduit aux vitesses de phase réelles.

Pour $\omega^2 < \omega_0^2$ nous avons

$$k_1^2 > 0 \quad k_2^2 < 0.$$

Seule la première inégalité conduit à une vitesse réelle, la seconde vitesse de phase $\Omega = \omega/k$ est imaginaire et n'a pas de signification physique. Les vitesses liées à l'équation (6.8) dépendent du paramètre ω ; les ondes qui se propagent avec ces vitesses subissent une dispersion.

Considérons la propagation d'une onde plane dans la direction x_1 .

Posons que l'onde est monochromatique

$$\xi_1(x_1, t) = \xi_1^*(x_1)e^{-i\omega t} \quad \phi_1(x_1, t) = \phi_1^*(x_1)e^{-i\omega t} . \quad (6.11)$$

Des équations (3.6) (3.7) nous obtiendrons le système suivant de 6 équations différentielles

$$(\partial_1^2 + \sigma_1^2)\xi_1^* = 0, \quad (6.12)$$

$$(\partial_1^2 + \sigma_3^2 - \frac{v^2}{\Omega_3^2})\phi_1^* = 0, \quad (6.13)$$

$$\left. \begin{aligned} (\partial_1^2 + \sigma_2^2)\xi_2^* - s\partial_1\phi_3^* &= 0, \\ (\partial_1^2 + \sigma_4^2 - 2p)\phi_3^* + p\partial_1\xi_2^* &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

$$\left. \begin{aligned} (\partial_1^2 + \sigma_2^2)\xi_3^* + s\partial_1\phi_2^* &= 0, \\ (\partial_1^2 + \sigma_4^2 - 2p)\phi_2^* - p\partial_1\xi_3^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Nous avons introduit les notations

$$\sigma_1 = \omega/\Omega_1, \quad \sigma_3 = \omega/\Omega_3.$$

L'équation (6.12) représente une onde longitudinale. Cette onde se propage avec une vitesse Ω_1 , elle n'est pas atténuée et ne subit pas de dispersion.

La solution de l'équation (6.12) est la fonction

$$\xi_1 = A_+ e^{-i\omega(t - \frac{x_1}{\Omega_1})} + A_- e^{-i\omega(t + \frac{x_1}{\Omega_1})}. \quad (6.16)$$

L'équation (6.13) représente une onde longitudinale microrotative.

$$\phi_1 = B_+ e^{-i(t - \frac{x_1}{\Omega_1})} + B_- e^{-i(t + \frac{x_1}{\Omega_1})}, \quad (6.17)$$

où

$$\Omega = \Omega_3 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}, \quad \omega^2 > \omega_0^2, \quad \omega_0^2 = 4\alpha/I.$$

En substituant

$$\xi_2^*(x_1) = \xi_2^0 e^{iKx_1}, \quad \phi_3^*(x_1) = \phi_3^0 e^{iKx_1},$$

aux équations (6.14) nous arrivons au système de deux équations algébriques

$$\xi_2^0 (\sigma_2^2 - k^2) - iks\phi_3^0 = 0,$$

$$ikp\xi_2^0 + (\sigma_4^2 - k^2 - 2p)\phi_3^0 = 0.$$

En réduisant le déterminant de ce système des équations à zéro nous obtenons l'équation (6.8)

Les fonctions

$$\begin{aligned} \xi_2 = & C_+ e^{-i\omega(t - \frac{x_1}{\Omega_1})} + C_- e^{-i\omega(t + \frac{x_1}{\Omega_1})} + \\ & + \frac{ik_2 s}{\sigma_2^2 - k_2^2} \left(D_+ e^{-i\omega(t - \frac{x_1}{\Omega_3})} - D_- e^{-i\omega(t + \frac{x_1}{\Omega_2})} \right), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \phi_3 = & D_+ e^{-i\omega(t - \frac{x_1}{\Omega_2})} - D_- e^{-i\omega(t + \frac{x_1}{\Omega_2})} + \\ & + \frac{\sigma_2^2 - k_1^2}{isk_1} \left(C_+ e^{-i\omega(t - \frac{x_1}{\Omega_1})} - C_- e^{-i\omega(t + \frac{x_1}{\Omega_1})} \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\text{où } \Omega_1^0 = \omega/k_1 \quad \Omega_2^0 = \omega/k_2 ,$$

