

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
KOMITET UCZCZENIA ZASŁUG NAUKOWYCH  
PROF. DRA INŻ. WITOLDA WIERZBICKIEGO

**KSIĘGA JUBILEUSZOWA**  
DLA UCZCZENIA ZASŁUG NAUKOWYCH  
PROFESORA DOKTORA INŻYNIERA  
**WITOLDA WIERZBICKIEGO**

WARSZAWA 1959

# ZAGADNIENIA JEDNOCZESNEGO ZGINANIA I ŚCISKANIA, STATECZNOŚCI I DRGAŃ PASMA PŁYTOWEGO I PŁYTY PROSTOKĄTNEJ

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

## 1. Wstęp

Zagadnienie stateczności i drgań własnych płyty prostokątnej na brzegu swym zupełnie utwierdzonej ma bardzo bogatą literaturę. Rozwiązywano je rozmaitymi metodami. Wśród nich na plan pierwszy wysuwają się metody wariacyjne W. Ritz a, [1], B. G. Galerkin a, [2], i S. Timoszenki, [3]. Niepewność jednak uzyskiwanych tymi metodami rezultatów skłoniła badaczy do poszukiwania przybliżonych i ścisłych rozwiązań równania różniczkowego problemu drgań czy też stateczności płyty. Pierwszy poważny krok w kierunku rozwiązania równania różniczkowego zrobił K. Sez a w a, [4]. W jego metodzie spełnia się w sposób ścisły warunek zerowej wartości ugięcia na obwodzie płyty, a warunek zerowej wartości stycznej w kilku punktach obwodu (w narożach i w połowie długości boków). G. I. Taylor, [5], i G. H. Faxen, [6], w odniesieniu do stateczności a S. Iguchi, [7], w stosunku do drgań własnych płyty zupełnie na obwodzie utwierdzonej podali już pełne ścisłe rozwiązanie. Rozwiązanie zagadnienia prowadzi do układu nieskończonego równań liniowych, w których współczynniki przy niewiadomych są funkcjami nieznanego parametru, określającego wartość siły krytycznej czy też częstotliwości drgań własnych. Przyrównanie wyznacznika układu tych równań do zera jest warunkiem wyboczenia czy też drgań płyty. Obaj badacze pracują na układzie podstawowym — płycie na brzegu swobodnie podpartej. Zatem niewiadome w nieskończonym układzie równań traktować można jako współczynniki rozwinięcia Fouriera momentów utwierdzenia płyty.

Autor niniejszej pracy, [8], podał odmienną metodę rozwiązania polegającą na przekształceniu równania różniczkowego na całkowite i doprowadzeniu tego ostatniego do nieskończonego układu równań,

w których współczynniki przy niewiadomych przedstawiają rozwinięcie Fouriera momentów utwierdzenia. Metoda ta jest o tyle ogólniejsza od poprzednich, że zezwala na uwzględnienie dowolnego ciągłego lub nieciągłego rozkładu naprężeń  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ , działających w płaszczyźnie płyty.

W 1921 r. M. T. H u b e r, [9], podał szereg rozwiązań odnoszących się do statyki płyt prostokątnych na dwu przeciwległych brzegach swobodnie podpartych wychodząc z pasma płytowego obciążonego nieskończonym układem sił. Przyjmując reakcje podporowe jako wielkości nieznane uzyskał szybkozbieżne szeregi dla ugięcia płyty.

G. A. G r i n b e r g i J. C. U f l i a n d, [10], w swej pracy odnoszącej się do zagadnienia statyki płyty na brzegach zupełnie utwierdzonej rozwijając pomysł M. T. H u b e r a stwierdzili, że do szybciej zbieżnych wyników dojść można i w tym przypadku przyjmując jako wielkości nieznane problemu siły podporowe, a nie momenty utwierdzenia. Rozwiązanie problemu stateczności płyty, opierające się na ideach dwu wymienionych radzieckich uczonych, podał H u H a i - C h a n g, [11], przy użyciu podwójnych szeregów trygonometrycznych<sup>1</sup>.

W niniejszej pracy przedstawiamy szereg rozwiązań zagadnień jednoczesnego zginania i ściskania, stateczności, drgań własnych i wymuszonych dla pasma płytowego na brzegu swobodnie podpartego lub zupełnie utwierdzonego oraz dla płyt prostokątnych na brzegach zupełnie utwierdzonych, przyjmując jako wielkości niewiadome reakcje pionowe skupione lub w sposób ciągły rozłożone, umieszczone periodycznie na pasmie płytowym. Między innymi podano sposób rozwiązania płyty na brzegach zupełnie utwierdzonej przez sprowadzenie tego zagadnienia do równania całkowego F r e d h o l m a pierwszego rodzaju. Rozwiązanie tego równania całkowego doprowadza do nieskończonego układu równań o większej zbieżności niż w dotychczas obmyślanych metodach.

## 2. Jednoczesne zginanie i ściskanie oraz wyboczenie pasma płytowego i płyty prostokątnej swobodnie podpartych na brzegach

Zajmijmy się najpierw rozwiązaniem zadania pomocniczego, mianowicie wyznaczeniem ugięcia pasma płytowego o szerokości  $a$  na brzegach  $x=0$ ,  $a$  swobodnie podpartego i obciążonego układem sił

<sup>1</sup> Por. rozdział *Discussion on the lecture of Prof. dr. Nowacki* w pracy [11], s. 119.

$P=1$  działających w punktach  $(\xi, \pm 2bk)$   $k=0, 1, 2, \dots, \infty$  płyty. Niech ponadto pasmo płytowe będzie ściskane siłami  $q$  równomiernie rozłożonymi na obu brzegach płyty (rys. 1). Ugięcie płyty  $G$  powinno spełnić równanie różniczkowe

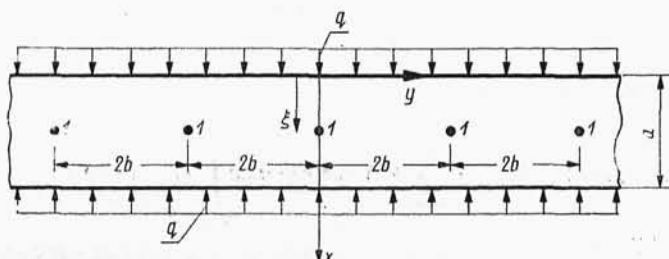
$$(2.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 G + \lambda^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{N} \delta(x - \xi) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta(y + 2bk), \quad \lambda^2 = \frac{q}{N}$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad G = 0, \quad \nabla^2 G = 0 \quad \text{na brzegach } x=0, a$$

oraz

$$(2.3) \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad \text{dla } y = \pm 2bk, \quad k=0, 1, 2, \dots, \infty.$$



Rys. 1

W równaniu (1.1)  $G(x, y; \xi)$  oznacza ugięcie płyty w punkcie  $(x, y)$ ,  $N$  jest sztywnością zginania, a  $\delta$  oznacza symbol funkcji Diraca.

W celu rozwiązania równania (2.1) z warunkami (2.2) i (2.3) podamy rozwiązanie prostszego zadania. Wyznamy najpierw ugięcie płyty  $G_0$  wywołane działaniem jednej tylko siły skupionej umieszczonej w punkcie  $(\xi, 0)$ .

Rozwiązać należy równanie różniczkowe

$$(2.4) \quad \nabla^2 \nabla^2 G_0 + \lambda^2 \frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2} = \frac{1}{N} \delta(x - \xi) \delta(y)$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.5) \quad G_0 = 0, \quad \nabla^2 G_0 = 0$$

na brzegach  $x=0, a$  oraz

$$G_0 = 0$$

w nieskończoności.

