

# KSIĘGA JUBILEUSZOWA

DLA UCZCZENIA ZASŁUG NAUKOWYCH

PROF. DR INŻ. M. T. HUBERA

Z OKAZJI

50-LECIA PRACY NAUKOWEJ

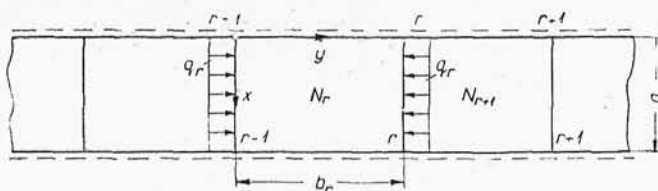
KOMITET UCZCZENIA ZASŁUG NAUKOWYCH  
PROF. DR INŻ. MAKSYMILIANA T. HUBERA  
GDAŃSK — POLITECHNIKA

1950

WITOLD NOWACKI  
Gdańsk

## STATECZNOŚĆ PODŁUŻNIE I POPRZECZNIE ŚCISKANEJ PŁYTY CIĄGŁEJ

A. Rozważmy płytę ciągłą, w krawędziach  $x=0$ ;  $x=a$  swobodnie podpartą, ściskaną podłużnie obciążeniem jednostajnym  $q=\sigma_y \cdot h$  ( $h$  — grubość płyty).



Rys. 1

Dla  $q > q_k$  ( $q_k$  — obciążenie krytyczne) płyta dozna zgięcia. Momenty zginające  $M_y$  wzdłuż poprzecznych linii podporowych przyjmujemy jako „nadliczbowe” zadania — takie bowiem przyjęcie nadliczbowych doprowadzi do układu równań trójczłonowych.

Ustawienie równań warunkowych wyboczenia płyty ciągłej poprzedzimy opracowaniem układu podstawowego, płyty dookoła swobodnie podpartej, ściskanej w kierunku osi  $y$  i obciążonej momentem:

$$M(\xi, 0) = A \sin v \xi \quad v = \pi a \quad a = b/a \quad x = \xi b$$

w krawędzi  $y=0$  płyty (rys. 2).

Przy założeniu  $w = Y(\eta) \sin v \xi$ , spełniającym warunki brzegowe na krawędziach  $x=0$ ,  $x=a$ , doprowadzimy równanie różniczkowe odkształcenia płyty

$$\Delta \Delta w(\xi, \eta) + w_{\eta\eta}(\xi, \eta) u^2 = 0 \quad (1)$$

$$y = \eta b \quad x = \xi b \quad u^2 = \frac{q b^2}{N}$$

do postaci

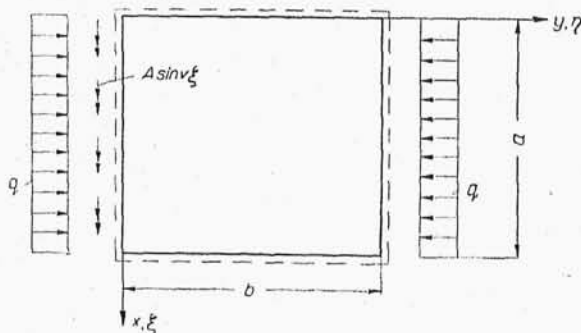
$$\frac{d^4 Y}{d\eta^4} - v^2 \left( 2 - \frac{u^2}{v^2} \right) \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + v^4 Y = 0 \quad (2)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (2) będzie:

$$Y(\eta) = C_1 \cos \lambda \eta + C_2 \sin \lambda \eta + C_3 \cos \frac{v^2}{\lambda} \eta + C_4 \sin \frac{v^2}{\lambda} \eta \quad (3)$$

gdzie

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(u^2 - 2v^2) + \sqrt{u^2(u^2 - 4v^2)}} > 0$$



Rys. 2

Dla płyty ciągłej przy  $u^2 > 4v^2$  oraz  $a > i$   $i=1, 2, 3, \dots$  wartość  $\lambda$  jest dodatnia.