constituent la solution du système des équations (6.14). Les relations (6.18) (6.19) représentent deux types d'ondes planes différents, dont le premier avance avec la vitesse de phase Ω_1^0 , le second avec la vitesse Ω_2^0 . Tous les quatre intervenant dans (6.18) et (6.19) subissent une dispersion. La solution (6.18) décrit une onde de déplacement transversale, la solution (6.19) une onde transversale micro-rotative.

Remarquons que l'onde longitudinale ξ_1 est liée aux contraintes normales $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$. L'onde micro-rotative longitudinale ϕ_1 est accompagnée de contraintes du moment $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$ et des contraintes tangentes σ_{23}, σ_{32} .

Les contraintes $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \mu_{13}, \mu_{31}$ sont liées aux ondes accouplées ξ_2, ϕ_3 . Et les contraintes $\mu_{12}, \mu_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$ sont liées aux ondes accouplées ξ_3, ϕ_2 . Seules les ondes longitudinales ne subissent pas de dispersion.

7 - ONDES APERIODIQUES DANS L'ESPACE INFINI

Dans la section 3 nous avons décomposé les vecteurs \underline{u} et $\underline{\phi}$ en deux vecteurs, l'un dérivé d'un potentiel scalaire, l'autre d'un potentiel vecteur. Ainsi, en admettant

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &= \text{grad } \phi + \text{rot } \underline{\Psi}, \quad \text{div } \underline{\Psi} = 0, \\ \underline{\phi} &= \text{grad } \Gamma + \text{rot } \underline{H}, \quad \text{div } \underline{H} = 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

et en procédant de la même façon avec les expressions décrivant les forces et les moments de masse

$$\begin{aligned}\underline{X} &= \rho(\text{grad } \tilde{v} + \text{rot } \underline{\chi}), \quad \text{div } \underline{\chi} = 0, \\ \underline{Y} &= I(\text{grad } \sigma + \text{rot } \underline{\eta}), \quad \text{div } \underline{\eta} = 0,\end{aligned}\tag{7.2}$$

et en introduisant les relations (7.1) et (7.2) dans le système des équations (3.3) et (3.4) nous arrivons aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\square_1 \phi + \rho \tilde{v} &= 0, & \square_3 \Gamma + I \sigma &= 0, \\ \square_2 \underline{\Psi} + 2\alpha \text{rot } \underline{H} + \rho \underline{\chi} &= 0, \\ \square_4 \underline{H} + 2\alpha \text{rot } \underline{\Psi} + I \underline{\eta} &= 0.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Le comportement des ondes longitudinales ϕ est bien connu, vu qu'il est le même pour le milieu de Hooke et le milieu micropolaire. La propagation des ondes est définie par le potentiel retardé, les intégrales de Poisson, par le théorème de Kirchhoff et Helmholtz pour le problème tridimensionnel, par le théorème de Volterra, Riess et Weber pour les problèmes bidimensionnels et enfin par le théorème classique d'Alembert pour le mouvement unidimensionnel.

Ajoutons encore que les ondes longitudinales engendrées par la source $\tilde{v}(\underline{x}, t)$ donnent le tenseur symétrique de déformation γ_{ij} et le tenseur symétrique de contrainte σ_{ij} . Il vient

$$\begin{aligned}u_i &= \phi_{,i}, \quad \gamma_{ij} = \phi_{,ij}, \quad \sigma_{ji} = 2\mu \phi_{,ij} + \lambda \delta_{ij} \phi_{,KK}, \\ \kappa_{ij} &= 0, \quad \mu_{ij} = 0.\end{aligned}\tag{7.4}$$