Widoczne jest, że rozwiązanie równania (2.1) przyjmie postać

$$(2.6) \quad G(x, y; \xi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} G_0(x, y + 2mb; \xi).$$

Wyraźmy prawą stronę równania (1.4) przy pomocy szeregu-calki Fouriera

$$\frac{1}{N} \delta(x - \xi) \delta(y) = \frac{2}{Na} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \int_0^{\infty} \cos \beta y d\beta, \quad a_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Przyjmując, że

$$(2.7) \quad G_0(x, y; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} A_n(\beta; \xi) \sin a_n x \cos \beta y d\beta,$$

otrzymamy z równania (1.4)

$$A_n(\beta; \xi) = \frac{2}{Na\pi} \frac{\sin a_n \xi}{(a_n^2 + \beta^2)^2 - \lambda^2 a_n^2}.$$

Zatem zgodnie ze wzorem (2.7) jest

$$(2.8) \quad G_0(x, y; \xi) = \frac{2}{Na} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y d\beta}{(a_n^2 + \beta^2)^2 - \lambda^2 a_n^2}.$$

Zważywszy, że

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y d\beta}{(\beta^2 + a_n^2)^2 - \lambda^2 a_n^2} = \frac{\pi}{2(\chi_n^2 - \varphi_n^2)} \left( \frac{e^{-\varphi_n y}}{\varphi_n} - \frac{e^{-\chi_n y}}{\chi_n} \right), \quad y > 0,$$

gdzie

$$\varphi_n^2 = a_n^2 - a_n \lambda, \quad \chi_n^2 = a_n^2 + a_n \lambda$$

otrzymamy

$$(2.9.1) \quad G_0^{(1)}(x, y; \xi) = \frac{1}{2a\lambda N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin a_n x}{a_n} \left( \frac{e^{-\varphi_n y}}{\varphi_n} - \frac{e^{-\chi_n y}}{\chi_n} \right), \quad y > 0,$$

$$(2.9.2) \quad G_0^{(2)}(x, y; \xi) = \frac{1}{2a\lambda N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin a_n x}{a_n} \left( \frac{e^{\varphi_n y}}{\varphi_n} - \frac{e^{\chi_n y}}{\chi_n} \right), \quad y < 0.$$

Ponieważ funkcja  $G_0$  dana jest dwoma wzorami w zależności od tego czy  $y > 0$ , czy  $y < 0$ , zatem związek (2.6) przyjmie postać

$$(2.10) \quad G(x, y; \xi) = G_0^{(1)}(x, y; \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} [G_0^{(1)}(x, y + 2bm; \xi) + G_0^{(2)}(x, y - 2bm; \xi)].$$

Wstawiając do powyższego wyrażenia funkcje  $G_0^{(1)}$  i  $G_0^{(2)}$  i wykorzystując zależności

$$(2.11) \quad \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2bm\varphi_n} = \frac{1}{e^{2b\varphi_n} - 1}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2bm\chi_n} = \frac{1}{e^{2b\chi_n} - 1}, \quad \varphi_n, \chi_n > 0$$

otrzymamy po prostych przekształceniach

$$(2.12) \quad G(x, y; \xi) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(y; \lambda) \sin a_n x \sin a_n \xi,$$

gdzie

$$\Gamma_n(y; \lambda) = \frac{1}{2\lambda a_n} \left[ \frac{\operatorname{ch} \varphi_n(y-b)}{\varphi_n \operatorname{sh} \varphi_n b} - \frac{\operatorname{ch} \chi_n(y-b)}{\chi_n \operatorname{sh} \chi_n b} \right].$$

Zauważmy, że funkcja (2.12) spełnia nie tylko równanie (2.1) i warunki (2.2) i (2.3), ale również warunek  $\partial G / \partial y = 0$  dla  $y = \pm(2k-1)b$ ,  $k=1, 2, \dots, \infty$ .

Powierzchnię ugięcia  $G$  przedstawić można i w innej postaci, mianowicie za pomocą podwójnych szeregów trygonometrycznych. Postać ta będzie pożyteczna w rozważaniach dotyczących pasma płytoowego na obu brzegach zupełnie utwierdzonego.

Przedstawmy prawą stronę równania (2.1) szeregiem

$$(2.13) \quad \frac{1}{N} \delta(x-\xi) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta(y+2bm) = \\ = \frac{1}{Nab} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \cos \beta_m y \right], \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$

a ugięcie  $G$  szeregiem

$$(2.14) \quad G(x, y; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin a_n x + \sum_{n,m} B_{nm} \sin a_n x \cos \beta_m y.$$

Wstawiając (2.13) i (2.14) do równania (2.1) otrzymamy

$$A_n = \frac{1}{Nab} \frac{\sin a_n \xi}{a_n^2(a_n^2 - \lambda^2)}, \quad B_{nm} = \frac{2}{Nab} \frac{\sin a_n \xi}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - a_n^2 \lambda^2}.$$

Tak więc zgodnie ze wzorem (2.14) mamy

$$(2.15) \quad G(x, y; \xi) = \frac{1}{Nab} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \left[ \frac{1}{a_n^2 (a_n^2 - \lambda^2)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_m y}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - a_n^2 \lambda^2} \right].$$

Znajomość funkcji  $G$  zezwala już na rozwiązanie szeregu bardziej złożonych zadań.

1. Pasma płytowe swobodnie podparte na brzegach  $x=0, a$ , a ponadto punktowo podparte w punktach  $(\xi \pm 2bm)$   $m=0, 1, 2, \dots, \infty$  jest ściskane siłami  $q$  i obciążone w sposób jednostajny obciążeniem  $p$ . Praktyczne zastosowanie tego zadania mamy w przypadku stropu grzybkowego podpartego słupami w jednakowych odległościach  $2b$ .

Oznaczając przez  $X$  nieznaną siłę podporową w punktach  $(\xi, \pm 2bm)$   $m=0, 1, 2, \dots, \infty$  przedstawić możemy ugięcie  $w(x, y)$  płyty wzorem

$$(2.16) \quad w(x, y) = w_0(x) + XG(x, y; \xi) \quad -b \leq y \leq +b.$$

We wzorze tym  $w_0(x)$  oznacza ugięcie pasma płytowego obciążonego siłami  $p$  i  $q$ .

Funkcja  $w_0(x)$  spełnia równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.17) \quad \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{p}{N},$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.18) \quad w_0 = 0, \quad \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \quad \text{dla } x = 0, a.$$

Rozwiązaniem równania (2.17) z warunkami (2.18) jest funkcja

$$(2.19) \quad w_0(x) = \frac{4p}{a} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\sin a_n x}{a_n^3 (a_n^2 - \lambda^2)},$$

lub

$$(2.20) \quad w(x) = \frac{p}{N\lambda^4} \left[ \frac{\cos \lambda \left( \frac{a}{2} - x \right)}{\cos \frac{\lambda a}{2}} - 1 \right] - \frac{p}{2\lambda^2} x(l-x).$$

Wielkość  $X$  wyznaczmy z warunku zerowej wartości ugięcia w punkcie  $(x=\xi, y=0)$

$$(2.21) \quad X = - \frac{w_0(\xi)}{G(\xi, 0; \xi)},$$

gdzie

$$G(\xi, 0; \xi) = \frac{1}{Na\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(0; \lambda) \sin^2 a_n \xi.$$

Powierzchnia  $w(x, y)$  przyjmie zatem postać

$$w(x, y) = w_0(x) - \frac{w_0(\xi)}{G(\xi, 0; \xi)} G(x, y; \xi).$$

2. Wzdłuż prostych  $y = \pm 2bm$ , gdzie  $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , działa obciążenie  $X(\xi)$ , a ponadto pasmo jest poddane działaniu obciążenia  $p = \text{const}$ . Funkcję  $X(\xi)$  dobierzemy w ten sposób, aby na odcinkach  $c_2 - c_1$  w prostych  $y = \pm 2bm$  ugięcie  $w$  było równe zero. Ugięcie  $w$  wyrazimy wzorem

$$(2.22) \quad w(x, y) = w_0(x) + \int_{c_1}^{c_2} X(\xi) G(x, y; \xi) d\xi.$$

Funkcję  $X(\xi)$  wyznaczmy z warunku

$$(2.23) \quad w(x, 0) = w_0(x) + \int_{c_1}^{c_2} X(\xi) G(x, 0; \xi) d\xi = 0, \quad c_1 < x < c_2.$$

Dla wyznaczenia funkcji  $X(\xi)$  należy rozwiązać równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju (2.23). Rozwiązanie tego równania nastrocza znaczne trudności. Trudności te obejdziemy spełniając warunek  $w(x, 0) = 0$  jedynie dla kilku punktów w obrębie odcinków  $c_2 - c_1$ . W przypadku szczególnym, gdy  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = a$ , mamy do czynienia z pasmem płytowym, w którym wzdłuż prostych  $y = \pm 2bm$ ,  $m = 0, 1, \dots, \infty$  spełnione są warunki zupełnego utwierdzenia. Widoczne jest, że rozwiązanie tego przypadku jest identyczne z rozwiązaniem dla płyty prostokątnej, na brzegach  $x = 0, a$  swobodnie podpartej, a na brzegach  $y = 0, 2b$  zupełnie utwierdzonej.

Wstawiając  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = a$  do równania (2.23) oraz wyrażając funkcję  $X(\xi)$  szeregiem trygonometrycznym

$$(2.24) \quad X(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin a_k \xi,$$

i zważywszy na wzór (2.19) uzyskamy

$$(2.25) \quad C_k = - \frac{8Np}{a} \frac{1}{\Gamma_k(0; \lambda) a_k^2 (a_k^2 - \lambda^2)}.$$



Ugięcie płyty określone jest wzorem

$$(2.26) \quad w(x, y) = w_0(x) + \int_0^a X(\xi) G(x, y; \xi) d\xi,$$

albo

$$(2.27) \quad w(x, y) = \frac{4p}{a} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \left( 1 - \frac{\Gamma_n(y; \lambda)}{\Gamma_n(0; \lambda)} \right) \frac{\sin a_n x}{a_n^3 (\alpha_n^2 - \lambda^2)}.$$

3. Pasma płytowe jest równomiernie obciążone siłami  $p$  i ściskane siłami  $q$ . Załóżmy, że w prostych  $y = \pm 2bm$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , umieszczone są żebra o sztywności  $EJ$  w sposób symetryczny w stosunku do środkowej płaszczyzny płyty. Oznaczmy przez  $X(\xi)$  siły wzajemnego oddziaływania płyty i żebra.