Wypadek  $u^2 = 4v^2$  (lub też  $q = \frac{4N\pi^2}{a^2}$ ), występujący dla płyt o jednakowych rozpiętościach  $b$  oraz  $a = \frac{b}{\pi} = i$ ;  $i=1, 2, 3, \dots$  a dający zerowe wartości momentów  $A$  na podporach poprzecznych wyłączamy z dalszych rozważań.

Stałe całkowania  $C_1, \dots, C_4$  wyznaczymy z następujących warunków brzegowych:

$$Y(0)=0 \quad Y(1)=0 \quad Y''(0)=-\frac{Ab^2}{N} \quad Y''(1)=0$$

Stąd:  $C_1 = -C_3 = \frac{Ab^2}{N} \frac{1}{\lambda^2 - \frac{v^4}{\lambda^2}}; \quad C_2 = -C_1 \operatorname{ctg} \lambda; \quad C_4 = -C_3 \operatorname{ctg} \frac{v^2}{\lambda}$

Kąt nachylenia powierzchni odkształcenia płyty w krawędzi  $\eta=0, \eta=1$  daje następujące wartości:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{Ab}{N} \Phi \sin v \xi$$

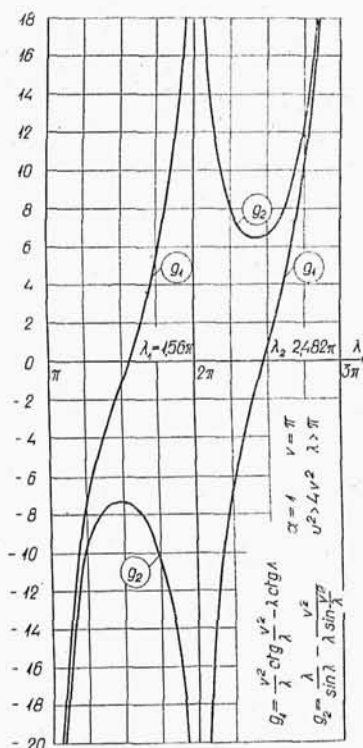
$$\left. \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = -\frac{Ab}{N} \Psi \sin v \xi$$

gdzie:

$$\Phi = \frac{\frac{v^2}{\lambda} \operatorname{ctg} \frac{v^2}{\lambda} - \lambda \operatorname{ctg} \lambda}{\lambda^2 - \frac{v^4}{\lambda^2}}$$

$$\Psi = \frac{1}{\lambda^2 - \frac{v^4}{\lambda^2}} \left( \frac{\lambda}{\sin \lambda} - \frac{v^2}{\lambda \sin \frac{v^2}{\lambda}} \right)$$

(4a)



Rys. 3

W wypadku szczególnym:  $q=0$  otrzymamy:

$$\Phi = \frac{1}{2v} \frac{\cosh v \sinh v - v}{\sinh^2 v} \quad \Psi = \frac{1}{2v} \frac{v \cosh v - \sinh v}{\sinh^2 v} \quad (4b)$$

Wreszcie dla  $a \rightarrow \infty$  otrzymamy z równań (4)

$$\Phi = \frac{1}{u} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{\operatorname{tg} u} \right) \quad \Psi = \frac{1}{u} \left( \frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u} \right) \quad (4c) *$$

Rozważmy teraz dwa sąsiednie pola płyty ciągłej: pole  $r$  o charakterystyce zginania  $N_r$  i obciążeniu  $q_r$  oraz pole  $r+1$  o charakterystyce zginania  $N_{r+1}$  i obciążeniu  $q_{r+1}$ . Oznaczamy przez  $A_{r-1} \sin v\xi$ ,  $A_r \sin v\xi$ ,  $A_{r+1} \sin v\xi$  momenty podporowe  $M$  w prostych podporowych  $r-1$ ,  $r$ ,  $r+1$ .