En passant à l'équation

$$\square_3 \Gamma + I \sigma = 0, \tag{7.5}$$

nous trouvons les vecteurs symétriques κ_{ij} et μ_{ij} . Etant donné

$$\phi_i = \Gamma_{,i} \quad \kappa_{ij} = \Gamma_{,ij}$$

il vient

$$\mu_{ij} = 2\gamma\Gamma_{,ij} + \beta\delta_{ij}\Gamma_{,KK}, \quad \sigma_{ij} = 0. \quad (7.6)$$

Nous donnons dans la suite quelques solutions concernant l'équation de Klein-Gordon (7.5). Nous nous bornerons à ne donner que les résultats, référant aux problèmes tridimensionnels (¹⁸).

Considérons tout d'abord l'équation non homogène (7.5) en supposant que les conditions initiales sont homogènes. La solution de cette équation a la forme suivante :

$$\Gamma(\underline{x}', t) = \frac{1}{4\pi C_3^2} \left\{ \int_V \frac{\sigma(\underline{x}, t - R/C_3)}{R(\underline{x}, \underline{x}')} dV(\underline{x}) + \right. \\ \left. + \int_V \frac{dV(\underline{x})}{R(\underline{x}, \underline{x}')} \int_0^t \sigma(\underline{x}, t - \tau) G(\underline{x}, \underline{x}', \tau) d\tau \right\}$$

où

$$G(\underline{x}, \underline{x}', t) = -\frac{Rv}{C_3} \frac{J_1(v\sqrt{t^2 - R^2/C_3^2})}{\sqrt{t^2 - R^2/C_3^2}} H(t - R/C_3), \quad C_3 = \left(\frac{\beta + 2\gamma}{I} \right)^{1/2}$$

Le terme $H(z)$ désigne ici la fonction de Heaviside et le symbole R , la distance entre les points \underline{x} et \underline{x}' . Le terme $J_1(z)$ représente la fonction de Bessel de premier genre et de premier ordre. La solution de l'équation (7.7) contient deux membres, dont le premier représente le potentiel retardé.

Considérons maintenant l'équation du mouvement ondulatoire (7.5) homogène ayant les conditions initiales suivantes :

$$\Gamma(\underline{x}, 0) = g(\underline{x}), \quad \dot{\Gamma}(\underline{x}, 0) = h(\underline{x}) \quad (7.8)$$

La solution de l'équation (7.5) prend la forme

$$\begin{aligned} \Gamma(\underline{x}, t) = & t M_{ct}\{h(\underline{x})\} + \frac{\partial}{\partial t} \left[t M_{ct}\{f(\underline{x})\} \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi R_3^2} \int_V \left[h(\underline{x}') + g(\underline{x}') \frac{\partial}{\partial t} \right] G(\underline{x}, \underline{x}', t) dV(\underline{x}') . \end{aligned} \quad (7.9)$$

L'expression

$$M_{ct}\{h(\underline{x})\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^\pi h(x_i + n_i C_3 t) \sin \theta d\theta$$

représente la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction prises sur la surface d'une sphère du centre \underline{x} et d'un rayon $C_3 t$.

Les grandeurs n_i apparaissant dans la dernière intégrale sont des cosinus directeurs du rayon de sphère exprimés en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} n_i = & \sin \theta \cos \Psi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \Psi, \quad n_3 = \cos \theta, \\ & 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \Psi < 2\pi . \end{aligned}$$

La formule (7.9) représente une généralisation de la formule intégrale de Poisson connue dans la théorie classique du mouvement ondulatoire. Si $v = 0$, l'équation (7.9) ne contient que les deux premières intégrales, ce sont les intégrales de Poisson.