Ugięcie w płyty i żebra  $w_R$  określone są wzorami

$$(2.28) \quad w(x, y) = w_0(x) + \int_0^a X(\xi) G(x, y; \xi) d\xi,$$

$$(2.29) \quad w_R(x) = - \int_0^a X(\xi) G_R(x; \xi) d\xi,$$

gdzie  $G_R(x; \xi)$  oznacza ugięcie punktu  $x$  żebra, wywołane działaniem siły jednostkowej działającej w punkcie  $\xi$ . Dla żebra swobodnie podpartego w punktach  $x = 0, a$  jest

$$(2.30) \quad G_R(x; \xi) = \frac{2}{EJa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin a_n x}{a_n^4}.$$

Wyrażając funkcję  $X(\xi)$  szeregiem Fouriera (2.24) i wyrażając  $w_0(x)$  szeregiem (2.19) uzyskamy z warunku wspólnego ugięcia płyty i żebra wzdłuż prostych  $y = \pm 2bm$

$$(2.31) \quad w_0(x) + \int_0^a X(\xi) G(x, 0; \xi) d\xi = - \int_0^a X(\xi) G_R(x; \xi) d\xi$$

następujący wzór na współczynniki  $C_k$  rozwinięcia (2.24)

$$(2.32) \quad C_k = - \frac{8p}{a} \frac{1}{a_k^3 (\alpha_k^2 - \lambda^2)} \frac{1}{\Gamma_k(0; \lambda) + \frac{2N}{EJa_k^4}}.$$

W przypadku szczególnym, gdy  $EJ \rightarrow \infty$ , wzór (2.32) przechodzi we wzór (2.25).

Dotychczas rozpatrywaliśmy przypadki jednoczesnego zginania i ściskania pasma płytowego. Rozważmy teraz kilka przypadków wyboczenia płyt.

4. Pasma płytowe swobodnie podparte na brzegach  $x=0, a$  i dodatkowo punktowo podparte w punktach  $(\xi, \pm 2bm)$ ,  $m=0, 1, 2, \dots, \infty$  jest ściskane siłami  $q$ . W punktach tych powinno być równe zeru nie tylko ugięcie, ale i pochodna  $\partial w / \partial y$ .

Ugięcie płyty wyrażone jest wzorem

$$(2.33) \quad w(x, y) = XG(x, y; \xi),$$

przy czym  $X$  jest tak dobrane, aby

$$(2.34) \quad w(\xi, 0) = XG(\xi, 0; \xi) = 0.$$

Ponieważ  $X \neq 0$ , zatem

$$(2.35) \quad G(\xi, 0; \xi) = 0$$

jest warunkiem wyboczenia płyty. Zgodnie ze wzorem (2.12) wyrazimy warunek (1.35) równaniem

$$(2.36) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{a_n} \left( \frac{\operatorname{ctgh} b \sqrt{a_n^2 - a_n \lambda}}{\sqrt{a_n^2 - a_n \lambda}} - \frac{\operatorname{ctgh} b \sqrt{a_n^2 + a_n \lambda}}{\sqrt{a_n^2 + a_n \lambda}} \right) = 0.$$

Dla ustalonych wielkości  $a, b$  wyznaczamy drogą prób z równania (2.36) najmniejszą wartość  $\lambda_{\min}$ , a tym samym najmniejszą wartość siły krytycznej  $q_{kr} = N \lambda_{\min}^2$ .

Jeśli pasmo płytowe podparte jest wzdłuż prostych  $y = \pm 2bm$ ,  $m=0, 1, 2, \dots, \infty$  na odcinku  $c_2 - c_1$ , to ugięcie płyty wyrazić możemy wzorem

$$(2.37) \quad w(x, y) = \int_{c_1}^{c_2} X(\xi) G(x, y; \xi) d\xi.$$

Warunkiem wyboczenia będzie

$$(3.38) \quad \int_{c_1}^{c_2} X(\xi) G(x, 0; \xi) d\xi = 0.$$

Rezwiązanie tego równania całkowego (w którym występuje nieznana funkcja  $X(\xi)$  i nieznany a poszukiwany parametr  $\lambda$  uzyskać możemy na drodze przybliżonej, zastępując całkę sumą a równanie całkowe układem równań algebraicznych liniowych jednorodnych. Przyrównanie do zera wyznacznika układu tych równań jest wa-

runkiem wyboczenia płyty. Wyznacznik układu równań zawiera parametr  $\lambda$ . Najmniejsza wartość tego parametru określa siłę krytyczną.

W przypadku szczególnym, gdy  $c_1=0$ ,  $c_2=a$  można podać ściśle rozwiązanie równania (2.38). Wyrażając funkcję  $X(\xi)$  szeregiem Fouriera

$$X(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin a_n \xi,$$

i wykonując przepisane całkowanie otrzymamy

$$(2.39) \quad \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Gamma_k(0; \lambda) \sin a_k x = 0.$$

Powyższe równanie powinno być przy  $A_k \neq 0$  spełnione dla każdej wartości  $x$ , a zatem

$$(2.40) \quad \Gamma_k(0; \lambda) = 0 \quad \text{albo} \quad \frac{\operatorname{ctg} b \vartheta_k}{\vartheta_k} + \frac{\operatorname{ctgh} b \chi_n}{\chi_n} = 0,$$

$$\vartheta_n = i \varphi_n = \sqrt{\lambda a_n - a_n^2},$$

jest warunkiem wyboczenia. W równaniu (2.40) wprowadziliśmy wielkość  $\vartheta_n$ , gdyż dla pasma poprzecznie podpartego jest  $\lambda a_n > a_n^2$ , przypadek bowiem  $\lambda = a_n$  odpowiada wyboczeniu pasma ściskanego siłami  $q$ . Wzór (2.40) przedstawia znane równanie przestępne wyboczenia płyty prostokątnej o bokach  $a, 2b$ , na brzegach  $x=0, a$  swobodnie podpartej, a na brzegach  $y=0, 2b$  zupełnie utwierdzonej.

### 3. Jednoczesne zginanie i ściskanie oraz wyboczenie pasma płytowego i płyty prostokątnej na brzegach zupełnie utwierdzonej

Rozpatrzmy najpierw zadanie pomocnicze. Niech pasmo na brzegach  $x=0, a$  zupełnie utwierdzone ściskane będzie siłami  $q = \text{const}$  i obciążone w punktach  $(\xi, \pm 2bm)$ ,  $m=0, 1, 2, \dots, \infty$  siłami  $P=1$  działającymi prostopadle do płaszczyzny środkowej płyty. Powierzchnia ugięcia  $G^*(x, y; \xi)$  tak obciążonego pasma spełnić powinna równanie różniczkowe

$$(3.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 G^* + \lambda^2 \frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} = \frac{1}{N} \delta(x - \xi) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \delta(y + 2bm),$$

z warunkami brzegowymi

$$(3.2) \quad G^* = 0, \quad \frac{\partial G^*}{\partial x} = 0$$

na brzegach  $x=0, a$  oraz

$$(3.3) \quad \frac{\partial G^*}{\partial y} = 0 \text{ wzdłuż prostych } y = \pm 2bm, \quad m=0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Ugięcie  $G^*$  złożymy z dwu części, z ugięcia  $G$  pasma płytowego, na brzegach  $x=0, a$  swobodnie podpartego, oraz z ugięcia  $\bar{G}$  tak dobranego, aby spełnione było równanie

$$(3.4) \quad \nabla^2 \nabla^2 \bar{G} = 0,$$

z warunkami brzegowymi

$$(3.5) \quad \bar{G} = 0, \quad \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x=0, a,$$

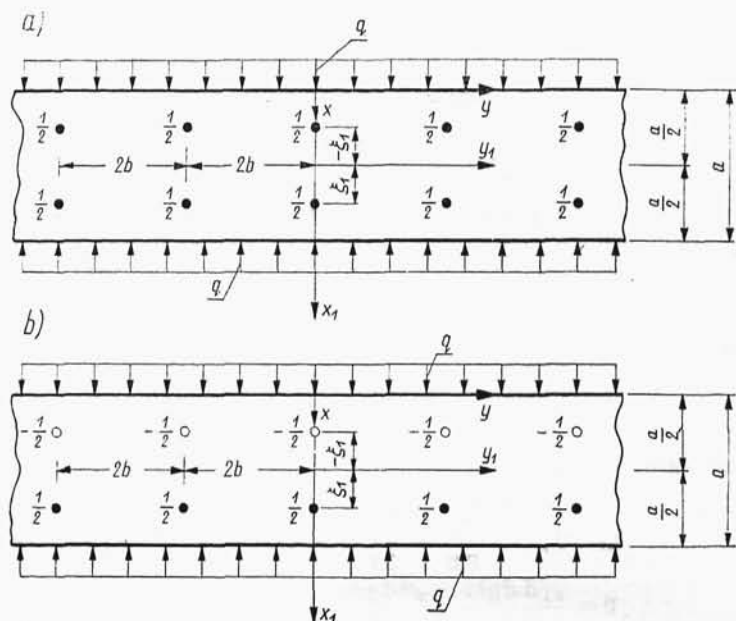
oraz

$$(3.6) \quad \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} = 0 \text{ wzdłuż prostych } y = \pm 2bm, \quad m=0, 1, 2, \dots, \infty.$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie zastąpić układ sił  $P=1$  działających w punktach  $(\xi, \pm 2bm)$  dwoma układami sił o intensywności dwa razy mniejszej, umieszczonych raz symetrycznie, drugi raz antysymetrycznie względem osi  $y_1$  (rys. 2a i 2b).