Warunek ciągłości płyty na podporze  $r$  —  $r$  prowadzi do równania:

$$-\frac{\partial w_r}{\partial y} \Big|_{y=br} + \frac{\partial w_{r+1}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

albo

$$A_{r-1} c_r \Psi_r + A_r (c_r \Phi_r + c_{r+1} \Phi_{r+1}) + A_{r+1} c_{r+1} \Psi_{r+1} = 0 \quad (5)$$

Tu  $c_r = \frac{N}{N_r} \frac{b_r}{b}$ , przy czym  $N$  jest dowolną sztywnością płytową,  $b$  — dowolną rozpiętością, a  $(z+1)$  — ilością podpór poprzecznych płyty.

Zauważmy, że ilość równań (5) odpowiada ilości niewiadomych momentów podporowych.

Układ równań (5) będzie niesprzeczny, gdy wyznacznik układu będzie równy zeru. Przyrównanie do zera wyznacznika układu daje równanie przestępne względem  $\lambda$ .

Najmniejszy pierwiastek tego równania posłuży do wyznaczenia najmniejszej siły krytycznej ze związku:

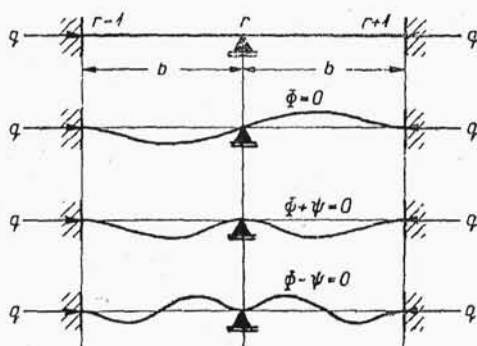
$$q_k = \frac{N\pi^2}{a^2} \left( \frac{\lambda}{v} + \frac{v}{\lambda} \right)^2$$

Zauważyć należy, że w wypadku szczególnym  $q_r=0$  w polu  $r$  wstawić należy wartość  $\Phi_r$ ,  $\Psi_r$  ze wzoru (4b).

Z szeregu wypadków szczególnych, zawartych w równaniu (5) podajemy poniżej dwa szczególnie proste.

\* Porównaj współczynniki w równaniach trzech momentów dla wyboczenia belek ciągłych w dziele: S. Timoszenko: Theory of Elastic Stability, 1936, str. 97.

## 1. Płyta dwuprzęsłowa



Rys. 4

Z równania (5) otrzymujemy kolejno:

$$A_{r-1} \Phi + A_r \Psi = 0$$

$$A_{r-1} \Psi + 2 A_r \Phi + A_{r+1} \Psi = 0 \quad (a)$$

$$A_r \Psi + A_{r+1} \Phi = 0$$

Wyznacznik układu równań prowadzi do:

$$\Phi - \Psi = 0 \quad \Phi + \Psi = 0 \quad \Phi = 0$$

Najmniejszą wartość  $q_k$  otrzymamy dla  $\Phi = 0$ , mianowicie dla

$b/a = a = 0$		$q_k = 20,16 \frac{N}{b^2}$
$a = 0,5$	$\lambda = 1,42 \pi$	$q_k = 10,20 \frac{N\pi^2}{a^2}$
$a = 1,0$	$\lambda = 1,56 \pi$	$q_k = 4,85 \frac{N\pi^2}{a^2}$
$a = 1,5$	$\lambda = 2,118 \pi$	$q_k = 4,50 \frac{N\pi^2}{a^2}$

Zauważymy że równania  $\Phi + \Psi = 0$ ,  $\Phi - \Psi = 0$  prowadzą do wyznaczenia  $q_k$  dla płyty jednoprzęsłowej utwierdzonej zupełnie w podporach poprzecznych; pierwsze — dla symetrycznej, drugie — dla antymetrycznej postaci wygięcia.

I tak dla  $\alpha=1$ :  $\Phi+\Psi=0$  daje:  $\lambda=2,12\pi$   $q_k=\frac{N\pi^2}{a^2} 6,74$   
 zaś dla  $\alpha=0,5$ :  $q_k=\frac{N\pi^2}{a^2} 18,20$ .