Pour compléter nos remarques, nous allons donner une formule qui n'est qu'une extension de la formule connue de Kirchhoff, sur l'équation de Klein-Gordon.

$$\begin{aligned} \Gamma(\underline{x}', t) = & -\frac{1}{4\pi} \int_A \left\{ [\Gamma] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{C_3 R} \frac{\partial R}{\partial n} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right] - \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right] \right\} dA(\underline{x}) + \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_A dA(\underline{x}) \int_0^t \left\{ G(R, t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial R} \right\} \Gamma(\underline{x}, t - \tau) + \\ & -\frac{1}{R} G(R, \tau) \frac{\partial \Gamma(\underline{x}, t - \tau)}{\partial n} \Bigg\} d\tau, \quad \underline{x}' \in V, \quad R = |\underline{x} - \underline{x}'| \quad (7.10) \end{aligned}$$

$$\Gamma(\underline{x}', t) = 0, \quad \underline{x}' \in C-V, \quad [\Gamma] = \Gamma(\underline{x}, t - R/C_3).$$

Cette formule donne la valeur de la fonction Γ au point \underline{x}' de la région V , exprimée en intégrales de surface contenant la fonction Γ et ses dérivées par rapport au temps et à la normale à la surface A délimitant la région V . En dérivant cette formule, on suppose que la fonction Γ et ses premières et secondes dérivées sont continues dans la région V et sur la surface A . Pour $\alpha = 0$ la formule devient la formule classique de Kirchhoff.

Pour les oscillations monochromatiques, nous obtenons l'extension de la formule de Helmholtz sur l'équation de Klein-Gordon.

$$\Gamma^*(\underline{x}') = \frac{1}{4\pi} \int_A \left(\frac{\partial \Gamma^*}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \Gamma^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right) dA(\underline{x}), \quad \underline{x}' \in V \quad (7.11)$$

$$\Gamma^*(\underline{x}') = 0, \quad \underline{x}' \in C-V.$$

Nous avons ici

$$\Gamma(\underline{x}', t) = \Gamma^*(\underline{x}') e^{-i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{C_3} \left(1 - \frac{v^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad v^2 = \frac{4\alpha}{I}.$$

L'équation (7.11) correspond à une réalité physique uniquement lorsque $v^2 > \frac{4\alpha}{I}$. C'est alors seulement que la vitesse de phase est réelle.

La dépendance de la vitesse de phase $C = \omega/k$ de la fréquence ω indique que nous sommes en présence de la dispersion de l'onde de rotation. Si $\nu \rightarrow 0$ l'équation (7.11) prend la forme de l'équation classique du mouvement ondulatoire, donnée par Helmholtz.

Les équations (7.3)₂ et (7.3)₃ sont moins étudiées. On n'a discuté que les équations unidimensionnelles du mouvement ondulatoire et aussi les solutions fondamentales de ces équations que nous allons donner plus loin.

8 - LES SOLUTIONS FONDAMENTALES DANS L'ESPACE INFINI

Nous désignerons comme fondamentales les solutions des équations différentielles dépendant de la distance R entre les points \underline{x} et \underline{x}' dans un milieu élastique infini. Dans la suite nous allons donner les formules générales permettant de déterminer les déplacements et les rotations du point \underline{x} du milieu infini, engendrés par les couples et les forces de masse. On dérive lesdites formules par la transformation quadruple intégrale de Fourier, préformée sur les équations du mouvement ondulatoire. (3.11) (3.12).

Nous obtenons finalement les expressions suivantes

$$u_i(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{W_4} \left\{ \frac{\alpha_j \alpha_K \underline{\gamma}_K}{\rho C_1^2 \alpha^2 (\alpha^2 - \tau_1^2)} - \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\alpha^2 + \nu^2 - \tau_4^2}{C_2^2 \rho \alpha^2} (\alpha_j \alpha_K \underline{\gamma}_K - \alpha^2 \underline{\gamma}_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{is}{IC_4^2} \varepsilon_{jKl} \alpha_K \underline{\gamma}_l \right] \right\} \exp [-i(x_K \alpha_K + \eta t)] dW, \quad (8.1)$$

$$\phi_j(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{W_4} \left\{ \frac{\alpha_j \alpha_K \dot{Y}_K}{IC_4^2 \alpha^2 (\alpha^2 + \tau_0^2 - \tau_j^2)} - \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\alpha^2 - \tau_1^2}{IC_4^2 \alpha^2} (\alpha_j \alpha_K \dot{Y}_K - \alpha^2 \dot{Y}_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i p}{\rho C_2^2} \varepsilon_{jKl} \dot{X}_l \right] \right\} \exp [-i(x_K \alpha_K + \eta \cdot t)] dW. \quad (8.2)$$