Oznaczmy przez  $G^{(s)}$  ugięcie płyty wywołane działaniem układu sił symetrycznie ułożonych względem osi  $y_1$ , przez  $G^{(a)}$  ugięcie płyty wywołane działaniem antysymetrycznie względem osi  $y_1$  umieszczonych sił  $P=1/2$ . Ugięcia  $G^{(s)}$  i  $G^{(a)}$  odnoszą się do pasma płytowego swobodnie podpartego na brzegach  $x=0, a$ :

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} G^{(s)}(x_1, y_1; \xi_1) = \frac{1}{2} \left[ G\left(\frac{a}{2} + x_1, y_1; \frac{a}{2} + \xi_1\right) + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + G\left(\frac{a}{2} - x_1, y_1; \frac{a}{2} - \xi_1\right) \right], \\ G^{(a)}(x_1, y_1; \xi_1) = \frac{1}{2} \left[ G\left(\frac{a}{2} + x_1, y_1; \frac{a}{2} + \xi_1\right) - \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - G\left(\frac{a}{2} - x_1, y_1; \frac{a}{2} - \xi_1\right) \right], \end{array} \right.$$



Rys. 2

gdzie funkcja  $G$  określona jest wzorem (2.15) lub (2.12). Zatem

$$(3.8) \quad G^{(s)}(x_1, y_1; \xi_1) = \frac{1}{Nab} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \cos a_n \xi_1 \cos a_n x_1 \left[ \frac{1}{a_n^2(a_n^2 - \lambda^2)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_m y_1}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - a_n^2 \lambda^2} \right],$$

$$(3.9) \quad G^{(a)}(x_1, y_1; \xi_1) = \frac{1}{Nab} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \sin a_n \xi_1 \sin a_n x_1 \left[ \frac{1}{a_n^2(a_n^2 - \lambda^2)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_m y_1}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - a_n^2 \lambda^2} \right]$$

albo

$$(3.10) \quad G^{(s)}(x_1, y_1; \xi_1) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \Gamma_n(y_1; \lambda) \cos a_n \xi_1 \cos a_n x_1,$$

$$(3.11) \quad G^{(a)}(x_1, y_1; \xi_1) = \frac{1}{Na} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \Gamma_n(y_1; \lambda) \sin a_n \xi_1 \sin a_n x_1.$$

Również i funkcję  $\bar{G}$  złożymy z dwu części, z funkcji  $\bar{G}^{(s)}$  symetrycznej względem osi  $y_1$  oraz z drugiej  $\bar{G}^{(a)}$  antysymetrycznej względem osi  $y_1$ .

Funkcję  $G^{(s)}$  przyjmujemy w postaci szeregu

$$(3.12) \quad \bar{G}^{(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m^{(s)} \operatorname{ch} \gamma_m x_1 + B_m^{(s)} \operatorname{ch} \eta_m x_1) \cos \beta_m y_1,$$

$$\gamma_m^2 = \beta_m^2 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \sqrt{1 - \frac{4\beta_m^2}{\lambda^2}},$$

$$\eta_m^2 = \beta_m^2 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \sqrt{1 - \frac{4\beta_m^2}{\lambda^2}}.$$

Funkcja ta spełni pierwszy z warunków (2.5), jeśli przyjąć, że

$$(3.13) \quad B_m^{(s)} = -A_m^{(s)} \frac{\operatorname{ch} \frac{\gamma_m a}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta_m a}{2}}.$$

Z drugiego warunku brzegowego grupy (3.5), wzięwszy pod uwagę postać  $G^{(s)}$  wyrażoną wzorem (3.8), otrzymamy następującą zależność

$$(3.14) \quad \begin{cases} A_m^{(s)} = \frac{1}{Nb} \frac{\varrho_m^{(s)}(\xi_1) \delta_m}{\Delta_m^{(s)} \operatorname{ch} \frac{\gamma_m a}{2}}, \\ \delta_m = \begin{cases} 1 & \text{dla } m = 0 \\ 2 & \text{dla } m = 1, 2, \dots, \infty \end{cases} \end{cases}$$

gdzie

$$\varrho_m^{(s)}(\xi_1) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos a_n \xi_1}{D_{nm}},$$

$$D_n = a_n^2 (a_n^2 - \lambda^2), \quad D_{nm} = (a_n^2 + \beta_m^2)^2 - \lambda^2 a_n^2.$$

Wzięwszy pod uwagę związek (3.13) otrzymamy

$$(3.15) \quad \Delta_m^{(s)} = \frac{\gamma_m a}{2} \operatorname{tgh} \frac{\gamma_m a}{2} - \frac{\eta_m a}{2} \operatorname{tgh} \frac{\eta_m a}{2}.$$

Tym samym określona jest funkcja  $G^{(s)}$ . Ma ona postać

$$(3.16) \quad G^{*(s)}(x_1, y_1; \xi_1) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \cos a_n \xi_1 \cos a_n x_1 \Gamma_n(y_1; \lambda) + \\ + \frac{1}{Nb} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^{(s)}(\xi_1) \delta_m F_m^{(s)}(x_1) \cos \beta_m y_1,$$

gdzie

$$F_m(x_1) = \frac{1}{\Delta_m^{(s)}} \left( \frac{\operatorname{ch} \gamma_m x_1}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_m a}{2}} - \frac{\operatorname{ch} \eta_m x_1}{\operatorname{ch} \frac{\eta_m a}{2}} \right).$$

Dla antysymetrycznie względem osi  $y_1$  umieszczonych sił (rys. 2b) przyjmiemy funkcję  $\bar{G}^{(a)}$  w postaci

$$(3.17) \quad \bar{G}^{(a)}(x_1, y_1; \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^{(a)} \operatorname{sh} \gamma_m x_1 + B_m^{(a)} \operatorname{sh} \eta_m x_1) \cos \beta_m y_1.$$

Wykorzystując warunki brzegowe (3.5) uzyskamy

$$A_m^{(a)} = \frac{1}{Nb} \frac{\varrho_m^{(a)}(\xi_1) \delta_m}{\Delta_m^{(a)} \operatorname{sh} \frac{\gamma_m a}{2}}, \quad B_m^{(a)} = -A_m^{(a)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_m a}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\eta_m a}{2}},$$

gdzie

$$(3.18) \quad \varrho_m^{(a)}(\xi_1) = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a_n \sin a_n \xi_1 \cos \frac{n\pi}{2}}{(\beta_m^2 + a_n^2)^2 - a_n^2 \lambda^2},$$

$$\Delta_m^{(a)} = \frac{\gamma_m a}{2} \operatorname{ctgh} \frac{\gamma_m a}{2} - \frac{\eta_m a}{2} \operatorname{ctgh} \frac{\eta_m a}{2}.$$

Zatem

$$(3.19) \quad G^{*(a)}(x_1, y_1; \xi_1) = \frac{1}{Na} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \sin a_n \xi_1 \sin a_n x_1 \Gamma_n(y_1; \lambda) + \\ + \frac{1}{Nb} \sum_{m=0}^{\infty} \varrho_m^{(a)}(\xi_1) \delta_m F_m^{(a)}(x_1) \cos \beta_m y_1,$$

gdzie

$$F_m^{(a)}(x_1) = \frac{1}{\Delta_m^{(a)}} \left( \frac{\operatorname{sh} \gamma_m x_1}{\operatorname{sh} \frac{\gamma_m a}{2}} - \frac{\operatorname{sh} \eta_m x_1}{\operatorname{sh} \frac{\eta_m a}{2}} \right).$$

Funkcję  $G^*$  przedstawiającą ugięcie pasma na brzegu swym zupełnie utwierdzonego i obciążonego siłami  $P=1$  w punktach  $(\xi_1, \pm 2bm)$ ,  $m=0, 1, 2, \dots, \infty$ , uzyskamy dodając do siebie funkcję  $G^{*(s)}$  i  $G^{*(a)}$ .

Znając funkcję  $G^*$  rozwiązać możemy szereg zagadnień o znaczeniu praktycznym.