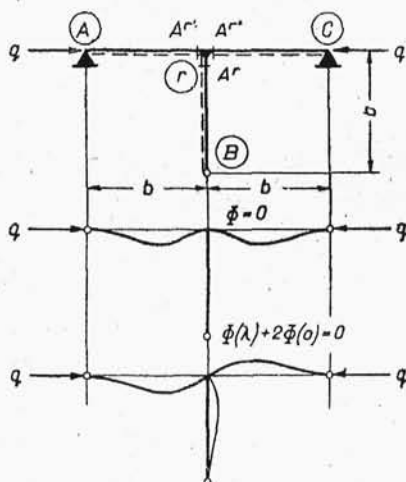
## 2. Układ płytowy

Ustawiamy tu równanie czterech momentów dla przęsła  $A-r-B$  oraz przęsła  $A-r-C$

$$\begin{aligned} A_r'' \Phi(\lambda) + A_r \Phi(0) &= 0 \\ A_r' \Phi(\lambda) + A_r'' \Phi(\lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Zrównoważenie węzła  $r$  daje:  $A_r' - A_r'' - A_r = 0$

Tu przez  $\Phi(\lambda)$  oznaczamy funkcję z równania (4a), przez  $\Phi(0)$  funkcję z równania (4b)



Rys. 5

Wyznacznik układu równań (b) prowadzi do

$$\Phi(\lambda)=0 \quad \Phi(\lambda)+2\Phi(0)=0$$

gdzie

$$\Phi(0)=\frac{1}{2v} \cdot \frac{\cosh v \sinh v - v}{\sinh^2 v}$$

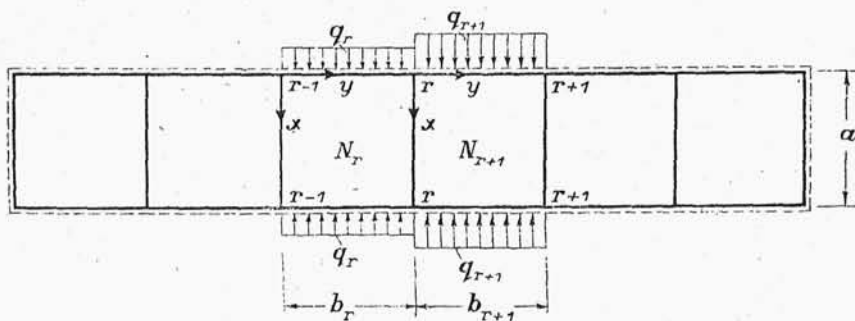
Otrzymamy tu  $q_k \min$  z równania:  $\Phi(\lambda) + 2\Phi(0) = 0$  mianowicie dla:

$$\alpha = 0 \quad q_k = 12,32 \frac{N}{b^2}$$

$$\alpha = 0,5 \quad \lambda = 1,1375 \pi \quad q_k = 7,32 \frac{N\pi^2}{a^2}$$

$$\alpha = 1,0 \quad \lambda = 1,375 \pi \quad q_k = 4,42 \frac{N\pi^2}{a^2}$$

B. Rozważmy płytę ciągłą, w krawędziach  $x=0$ ,  $x=a$  swobodnie podpartą (rys. 6), ściskaną poprzecznie obciążeniem  $q = \sigma_x \cdot h$



Rys. 6

Podobnie jak w wypadku płyty ciągłej podłużnie ściskanej, opracować musimy zadanie pomocnicze, płytę wzdłuż czterech krawędzi swobodnie podpartą, ściskaną siłami  $q$  i obciążoną momentem  $M_y = K \sin v \xi$ . Równanie powierzchni odkształcenia płyty dla  $q > q_{kryt.}$ :

$$\Delta \Delta w(\xi, \eta) + u^2 w_{\xi\xi}(\xi, \eta) = 0 \quad (6)$$

$$u^2 = \frac{qb^2}{N}$$

doprowadzimy przy założeniu  $w = Y(\eta) \sin v \xi$  do postaci:

$$\frac{d^4 Y}{d\eta^4} - 2v^2 \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + v^2(v^2 - u^2)Y = 0 \quad (7)$$