Dans ces formules $dW = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\eta$

W_4 désigne l'intérieur de l'espace $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \eta$.

$$\underline{\alpha}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad s = \frac{2\alpha}{\mu + \alpha}, \quad p = \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon}, \quad \tau = \eta / C_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

$$\tau_0^2 = \frac{4\alpha}{\beta + 2\gamma}, \quad v_0^2 = \frac{4\alpha}{IC_4^2}, \quad \eta_0^2 = \frac{4\alpha^2}{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \gamma)}, \quad \Delta = (\alpha^2 - \lambda_1^2)(\alpha^2 - \lambda_2^2),$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\tau_4^2 + \tau_4^2 + \eta_0^2 - v_0^2 \pm \sqrt{(\tau_4^2 - \tau_2^2 - \eta_0^2 + v_0^2)^2 + 4ps\tau_2^2} \right],$$

$$C_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad C_2 = \left(\frac{\mu + \alpha}{\rho} \right)^{1/2}, \quad C_3 = \left(\frac{\beta + 2\mu}{I} \right)^{1/2}, \quad C_4 = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{I} \right)^{1/2}.$$

Malgré la complexité de ces expressions entraînant la nécessité de l'intégration multiple par région infinie, nous obtenons assez facilement les expressions pour les déplacements et rotations, engendrés par l'action des forces et moments concentrés, variant harmoniquement avec le temps.

Supposons que la force concentrée $X_i = \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta_{j1} e^{-i\omega t}$ est appliquée au point \underline{x}' et dirigée parallèlement à l'axe x_1 . Les déplacements $u_j = U_j^{(1)}(\underline{x}, \underline{x}', t)$ et les rotations $\phi_j = \Phi_j^{(1)}(\underline{x}, \underline{x}', t)$ peuvent alors être exprimés par les formules

$$U_j^{(1)}(\underline{x}, \underline{x}', t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\rho\omega^2} (F\delta_{jK} + \partial_j \partial_K K), \quad (8.3)$$

$$\phi_j^{(1)}(\underline{x}, \underline{x}', t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\rho C_2^2(K_1^2 - K_2^2)} \epsilon_{1jK} \frac{\partial}{\partial x_K} \left(\frac{e^{ik_1 R} - e^{iK_2 R}}{R} \right), \quad (8.4)$$

$$j, K, l = 1, 2, 3.$$

dans lesquelles on a introduit les notations suivantes :

$$F = A_1 k_1^2 \frac{e^{ik_1 R}}{R} + A_2 k_2^2 \frac{e^{ik_2 R}}{R},$$

$$K = A_1 \frac{e^{ik_2 R}}{R} + A_2 \frac{e^{ik_2 R}}{R} + A_3 \frac{e^{i\sigma_1 R}}{R},$$

$$A_1 = \frac{\sigma_2^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}, \quad A_2 = \frac{\sigma_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2}, \quad A_3 = -1,$$

$$k_{1,2}^2 = [\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \eta_0^2 - v^2 \pm \sqrt{(\sigma_4^2 - \sigma_2^2 - \eta_0^2 + v_0^2)^2 + 4ps\sigma_2^2}], \sigma_j = \omega/C_j.$$