1. Pasma płytowe na brzegach  $x=\pm a/2$  zupełnie utwierdzone poddane jest działaniu sił ściskających  $q=\text{const}$ , obciążeń  $p=\text{const}$  działających prostopadle do płaszczyzny płyty oraz sił  $X$  działających w punktach  $(\xi=0, \pm 2bm)$   $m=0, 1, 2, \dots, \infty$ . Założmy, że ugięcia punktów przyłożenia sił  $X$  będą równe zeru. W rozpatrywanym przypadku mamy do czynienia z symetryczną względem osi  $y_1$  powierzchnią ugięcia płyty. Ugięcie  $w^{(s)}(x_1, y_1)$  wyrazimy wzorem

$$(3.20) \quad w^{(s)}(x_1, y_1) = w_0^{(s)}(x_1) + XG^{*(s)}(x_1, y_1; 0).$$

Funkcja  $w_0^{(s)}(x_1)$  przedstawia ugięcie pasma obustronnie zupełnie utwierdzonego, poddanego działaniu sił  $p$  i  $q$ . Funkcja

$$(3.21) \quad w_0^{(s)}(x_1) = \frac{4p}{Na} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos a_n x_1}{a_n^3 (a_n^2 - \lambda^2)} (1 - \kappa a_n^2), \quad \kappa = \frac{\sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_r^2 (a_r^2 - \lambda^2)}}{\sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{a_r^2 - \lambda^2}},$$

albo

$$(3.22) \quad w_0^{(s)}(x_1) = \frac{p}{N\lambda^2} \left( x_1^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\cos \lambda x_1 - \cos \lambda \frac{a}{2}}{\cos \lambda \frac{a}{2}} \right) + \frac{M}{N\lambda^2} \left( \frac{\cos \lambda x_1}{\cos \lambda \frac{a}{2}} - 1 \right);$$

$$M = \frac{pa}{\lambda} \left( 1 - \frac{\text{tg} \frac{\lambda a}{2}}{\frac{\lambda a}{2}} \right) \text{ctg} \frac{\lambda a}{2}$$

jest rozwiązaniem równania

$$(3.23) \quad \frac{d^4 w_0^{(s)}}{dx_1^4} + \lambda^2 \frac{d^2 w_0^{(s)}}{dx_1^2} = \frac{p}{N}$$

z warunkami brzegowymi

$$(3.24) \quad w_0^{(s)} = 0, \quad \frac{dw_0^{(s)}}{dx_1} = 0 \quad \text{dla } x_1 = \pm a/2.$$



Wielkość siły  $X$  znajdziemy z warunku  $w^{(s)}(0, 0) = 0$ ,

skąd

$$(3.25) \quad X = - \frac{w_0^{(s)}(0)}{G^{*(s)}(0, 0; 0)},$$

gdzie

$$(3.26) \quad G^{*(s)}(0, 0; 0) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \Gamma_n(0; \lambda) + \frac{1}{Nb} \sum_{m=0}^{\infty} q_m^{(s)}(0) \delta_m F_m^{(s)}(0).$$

W przypadku szczególnym  $p=0$  mamy do czynienia z wyboczeniem pasma płytowego zupełnie utwierdzonego na brzegach  $x_1 = \pm a/2$  i podpartego dodatkowo w punktach  $(0, \pm 2bm)$   $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Warunkiem wyboczenia jest tu (przy  $X \neq 0$ ) przyrównanie funkcji  $G^{*(s)}(0, 0; 0)$  do zera.

Dla ustalonych wartości  $b/a$  możemy zastosowawszy drogę prób uzyskać najmniejszą wartość  $\lambda$ , a tym samym najmniejszą wartość siły krytycznej. Uzyskana wartość  $q_{kr}$  będzie identyczna z wartością siły krytycznej płyty prostokątnej o bokach  $a$  i  $2b$ , w której warunek  $\partial w / \partial n = 0$  spełniony jest na całym obwodzie, a warunek  $w = 0$  spełniony jest na brzegach  $x_1 = \pm a/2$  oraz w punktach  $(0, 0)$  i  $(0, 2b)$ . Jeśli na prostych  $y_1 = \pm 2bm$  ( $m = 0, 1, \dots, \infty$ ) damy  $r$  rzędów sił  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), to ugięcie płyty wyrazi się wzorem

$$(3.27) \quad w(x_1, y_1) = \sum_{i=1}^r X_i G^*(x_1, y_1; \xi_1^{(i)}).$$

Żądając, aby ugięcie w punktach przyłożenia sił było równe zeru, otrzymamy układ równań

$$(3.28) \quad w(\xi_1^{(j)}, 0) = \sum_{i=1}^r X_i G^*(\xi_1^{(j)}, 0; \xi_1^{(i)}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (2.28)

$$(3.29) \quad \| G^*(\xi_1^{(j)}, 0; \xi_1^{(i)}) \| = 0$$

jest warunkiem wyboczenia płyty.

Duże udogodnienie otrzymamy, umieszczając siły  $X_i$  symetrycznie względem osi  $y_1$ . I tak dla czterech sił umieszczonych w punktach  $(-\frac{3}{10}a, 0), (-\frac{1}{10}a, 0), (\frac{1}{10}a, 0), (\frac{3}{10}a, 0)$  otrzymamy układ dwu równań typu (3.28).

2. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia jednoczesnego zginania i ściskania oraz wyboczenia płyty prostokątnej na brzegach swych całkowicie utwierdzonej uzyskamy jako graniczny przypadek poprzednio rozważanego zagadnienia. Zamiast sił skupionych przyjmujemy obciążenie ciągle  $X(\xi_1)$ . Ponieważ ugięcie płyty będzie symetryczne względem osi  $y_1$ , zatem

$$(3.30) \quad w(x_1, y_1) = w_0^{(s)}(x_1) + 2 \int_0^{a/2} X(\xi_1) G^{*(s)}(x_1, y_1; \xi) d\xi_1.$$

Nieznana funkcję  $X(\xi_1)$  uzyskamy z warunku zerowej wartości ugięcia wzdłuż prostych  $y_1 = \pm 2bm$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Warunek ten ma postać

$$(3.31) \quad 0 = w_0^{(s)}(x_1) + 2 \int_0^{a/2} X(\xi_1) G^{*(s)}(x_1, 0; \xi_1) d\xi_1.$$

Tutaj

$$(3.32) \quad G^{*(s)}(x_1, 0; \xi_1) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \cos a_n \xi_1 \cos a_n x_1 \Gamma_n(0; \lambda) + \\ + \frac{1}{Nb} \sum_{m=0}^{\infty} \varrho_m^{(s)}(\xi_1) \delta_m F_m^{(s)}(x_1).$$

Rozłożmy funkcję  $F_m^{(s)}(x_1)$  na szereg Fouriera względem funkcji  $\cos a_n x_1$

$$(3.33) \quad F_m^{(s)}(x_1) = \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} L_{mj}^{(s)} \cos a_j x_1.$$

Zważywszy, że

$$(3.34) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} \gamma_m x_1 = \frac{4}{a} \operatorname{ch} \frac{\gamma_m a}{2} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_j (-1)^{\frac{j-1}{2}}}{a_j^2 + \gamma_m^2} \cos a_j x_1, \\ \operatorname{ch} \eta_m x_1 = \frac{4}{a} \operatorname{ch} \frac{\eta_m a}{2} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_j (-1)^{\frac{j-1}{2}}}{a_j^2 + \eta_m^2} \cos a_j x_1, \end{cases}$$

stwierdzimy, że

$$(3.35) \quad L_{mj}^{(s)} = \frac{4}{a \Delta_j^{(s)}} a_j (-1)^{\frac{j-1}{2}} \left( \frac{1}{a_j^2 + \gamma_m^2} - \frac{1}{a_j^2 + \eta_m^2} \right).$$

Wstawiając (3.35) do (3.33) a tę ostatnią funkcję do równania (3.32) uzyskamy po przegrupowaniu sum następującą postać funkcji  $G^{*(s)}$

$$(3.36) \quad G^{*(s)}(x_1, 0; \xi_1) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \Gamma_n(0; \lambda) \cos a_n \xi_1 + \right. \\ \left. + \frac{a}{b} \sum_{m=0}^{\infty} L_{nm}^{(s)} \delta_m \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} H_{jm}^{(s)} \cos a_j \xi_1 \right\} \cos a_n x_1,$$

gdzie

$$H_{jm}^{(s)} = \frac{\alpha_j (-1)^{\frac{j-1}{2}}}{D_{jm}}, \quad D_{jm} = (a_j^2 + \beta_m^2)^2 - a_j^2 \lambda^2.$$

Wyrażmy dalej funkcję  $X(\xi_1)$  szeregiem trygonometrycznym

$$(3.37) \quad X(\xi_1) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k^{(s)} \cos a_k \xi_1$$

i wstawmy ją do równania (3.31). Po wykonaniu przepisanych całkowań otrzymamy

$$(3.38) \quad w_0^{(s)}(x_1) + \frac{1}{Na} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \Gamma_n(0; \lambda) S_n^{(s)} + \right. \\ \left. + \frac{a}{b} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} S_j^{(s)} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m H_{jm}^{(s)} L_{nm}^{(s)} \right\} \cos a_n x_1 = 0.$$