Rozwiązaniem równania różniczkowego (7) jest:

$$Y = C_1 \cosh m\eta + C_2 \sinh m\eta + C_3 \cos n\eta + C_4 \sin n\eta$$

$$\text{Tutaj } \eta = y/b \quad m = \nu \sqrt{1/\delta + 1} \quad n = \nu \sqrt{1/\delta - 1}$$

$$\delta = \frac{u}{\nu^2} \quad \delta = \frac{q\alpha^2}{N\pi^2} > 1$$

Stałe  $C_1, \dots, C_4$  określimy z warunków brzegowych zadania:

$$Y(0) = 0 \quad Y(1) = 0 \quad -NY''(0) = Kb^2 \quad Y''(1) = 0$$

Otrzymamy stąd:

$$C_1 = -\frac{Kb^2}{N} \frac{1}{m^2 + n^2} \quad C_3 = -C_1 \quad C_2 = -C_1 \operatorname{ctgh} m \quad C_4 = C_1 \operatorname{ctg} n$$

Powierzchnię odkształcenia określa równanie:

$$w = C_1 [m(\sinh m\eta - \operatorname{ctgh} m \cosh m\eta) + n(\sin m\eta + \operatorname{ctg} n \cos n\eta)] \sin \nu \xi$$

Nachylenie powierzchni odkształcenia płyty na krawędzi  $\eta = 0$  i  $\eta = 1$  otrzymamy z równań:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} &= \frac{Y'(0)}{b} \sin \nu \xi = \frac{Kb}{N} \bar{\Phi} \sin \nu \xi \\ \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b} &= \frac{Y'(1)}{b} \sin \nu \xi = -\frac{Kb}{N} \bar{\Psi} \sin \nu \xi \end{aligned} \quad (10)$$

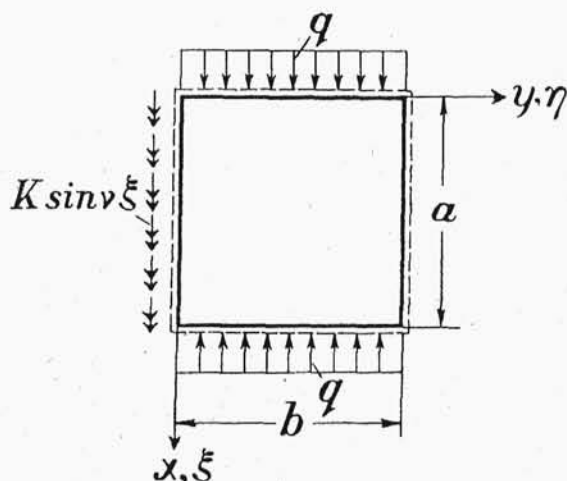
W powyższych wzorach oznaczają:

$$\bar{\Phi} = \frac{m \operatorname{ctgh} m - n \operatorname{ctg} n}{m^2 + n^2} \quad \bar{\Psi} = \frac{n \operatorname{cosec} n - m \operatorname{cosech} m}{m^2 + n^2} \quad (11)$$

Zauważmy przytem, że

$$m^2 + n^2 = 2\nu^2 \sqrt{\delta} \quad m^2 - n^2 = 2\nu^2 \quad (12)$$

Wracając do płyty ciągłej (rys. 6), stwierdzamy, że dla  $q > q_k$  płyta wygnie się, a na poprzecznych podporach powstaną nieznane „nadliczbowe” momenty  $M = K \sin \nu \xi$ .