Si nous appliquons au point \underline{x}' le moment concentré

$Y_j = \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta_{j1} e^{-i\omega t}$ agissant parallèlement à l'axe x_1 , alors en désignant les déplacements par $\hat{U}_j^{(1)}$ et les rotations par $\hat{\phi}_j^{(1)}$, nous obtenons :

$$\hat{U}_j^{(1)} = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\rho C_4^2(k_1^2 - k_2^2)} \epsilon_{1jK} \frac{\partial}{\partial x_K} \left(\frac{e^{iK_1 R} - e^{iK_2 R}}{R} \right), \quad (8.5)$$

$$\hat{\phi}_j^{(1)} = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\rho C_4^2} [L\delta_{j1} + \partial_j \partial_1 N], \quad j, K, l = 1, 2, 3, \quad (8.6)$$

avec

$$L = C_1 k_1^2 \frac{e^{iK_1 R}}{R} + C_2 k_2^2 \frac{e^{iK_2 R}}{R},$$

$$N = C_1 \frac{e^{iK_1 R}}{R} + C_2 \frac{e^{iK_2 R}}{R} + C_3 \frac{e^{iK_3 R}}{R},$$

$$C_1 = \frac{k_1^2 - \sigma_2^2}{k_1^2(k_1^2 - k_2^2)}, \quad C_2 = \frac{k_2^2 - \sigma_2^2}{k_1^2(k_2^2 - k_1^2)}, \quad C_3 = \frac{\sigma_2^2}{k_1^2 k_2^2},$$

$$k_3 = \frac{1}{C_3} (\omega^2 - v^2)^{1/2}, \quad v^2 = \frac{4\alpha}{I}.$$

Etudions maintenant le cas particulier, où $\alpha = 0$. Nous obtenons les formules connues des solutions fondamentales d'élastocinétiqye classique

$$\dot{U}_j^{(1)} = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\rho} \left\{ \frac{1}{C_2^2} \frac{e^{i\beta_0 R}}{R} - \frac{1}{\omega^2} \partial_j \partial_1 \left(\frac{e^{i\sigma_1 R} - e^{i\beta_0 R}}{R} \right) \right\}, \quad (8.7)$$

$$\dot{\Phi}_j^{(1)} = 0.$$

Nous avons ici $\beta_0 = \frac{\omega}{\hat{C}_2}$, $\sigma_1 = \frac{\omega}{C_1}$, le symbole $\hat{C}_2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$ désignant la vitesse de propagation de l'onde longitudinale dans le milieu de Hooke. En posant $\alpha = 0$ on arrive, en vertu des formules (8.5) et (8.6) aux expressions suivantes

$$\dot{U}_j^{(1)} = 0$$

$$\dot{\Phi}_j^{(1)} = \left\{ \frac{1}{4\pi(\gamma + \epsilon)} \frac{e^{i\sigma_4 R}}{R} \delta_{j1} - \frac{1}{4\pi I \omega^2} \partial_j \partial_1 \left(\frac{e^{i\sigma_3 R} - e^{i\sigma_4 R}}{R} \right) \right\} e^{-i\omega t}, \quad (8.10)$$

avec $\sigma_3 = \omega/C_3$.

Les rotations $\dot{\Phi}_j^{(1)}$ réfèrent à un milieu hypothétique, où les rotations seules sont possibles.

Revenons encore une fois aux solutions fondamentales (8.3) ÷ (8.6).

Si la force concentrée est dirigée parallèlement à l'axe x_1 , alors en vertu de la formule (8.4) il vient $\dot{\Phi}_1^{(1)} = 0$. Donc, les grandeurs κ_{j1} ($j = 1, 2, 3$) sont égales à zéro.

Si le moment concentré agit parallèlement à l'axe x_1 alors $\dot{U}_1^{(1)} = 0$. Donc les grandeurs γ_{11} (pas de sommation par 1 !) sont égales à zéro.

En supposant l'action de la force concentrée, nous obtenons chaque valeur de l un vecteur de déplacement $\underline{u}^{(1)}$ et un vecteur de rotation $\underline{\phi}^{(1)}$.

En connaissant déjà les solutions fondamentales pour une force et un moment concentré, on peut passer à la recherche des singularités d'ordre supérieur. De la solution connue se rattachant à une force concentrée, on peut déduire les solutions se rattachant à une force double sans moment, à une force double avec un moment et à un centre de compression.