Zważywszy, że i funkcja  $w_0^{(s)}(x_1)$  daje się przedstawić pojedynczym szeregiem trygonometrycznym [por. wzór (2.21)]

$$(3.39) \quad w_0^{(s)}(x_1) = \frac{4p}{Na} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} M_n \cos a_n x_1,$$

gdzie

$$M_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \kappa a_n^2}{a_n^3 (a_n^2 - \lambda^2)},$$

uzyskamy z równania (3.38) nieskończony układ równań dla wyznaczenia współczynników  $S_n$ . Ma on postać

$$(3.40) \quad S_n^{(s)} \Gamma_n(0; \lambda) + \frac{a}{b} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} S_j^{(s)} \sum_{m=0,1,2,\dots}^{\infty} \delta_m H_{jm}^{(s)} L_{nm}^{(s)} + \frac{4p}{a} M_n = 0 \\ (n = 1, 3, \dots, \infty).$$

Powyższy układ rozwiązać można w sposób przybliżony biorąc pod uwagę tylko kilka pierwszych wyrazów. Po wyznaczeniu współczynników  $S_1^{(s)}, S_3^{(s)}, \dots$  uzyskamy ze wzoru (3.37) przybliżoną postać funkcji  $X(\xi_1)$ , a ze związku (3.30) ugięcie płyty.

Jeśli w równaniu (3.40) przyjąć  $p=0$ , to mamy do czynienia z wyboczeniem płyty prostokątnej o bokach  $a, 2b$  na swych brzegach zupełnie utwardzonej. Warunkiem wyboczenia jest przyrównanie do zera wyznacznika układu równań

$$(3.41) \quad S_n^{(s)} \Gamma_n(0; \lambda) + \frac{a}{b} \sum_{j=1,3,\dots} S_j^{(s)} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m H_{jm}^{(s)} L_{mn}^{(s)} = 0, \\ (n=1, 3, \dots, \infty).$$

Układ równań (3.40) odznacza się znacznie szybszą zbieżnością niż w innych metodach wyznaczenia sił krytycznych w płycie prostokątnej na obwodzie zupełnie utwardzonej. Ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia prowadziło i u innych autorów, [5], [6], do nieskończonego układu równań. Współczynniki jednak występujące przy niewiadomych układu równań (niewiadome te reprezentowały inne wielkości statyczne — mianowicie momenty utwardzenia płyty, a nie jak tu reakcje) charakteryzowały się znacznie mniejszą zbieżnością.

Dla wyznaczenia wartości  $\lambda_{\min}$  z układu równań (3.40) ograniczymy się do wyznacznika drugiego a najwyżej trzeciego stopnia, uwzględniając układ dwu względnie trzech równań zamiast nieskończonego układu równań.

Przedstawione wyżej rozwiązanie odnosi się do symetrycznej względem osi  $y_1$  postaci wyboczenia płyty. Rozważyć należy jeszcze antysymetryczną postać wyboczenia względem tej prostej. Warunek wyboczenia przyjmie tu postać

$$\int_0^{a/2} X(\xi_1) G^{*(a)}(x_1, 0; \xi_1) d\xi_1 = 0,$$

gdzie

$$(3.42) \quad G^{*(a)}(x_1, 0; \xi_1) = \frac{1}{Na} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \Gamma_n(0; \lambda) \sin a_n \xi_1 \sin a_n x_1 + \\ + \frac{2}{Nb} \sum_{m=0}^{\infty} \varrho_m^{(a)}(\xi_1) \delta_m F_m^{(a)}(x_1) \cos \beta_m y_1.$$

Rozłóżmy funkcję  $F_m^{(a)}(x_1)$  na szereg Fouriera funkcji  $\sin a_n x_1$ . Zważywszy, że

$$(3.43) \quad \begin{aligned} \operatorname{sh} \gamma_m x_1 &= \frac{4}{a} \operatorname{sh} \frac{\gamma_m a}{2} \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{j-2}{2}} a_j}{a_j^2 + \eta_m^2} \sin a_j x_1, \\ \operatorname{sh} \eta_m x_1 &= \frac{4}{a} \operatorname{sh} \frac{\eta_m a}{2} \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{j-2}{2}} a_j}{a_j^2 + \eta_m^2} \sin a_j x_1, \end{aligned}$$

stwierdzimy, że

$$(3.44) \quad F_m^{(a)}(x_1) = \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} L_{mj}^{(a)} \sin a_j x_1,$$

gdzie

$$L_{mj}^{(a)} = \frac{4}{a \Delta_m^{(a)}} (-1)^{\frac{j-2}{2}} a_j \left( \frac{1}{a_j^2 + \gamma_m^2} - \frac{1}{a_j^2 + \eta_m^2} \right) \quad (j=2, 4, \dots, \infty).$$

Wstawiając (3.44) do (3.42) i przegrupowując sumy w drugim wyrazie funkcji  $G^{*(a)}$  otrzymamy

$$(3.45) \quad \begin{aligned} G^{*(a)}(x_1, 0; \xi_1) &= \frac{1}{Na} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \Gamma_n(0; \lambda) \sin a_n \xi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{b} \sum_{m=0}^{\infty} L_{nm}^{(a)} \delta_m \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} H_{jm}^{(a)} \sin a_j \xi_1 \right\} \sin a_n x_1, \end{aligned}$$

gdzie

$$H_{jm}^{(a)} = \frac{a_j (-1)^{\frac{j-2}{2}}}{D_{jm}}, \quad D_{jm} = (a_j^2 + \beta_m^2)^2 - a_j^2 \lambda^2.$$

Wyrażając funkcję  $X(\xi_1)$  szeregiem

$$(3.46) \quad X(\xi_1) = \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} S_k^{(a)} \sin a_k \xi_1,$$

wstawiając ją do równania (3.41) i wykonując przepisane całkowanie uzyskamy

$$(3.47) \quad \begin{aligned} S_n^{(a)} \Gamma_n(0; \lambda) + \frac{a}{b} \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} S_j^{(a)} \sum_{m=0}^{\infty} H_{jm}^{(a)} \delta_m L_{nm}^{(a)} &= 0, \\ (n=2, 4, \dots, \infty). \end{aligned}$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (3.47) stanowi kryterium wyboczenia płyty przy założeniu antysymetrycznej względem osi  $y_1$  postaci wyboczenia.

Przedstawiony tu sposób rozwiązania rozszerzyć można i na przypadek ściskania płyty siłami  $q_1$  w kierunku osi  $x$  i siłami  $q_2$  w kierunku osi  $y$ .

Równanie powierzchni odkształcenia płyty ma wtedy postać:

$$(3.48) \quad \nabla^2 \nabla^2 w + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{p}{N}, \quad \lambda_1^2 = \frac{q_1}{N}, \quad \lambda_2^2 = \frac{q_2}{N}.$$

W tym przypadku funkcja  $G(x, y; \xi)$  odpowiadająca funkcji (2.12) ma postać

$$(3.49) \quad G(x, y; \xi) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Gamma}_n(y; \lambda) \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

gdzie

$$\bar{\Gamma}_n(y; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2(\lambda_2^2 - 4a_n^2) + 4a_n^2\lambda_1^2}} \left[ \frac{\operatorname{ch} \bar{\varphi}_n(y-b)}{\bar{\varphi}_n \operatorname{sh} \bar{\varphi}_n b} - \frac{\operatorname{ch} \bar{\chi}_n(y-b)}{\bar{\chi}_n \operatorname{sh} \bar{\chi}_n b} \right].$$

Tutaj oznaczają

$$(3.50) \quad \bar{\varphi}_n = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 2a_n^2 - \lambda_2^2 - \sqrt{\lambda_2^2(\lambda_2^2 - 4a_n^2) + 4a_n^2\lambda_1^2} \right]},$$

$$\bar{\chi}_n = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 2a_n^2 - \lambda_2^2 + \sqrt{\lambda_2^2(\lambda_2^2 - 4a_n^2) + 4a_n^2\lambda_1^2} \right]}.$$

Jeśli funkcję  $G$  wyrazić podwójnym szeregiem trygonometrycznym, to

$$(3.51) \quad G(x_1, y_1; \xi_1) = \frac{1}{Nab} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \left[ \frac{1}{a_n^2(a_n^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_m y}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - \lambda_1^2 a_n^2 - \lambda_2^2 \beta_m^2} \right].$$

Wystarczy zatem we wszystkich uprzednio wyprowadzonych wzorach wstawić zamiast funkcji  $\Gamma$  funkcje  $\bar{\Gamma}$ , a zamiast  $D_{nm}$  wielkość  $\bar{D}_{nm} = (a_n^2 + \beta_m^2)^2 - \lambda_1^2 a_n^2 - \lambda_2^2 \beta_m^2$ .