Rys. 7

Z warunku ciągłości płyty na linii podporowej  $r$ , tj. z warunku:

$$-\frac{\partial w_r}{\partial y} \bigg|_{y=br} + \frac{\partial w_{r+1}}{\partial y} \bigg|_{y=0} = 0$$

dołączymy do równania trójczłonowego:

$$K_{r-1} c_r \bar{\Psi}_r + K_r (c_r \bar{\Phi}_r + c_{r+1} \bar{\Phi}_{r+1}) + K_{r+1} c_{r+1} \bar{\Psi}_{r+1} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, z-1) \quad (15)$$

gdzie  $c_r = \frac{N b_r}{N_r b}$  a  $(z+1)$  jest ilością podpór poprzecznych płyty.

Równań trójczłonowych (15) ustawimy tyle, ile mamy nieznanymi momentów podporowych  $K$ .

Układ równań jednorodnych (15) będzie niesprzecznym, gdy wszystkie wielkości  $K$  są równe zero (co przeczy jednak założeniom, gdyż w tym wypadku byłoby  $q < q_k$ ), lub też, gdy wyznacznik układu równań  $D(\delta)$  będzie równy zero. Ten ostatni warunek wraz ze związkami (12) stanowi kryterium wyboczenia płyty ciągłej.

Rozwiązanie wyznacznika układu równań prowadzi do  $\infty$  ilości pierwiastków  $\delta$ ; najmniejszy z nich daje najmniejszą wartość siły krytycznej.

Jeśli w jednym z przęseł obciążenie  $q=0$ , to:  $m=v$ ,  $n=iv$  a funkcje  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{\Psi}$  przyjmują postać:

$$\bar{\Phi}(0) = \frac{\cosh v \sinh v - v}{2v \sinh^2 v} \quad \bar{\Psi}(0) = \frac{v \cosh v - \sinh v}{2v \sinh^2 v}$$

Jeśli ponadto przy  $q=0$  rozpiętość  $b \rightarrow \infty$ , to

$$\lim_{b \rightarrow \infty} [b \bar{\Phi}(0)] \rightarrow \frac{1}{2} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} [b \bar{\Psi}(0)] \rightarrow 0$$

Zatem gdy w przęśle  $(r-1) - r$ :  $q_r \neq 0$  a w przęśle  $r - (r+1)$ :  $q_{r+1} = 0$ , a ponadto  $b_{r+1} \rightarrow \infty$ , równanie (13) przyjmuje kształt:

$$K_{r-1} c_r \bar{\Psi}_r + K_r \left( c_r \bar{\Phi}_r + \frac{Na}{2\pi b N_{r+1}} \right) = 0 \quad (13a)$$

Niech kilka prostych przykładów objaśni zastosowanie wprowadzonych związków.

1. Płyta dwuprzęsłowa w krawędziach  $r-1$ ,  $r+1$  swobodnie podparta:  $q_r \neq 0$ ;  $q_{r+1} = 0$

Ustawiając równanie (13) dla podpory  $r$ , otrzymamy:

$$K_r [c_r \bar{\Phi}_r + c_{r+1} \bar{\Phi}_{r+1}(0)] = 0$$

Równaniem warunkowym wyboczenia będzie tu:

$$c_r \bar{\Phi}_r + c_{r+1} \bar{\Phi}_{r+1}(0) = 0 \quad (a)$$

Przy jednakowych rozpiętościach i grubościach płyty:

$$\bar{\Phi}(0) + \bar{\Phi} = 0$$

albo

$$\frac{m \operatorname{ctgh} m - n \operatorname{ctg} n}{m^2 + n^2} + \frac{v \cosh v \sinh v - v}{2v \sinh^2 v} = 0 \quad (b)$$

Jeśli ponadto  $b_{r+1} \rightarrow \infty$ , to

$$\bar{\Phi}(\delta) + \frac{a N_r}{2 b_r \pi N_{r+1}} = 0 \quad (c)$$

wreszcie gdy  $N_{r+1} \rightarrow \infty$ , to  $\bar{\Phi} = 0$ , albo  $m \operatorname{ctgh} m = n \operatorname{ctg} n$  (d)