De même, de la solution connue se rattachant à un moment concentré, on peut déduire la solution pour le cas d'un moment double et d'un centre de torsion.

Citons quelques résultats. Dans le cas d'un centre de compression on trouve

$$\xi_j = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{e^{-i\omega(t-R/C_1)}}{R} \right), \quad \phi_j = 0.$$

C'est une solution identique à la solution du problème analogue en théorie classique d'élastocinétique.

Si le centre de torsion se trouve à l'origine des coordonnées, on a

$$\xi_j = 0, \quad \phi_j = \frac{1}{4\pi I k_3^2 C_3^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{e^{-i\omega(t - K_3 R)}}{R} \right),$$

$$\text{où } k_3 = \frac{1}{C_3} (\omega^2 - v^2)^{1/2}, \quad v^2 = \frac{4\alpha}{I}.$$

donc, dans ce cas, le mouvement ondulatoire est dispersé.

Supposons qu'à l'origine des coordonnées le milieu est sollicité par deux paires de forces avec un moment.

En réduisant deux paires de forces avec un moment on obtient pour le déplacement ξ_j , l'expression

$$\xi_j = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\rho\omega^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, -\frac{\partial F}{\partial x_1}, 0 \right),$$

$$F = A_1 k_1^2 \frac{e^{iK_1 R}}{R} + A_2 k_2^2 \frac{e^{iK_2 R}}{R}.$$

Pour obtenir une solution qui donnerait l'effet du moment concentré $Y_j = \delta(\underline{x} - \underline{x}')\delta_{j,3} e^{-i\omega t}$ on peut recourir à la formule (8.5) et poser $l = 3$. On voit que les deux formules ne donnent pas les mêmes résultats. C'est que dans la théorie du milieu micropolaire, on ne peut pas substituer les doublets (avec le moment) des forces concentrées à l'action du moment concentré. Dans cette théorie, le moment concentré est une sollicitation analogue à une force concentrée.

Les solutions fondamentales obtenues pour le milieu infini peuvent servir à construire des solutions pour les régions limitées. Nous allons appliquer des formules analogues à celles de Somigliana, déduites en élastocinétique classique.

Nous avons présenté ici quelques problèmes de la propagation des ondes élastiques en espace infini. On a obtenu tout de même plusieurs solutions pour la propagation des ondes monochromatiques en espace élastique $(^{21})$, $(^{23})$, $(^{27})$ et dans la couche élastique $(^{24})$, $(^{25})$, $(^{28})$.

Remarquons que la recherche des solutions fondamentales des problèmes des oscillations apériodiques est d'une grande importance. On n'a obtenu jusqu'ici que quelques solutions de ces problèmes, par

exemple, la solution générale de la propagation des ondes rotatives, donnée plus haut. Quant au problème fondamental, à savoir celui de la recherche des solutions singulières du problème dynamique pour des forces et des instantanés et concentrés, les résultats obtenus jusqu'ici s'appliquent uniquement aux intervalles des temps très brefs ou bien très longs.

Ainsi, il reste encore à résoudre un grand nombre de problèmes particuliers. Cependant, les rapides progrès des recherches dans ce domaine permettent d'espérer que nous aurons, au cours des prochaines années, une élastocinétique complète des milieux des Cosserat, formant un nouveau domaine de l'élastocinétique classique.