Dalej przyjmujemy

$$\bar{G}^{(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m^{(s)} \operatorname{ch} \bar{\gamma}_m x_1 + B_m^{(s)} \operatorname{ch} \bar{\eta}_m x_1) \cos \beta_m y_1$$

$$\bar{G}^{(a)} = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m^{(a)} \operatorname{sh} \bar{\gamma}_m x_1 + B_m^{(a)} \operatorname{sh} \bar{\eta}_m x_1) \cos \beta_m y_1$$

gdzie

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_m &= \sqrt{\beta_m^2 - \frac{\lambda_1^2}{2}} + \sqrt{\lambda_1^2 \left( \frac{\lambda_1^2}{4} - \beta_m^2 \right) + \lambda_2^2 \beta_m^2}, \\ \bar{v}_m &= \sqrt{\beta_m^2 - \frac{\lambda_1^2}{2}} - \sqrt{\lambda_1^2 \left( \frac{\lambda_1^2}{4} - \beta_m^2 \right) + \lambda_2^2 \beta_m^2}.\end{aligned}$$

#### 4. Drgania swobodne i wymuszone pasma płytowego i płyty prostokątnej

Powierzchnia ugięcia płyty wykonywującej drgania wymuszone harmonicznym powinna spełnić równanie

$$(4.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = \bar{p}.$$

Tutaj  $\bar{p}(x, y, t) = e^{i\omega t} p(x, y)$ ,  $\bar{w}(x, y, t) = e^{i\omega t} w(x, y)$ , gdzie  $\omega$  jest częstotliwością drgań wymuszonych,  $t$  czasem, a  $\mu$  masą odniesioną do jednostki powierzchni środkowej płyty.

Równanie amplitud ugięcia płyty przyjmie zatem postać

$$(4.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 w - \varrho^2 w = p/N, \quad \varrho^2 = \mu \omega^2 / N.$$

Wyznamy powierzchnię ugięcia wywołaną w pasmie płytowym na brzegach swobodnie podpartym działaniem sił jednostkowych  $P = 1 \cdot e^{i\omega t}$  umieszczonych w punktach  $(\xi_1 \pm 2bm)$   $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Powierzchnię tę oznaczmy przez  $\bar{G}(x, y, t) = e^{i\omega t} G(x, y)$ .

Funkcja  $G(x, y; \xi)$  spełnić powinna równanie [por. wzór (2.8)]

$$(4.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 G - \varrho^2 G = \frac{1}{N} \delta(x - \xi) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta(y + 2bm),$$

z warunkami (2.2) i (2.3). Postępując analogicznie jak w p. 2 stwierdzimy, że

$$\begin{aligned}(4.4) \quad G_0(x, y; \xi) &= \frac{2}{Na\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y d\beta}{(a_n^2 + \beta^2)^2 - \varrho^2} = \\ &= \frac{1}{2Na\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \left( \frac{e^{-\vartheta_n y}}{\vartheta_n} - \frac{e^{-\tau_n y}}{\tau_n} \right), \quad y > 0,\end{aligned}$$

gdzie

$$\vartheta_n = \sqrt{a_n^2 - \varrho}, \quad \tau_n = \sqrt{a_n^2 + \varrho}.$$

Funkcja  $G$  przyjmie zatem postać

$$(4.5) \quad G(x, y; \xi) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(y; \varrho) \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

gdzie

$$(4.6) \quad \Gamma_n(y; \varrho) = \frac{1}{2\varrho} \left( \frac{\operatorname{ch} \vartheta_n(b-y)}{\vartheta_n \operatorname{sh} \vartheta_n b} - \frac{\operatorname{ch} \tau_n(y-b)}{\tau_n \operatorname{sh} \tau_n b} \right).$$

Funkcję  $G$  wyrazić można również podwójnym szeregiem trygonometrycznym

$$(4.7) \quad G(x, y; \xi) = \frac{1}{Nab} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \left[ \frac{1}{a_n^4 - \varrho^2} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_m y}{(\vartheta_n^2 + \beta_m^2)^2 - \varrho^2} \right].$$

Rozpatrzmy kilka prostych zadań.

1. Pasma płytowe na brzegach swych swobodnie podparte poddane jest działaniu obciążenia  $\bar{p} = e^{i\omega t} p$  ( $p = \text{const}$ ) oraz sił  $Xe^{i\omega t}$  zaczepionych w punktach  $(\xi, \pm 2bm)$   $m=0, 1, \dots, \infty$ . Żądamy, aby ugięcie płyty w punktach przyłożenia sił  $X$  było równe zero. Amplituda ugięcia płyty dana jest wzorem

$$(4.8) \quad w(x, y) = w_0(x) + X G(x, y; \xi), \quad w_0(x) = \frac{4p}{aN} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n x}{a_n^4 - \varrho^2}.$$

Wielkość siły  $X$  wyznaczymy z warunku

$$(4.9) \quad X = - \frac{w_0(\xi)}{G(\xi, 0; \xi)},$$

gdzie

$$G(\xi, 0; \xi) = \frac{1}{Na} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(0; \varrho) \sin^2 a_n \xi.$$

2. Pasma płytowe jest równomiernie obciążone siłami  $\bar{p} = e^{i\omega t} p$  i podparte żebrami o sztywności  $EJ$  wzdłuż prostych  $y = \pm 2bm$ ,  $m=0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Amplitudy ugięcia płyty  $w$  i żebra  $\omega_R$  wyrazimy wzorami

$$(4.10) \quad w(x, y) = w_0(x) + \int_0^a X(\xi) G(x, y; \xi) d\xi,$$

$$(4.11) \quad w_R(x) = - \int_0^a X(\xi) G_R(x; \xi) d\xi,$$



gdzie

$$G_R(x; \xi) = \frac{2}{EJa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x}{\alpha_n^4 - \varrho_1^2}, \quad \varrho_1^2 = \frac{\mu_1 \omega^2}{EJ}.$$

Funkcja  $X(\xi)$  jest pionową siłą wzajemnego oddziaływania żebra i płyty, rozłożoną w sposób ciągły wzdłuż prostych  $y = \pm 2bm$ . Funkcję  $X(\xi)$  uzyskamy z warunku wspólności ugięcia płyty i żebra

$$(4.12) \quad w_0(x) + \int_0^a X(\xi) [G(x, 0; \xi) + G_R(x; \xi)] d\xi = 0.$$

Wyrażając siłę  $X(\xi)$  szeregiem  $X(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin \alpha_j \xi$ , otrzymamy z równania (4.12)

$$(4.13) \quad C_j = -\frac{16p}{a} \frac{1}{\alpha_j^4 - \varrho^2} \frac{1}{\Gamma_j(0; \varrho) + \frac{4N}{EJ} \frac{1}{\alpha_j^4 - \varrho_1^2}} \quad (j=1, 3, \dots, \infty).$$

3. Rozpatrzmy przypadek drgań własnych pasma płytowego na brzegach  $x=0$ ,  $a$  swobodnie podpartego, a ponadto punktowo podpartego w punktach  $(\xi, \pm 2bm)$   $m=0, 1, \dots, \infty$ .

Warunek drgań swobodnych przyjmie tu postać

$$(4.14) \quad XG(\xi, 0; \xi) = 0, \quad X \neq 0,$$

albo

$$(4.15) \quad \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sin^2 \alpha_n \xi \left[ \frac{\operatorname{ctgh} b \sqrt{\alpha_n^2 - \varrho}}{\sqrt{\alpha_n^2 - \varrho}} - \frac{\operatorname{ctgh} b \sqrt{\alpha_n^2 + \varrho}}{\sqrt{\alpha_n^2 + \varrho}} \right] = 0.$$

Dla ustalonych wielkości  $a$  i  $b$  wyznaczmy z równania (4.15) kolejne wartości pierwiastków  $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ . Każdej wartości  $\varrho_i$  odpowiada częstotliwość drgań  $\omega_i = \sqrt{\varrho_i N / \mu}$ . Najmniejszy pierwiastek daje podstawową częstotliwość drgań własnych. Zauważmy, że dla każdej uzyskanej z równania (3.15) postaci drgań jest  $\partial w / \partial y = 0$  dla  $y = \pm 2bm$ ,  $m=0, 1, 2, \dots, \infty$ .

4. Nader prosto kształtuje się wyznaczenie drgań własnych pasma płytowego wzmocnionego żebrami. Warunek wyboczenia pasma otrzymamy wówczas z równania (4.12) wstawiając tam  $w_0=0$  ( $p=0$ ). Wartości  $\varrho$  wyznaczmy ze związku

$$(4.16) \quad \Gamma_j(0; \varrho) + \frac{4N}{EJ} \frac{1}{\alpha_j^4 - \varrho^2} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, \infty).$$

I tu postać drgań spełnia warunek  $\partial w / \partial y = 0$  dla  $y = \pm 2bm$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Dla  $EJ \rightarrow \infty$  otrzymamy z równania (4.16) częstotliwości drgań własnych płyty prostokątnej o bokach  $a, 2b$  na brzegach  $x=0, a$  swobodnie podpartej, na brzegach  $y=0, 2b$  utwierdzonej zupełnie. Kolejne częstotliwości drgań odnoszą się jednak tylko do symetrycznej względem prostej  $y=b$  postaci drgań.