2. Płyta w krawędzi  $r$  i  $(r-1)$  utwierdzona zupełnie. Z równań (13) wypisanych dla podpory  $(r-1)$  i  $r$  otrzymujemy:

$$K_{r-1} \bar{\Phi} + K_r \bar{\Psi} = 0$$

$$K_{r-1} \bar{\Psi} + K_r \bar{\Phi} = 0$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu daje:

$$\bar{\Phi} + \bar{\Psi} = 0 \quad \bar{\Phi} - \bar{\Psi} = 0$$

Najmniejszą wartość  $q_k$  otrzymamy dla  $\bar{\Psi} + \bar{\Phi} = 0$

$$\text{t. zn. ze związku: } m \operatorname{tgh} \frac{m}{2} + n \operatorname{tg} \frac{n}{2} = 0$$

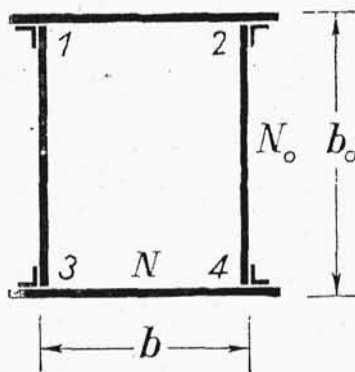
wyprowadzonego po raz pierwszy przez H. Reissnera.

3. Wyboczenie płyt przekroju zamkniętego pasa skrzynkowego kratownicy.

Na płytę 1—2 i 3—4 działa obciążenie  $q$ , na płytę 1—3 i 2—4 działa obciążenie  $q_0$ .

Najmniejszą wartość obciążenia krytycznego otrzymamy przy symetrycznej postaci wyboczenia układu. Wskutek równości momentów podporowych, kryterium wyboczenia będzie

$$\bar{\Psi}(\delta) + \bar{\Phi}(\delta) + \frac{c_0}{c} [\bar{\Psi}(\delta_0) + \bar{\Phi}(\delta_0)] = 0$$



Rys. 8

4. Obciążenie  $q$  działa jedynie w przęśle  $b_r$ . Rozpiętości:  $b_{r-1} \rightarrow \infty$ ,  $b_{r+1} \rightarrow \infty$ . Grubość płyty ciągłej jednakowa. Najmniejszą wartość obciążenia krytycznego otrzymamy dla symetrycznej

postaci wyboczenia ( $K_{r-1}=K_r$ ) ze związku:

$$\bar{\Psi} + \bar{\Phi} + \frac{a}{\pi b} = 0$$

albo:

$$m \operatorname{tgh} \frac{m}{2} + n \operatorname{tg} \frac{n}{2} + 2\pi \frac{b}{a} \sqrt{\delta} = 0$$

5. Płyta ciągła o  $\infty$  ilości przęseł. We wszystkich przęsłach jednakowe rozpiętości i grubości płyt. Obciążenie  $q \neq 0$  jedynie dla przęsła  $(r-1) - r$ . W tym wypadku:

$$K_{r-2} = q K_{r-1} \quad K_{r+1} = q K_r \quad K_{r-1} = K_r$$

gdzie

$$q = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \beta = \bar{\Phi}(0)/\bar{\Psi}(0)$$

Kryterium wyboczenia kształtuje się następująco:

$$\bar{\Phi}(\delta) + \bar{\Psi}(\delta) + \bar{\Phi}(0) + q \bar{\Psi}(0) = 0$$

albo:

$$m \operatorname{tgh} \frac{m}{2} + n \operatorname{tg} \frac{n}{2} + \frac{v \sqrt{\delta}}{\sinh^2 v} [\cosh v \sinh v + q(v \cosh v - \sinh v) - v] = 0$$

## Résumé

### Stabilité d'une plaque continue

Le mémoire ci-près envisage le critère général du flambage d'une plaque continue sollicitée tantôt par une charge longitudinale tantôt par une charge transversale. Profitant des conditions de continuité sur appuis on a établi pour les deux cas des équations trimembres homogènes. Le déterminant du système de ces équations constitue le critère du flambage. Quelques exemples fort simples démontrent la marche des procédés.