BIBLIOGRAPHIE

- (¹) VOIGT W.: Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle, *Abh. Ges. Wiss.*, Göttingen, 34, 1887.
- (²) COSSERAT E. and COSSERAT F.: *Théorie des corps déformables*, A. Herrman, Paris, 1909.
- (³) TRUESDELL C. and TOUPIN R.A. : The classical field theories, *Encyclopaedia of Physics*, 3, 1, Springer Verlag, Berlin, 1960.
- (⁴) GRIOLI G. : Elasticité asymétrique, *Ann. di Mat. Pura et Appl.*, Ser. IV, 50, 1960.
- (⁵) MINDLIN R.D. and TIERSTEN H.F. : Effect of couple stresses in linear elasticity, *Arch. Mech. Analysis*, 11, 1962, 385.
- (⁶) GÜNTHER W. : Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums, *Abh. Braunschweig, Wiss. Ges.* 10, 1958, 85.
- (⁷) SCHAEFER H. : Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen Cosserat-Kontinuums, *Misz. Angew. Mathematik Festschrift Tollmien*, Berlin, 1962, Akademie Verlag.
- (⁸) NEUBER H. : On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat-continua, *Int. Congress IUTAM*, München, 1964.
- (⁹) KUVSHINSKII E. and AERO A.L. : Continuum theory of asymmetric elasticity (in Russian), *Fizika Tvordogo Tela*, 5, 1963.

- (¹⁰) PALMOV N.A. : Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity (in Russian), *Prikl. Mat. Mekh.*, 28, 1964, 401.
- (¹¹) ERINGEN A.C. and SUHUBI E.S. : Nonlinear theory of simple microelastic solids, *Int. J. of Engng. Sci.*, I, 2, 2, 1964, 189 , II, 2, 4, 1964, 389.
- (¹²) STOJANOVIC R. : Mechanics of Polar Continua, *CISM*, Udine, 1970.
- (¹³) NCWACKI W. : *Theory of micropolar elasticity*, J. Springer, Wien, 1970.
- (¹⁴) NCWACKI W. : Three dimensional problem of micropolar theory of elasticity, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn.*, 22, 5, 1974.
- (¹⁵) SANDRU N. : On some problems of the linear theory of asymmetric elasticity, *Int. J. Eng. Sci.* 4, 1, 1966, 81.
- (¹⁶) IGNACZAK J. : Radiation conditions of Sommerfeld type for elastic materials with microstructure, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn.*, 17, 6, 1970, 251.
- (¹⁷) GRAFFI D. : Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni non stazionari, *Atti Accad. Sci. Bologna*, 10, 2, 1963.
- (¹⁸) NOWACKI W. : Propagation of rotation waves in asymmetric elasticity, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Techn.*, 16, 10, 1968, 493.
- (¹⁹) NOWACKI W. : Green functions for micropolar elasticity. *Proc. Vibr. Probl.*, 1, 10, 1969.
- (²⁰) NOWACKI W. and NOWACKI W.K. : The generation of waves in an infinite micropolar elastic solid, *Proc. Vibr. Probl.*, 10, 2, 1969, 170.

- (²¹) PARFITT V.R. and ERINGEN A.C. : Reflection of plane waves from the flat boundary of a micropolar elastic half-space, *Report n° 8 - 3, General Technology Corporation*, 1966.
- (²²) STEFANIAK J. : Reflection of a plane longitudinal wave from a free plane in a Cosserat medium, *Arch. Mech. Stos.*, 21, 6, 1969, 745.
- (²³) KALISKI S. , KAPELEWSKI J. and RYMARZ C. : Surface waves on an optical branch in a continuum with rotational degrees of freedom, *Proc. Vibr. Probl.*, 9, 2, 1968, 108.
- (²⁴) NOWACKI W. and NOWACKI W.K. : Propagation of monochromatic waves in an infinite micropolar elastic plate, *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn.*, 17, 1, 1969, 29.
- (²⁵) NOWACKI W. and NOWACKI W.K. : The plane Lamb problem in a semi-infinite micropolar elastic body, *Arch. Mech. Stos.*, 21, 3, 1969, 241.
- (²⁶) EASON G. : Wave propagation in a material with microstructure, *Proc. Vibr. Probl.*, 12, 4, 1971, 363.
- (²⁷) EASON G. : The displacement produced in a semi-infinite linear Cosserat continuum by an impulsive force, *Proc. Vibr. Probl.*, 11, 2, 1970, 199.
- (²⁸) ACHENBACH J.D. : Free vibrations of a layer of micropolar continuum *Int. J. Engng. Sci.*, 10, 7, 1969, 1025.
-