5. O wiele większe trudności nastręcza wyznaczenie częstotliwości drgań własnych płyty prostokątnej na wszystkich brzegach zupełnie utwierdzonej. Wykorzystać możemy jednak wyniki uzyskane dla zagadnienia wyboczenia płyty prostokątnej [wzór (3.40)].

Wystarczy w tym równaniu wstawić zamiast  $\lambda^2 a_n^2$  wielkość  $\varrho^2$ . Dla wyznaczenia kolejnych częstotliwości drgań przy symetrycznej postaci drgań mamy do dyspozycji nieskończony układ równań

$$(4.17) \quad S_n^{(s)} \Gamma_n(0; \varrho) + \frac{a}{b} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} S_j^{(s)} \sum_{m=0}^{\infty} H_{jm}^{(s)} \delta_m L_{mn}^{*(s)} = 0,$$

$$(n=1, 3, 5, \dots, \infty).$$

We wzorze tym funkcja  $\Gamma_n(0; \varrho)$  określona jest wzorem (4.6),

$$D_n^* = a_n^4 - \varrho^2, \quad H_{jm}^* = \frac{a_j (-1)^{\frac{j-1}{2}}}{D_{jm}^*}, \quad D_{jm}^* = (a_j^2 + \beta_m^2)^2 - \varrho^2,$$

$$L_{mn}^{*(s)} = \frac{4}{a \Delta_m^{*(s)}} a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{1}{a_n^2 + \delta_m^2} - \frac{1}{a_n^2 + \nu_m^2} \right),$$

$$\Delta_m^{*(s)} = \frac{\delta_m a}{2} \operatorname{ctgh} \frac{\delta_m a}{2} - \frac{\nu_m a}{2} \operatorname{ctgh} \frac{\nu_m a}{2},$$

$$\delta_m = \sqrt{\beta_m^2 - \varrho}, \quad \nu_m = \sqrt{\beta_m^2 + \varrho}.$$

Przyrównanie wyznacznika układu równań (4.17) do zera jest warunkiem wyboczenia płyty. Układ równań (4.17) cechuje się znacznie większą zbieżnością niż w metodzie S. I g u c h i e g o, [7], w której spełniono najpierw w sposób ścisły warunek na brzegu, a dalej warunek  $\partial w / \partial n = 0$ , pracowano zatem na układzie podstawowym przedstawiającym płytę na całym swym obwodzie swobodnie podpartą.

W metodzie przedstawionej w niniejszej pracy wystarczy przyrównanie do zera wyznacznika niższego rzędu, aby otrzymać te same wyniki co w metodach innych autorów.

Zauważmy wreszcie, że stosując przedstawioną metodę można uzyskać rozwiązanie dla płyty prostokątnej na brzegach  $y=0, 2b$ ,  $x=a$  zupełnie utwierdzonej, a na brzegu  $x=0$  swobodnie podpartej. W tym przypadku funkcja  $\bar{G}$  spełnić powinna równanie (3.4) z warunkami brzegowymi

$$(4.18) \quad \begin{cases} \bar{G}=0 & \text{dla } x=0, a, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\bar{G}+G)=0 & \text{dla } x=a \end{cases}$$

oraz

$$\nabla^2 \bar{G}=0 \text{ dla } x=0, \frac{\partial \bar{G}}{\partial y}=0 \text{ dla } y=\pm 2bm (m=0, 1, \dots, \infty),$$

przy czym

$$\bar{G} = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \operatorname{ch} \delta_m x + B_m \operatorname{sh} \delta_m x + C_n \operatorname{ch} \nu_m x + D_n \operatorname{sh} \nu_m x) \cos \beta_m y.$$

Nie ma też żadnych przeszkód, aby przedstawioną tu metodę rozszerzyć na przypadek drgań wymuszonych czy też drgań własnych pasma i płyty prostokątnej, ściskanych dwukierunkowo siłami  $q_1$  i  $q_2$ .

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Ritz, *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations Probleme der mathematischen Physik*, J. reine angew. Math., **135**, 1911.
- [2] В. Г. Галеркин, *Упругие тонкие плиты*, Moskwa 1933.
- [3] S. Timoshenko, *Theory of elastic stability*, New York 1936.
- [4] K. Sezawa, *Das Ausknicken von allseitig befestigten und gedrückten rechteckigen Platten*, Z. A. M. M., **4**, **12**, 1932.
- [5] G. J. Taylor, *The buckling load for a rectangular plate with four clamped edges*, Z. A. M. M., **2**, **13**, 1933.
- [6] G. H. Faxen, *Die Knickfestigkeit rechteckiger Platten*, Z. A. M. M., 1935.
- [7] S. Iguchi, *Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte*, Ing. Arch., **8**, 1937.
- [8] W. Nowacki, *Z zagadnień stateczności powłoki walcowej*, Arch. Mech. Stos., **8**, 1956.
- [9] M. T. Huber, *Teoria płyt*, Lwów 1921.
- [10] Г. А. Гринберг, Я. Ц. Уфлянд, *Об изгибе прямоугольной пластинки с закрепленным контуром под действием произвольной нагрузки*, Прикл. Мат. Мех., **13**, 1949.
- [11] W. Nowacki, *Researches on elastic-thin plates and shells*, Pe-kin 1956.

## Резюме

ВОПРОСЫ ОДНОВРЕМЕННОГО ИЗГИБА И СЖАТИЯ, УСТОЙЧИВОСТИ  
И КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЧАТОЙ ПОЛОСЫ  
И ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

В работе дается метод определения прогибов пластинчатой полосы и прямоугольной пластинки жестко защемленной по всему краю, нагруженной в плоскости пластинки силами  $q$  и перпендикулярно к плоскости статической нагрузкой  $p$  или нагрузкой  $p e^{i\omega t}$  периодически изменяющейся во времени.

В качестве основной системы принимаем пластинчатую полосу, свободно опертую по краям, которая наряду с силами  $p$  и  $q$  находится под действием неизвестных сил  $X$ , приложенных вдоль полосы в одинаковых интервалах  $2b$ .

Суммируя поверхность прогиба полосы с добавочной поверхностью прогиба, преобразовываем свободно опертую полосу в жестко защемленную по краям  $x=0, a$ .

Принимая, что точки приложения сил  $X$  не подвергаются прогибу, решается первая группа задач, касающихся полосы защемленной по краям с точечными опорами.

Предполагая, что  $X(\xi)$  является непрерывной функцией, играющей роль неизвестных опорных сил, тогда для определения прогиба прямоугольной пластинки жестко защемленной по краям, получается дифференциальное уравнение Фредгольма первого рода. Это уравнение является неоднородным в случае одновременного изгиба и сжатия пластинки или вынужденных колебаний. Оно является однородным в случае продольного изгиба и собственных колебаний пластинки.

Решение интегрального уравнения Фредгольма ведет к бесконечной системе уравнений, в которой неизвестными являются коэффициентами разложения Фурье сил  $X(\xi)$ .

Приведенный здесь метод решения задач, касающихся пластинки защемленной по краям, характеризуется значительно большей сходимостью по сравнению с методами других авторов.

## Summary

PROBLEMS OF SIMULTANEOUS BENDING AND COMPRESSION  
AND THOSE OF STABILITY AND VIBRATION OF A PLATE STRIP  
AND RECTANGULAR PLATE

In this paper a method is proposed for the determination of the deflection of a plate strip and a rectangular plate clamped along the entire edge and loaded in the plane of the plate by forces  $q$  and normally to that plane by a static or periodic load  $p$  or  $pe^{i\omega t}$ , respectively.

In the basic system we have a plate strip simply supported on the edges, which is subjected, besides of the forces  $p$  and  $q$ , to unknown forces  $X$  evenly spaced along the strip (the distance between two neighbouring forces being  $2b$ ).

Adding to the deflection surface of the strip a complementary deflection surface we transform the simply supported strip into a strip clamped along the edges  $x=0, a$ .

Assuming that the points of attachment of the forces  $X$  do not undergo deflection, we obtain the first group of problems of a strip with clamped edges and additional point supports inside.

Assuming that  $X(\xi)$  is a continuous function playing the role of unknown support forces, we obtain to determine the deflection of a rectangular plate clamped along the edges, a Fredholm integral equation of the first kind. This equation is non-homogeneous in the case of simultaneous bending and compression or forced vibration and homogenous in the case of buckling and free vibration.

The solution of Fredholm's integral equation leads to an infinite system of equations where the unknowns are the Fourier coefficients for the forces  $X(\xi)$ .

The above method of solving problems of a plate clamped at the edges is characterized by a much more rapid convergence than those of other authors.

*Praca została złożona w Redakcji w grudniu 1958 r.*