

CZASOPISMO TECHNICZNE

MIESIĘCZNIK POŚWIĘCONY ZAGADNIENIOM TECHNIKI

Rok 61

Kraków, Marzec—Kwiecień 1948

Nr. 3—4

TREŚĆ: Dr inż. W. Nowacki: Przyczynek do zagadnienia jednoczesnego ściskania i drgania płyty prostokątnej. — Inż. St. Serafin: Z założenia podstawowe projektu mostu Dębickiego na Wiśle w Krakowie — Prof. dr W. Olszak i inż. M. Mischke: Betony napowietrzone — betony koloidalne. — Prof. dr inż. A. Langrod: O zagadnieniach wytrzymałościowych. — Dr inż. O. Popowicz: Krytyczne uwagi o konstruktorach i wynalazcach. — Kronika techniczna. — Książki nadesłane.

Dr Inż. W. NOWACKI

PRZYSZYNEK DO ZAGADNIENIA JEDNOCZESNEGO ŚCISKANIA I DRGANIA PŁYTY PROSTOKĄTNEJ

A) Rozwiązanie ściśle stateczności płyty prostokątnej tj. rozwiązanie zagadnienia brzegowego równania różniczkowego odkształconej płyty natrafia dla znacznej ilości wypadków na duże trudności natury matematycznej. Trudności te w dużym stopniu omija metoda energetyczna G. H. Bryana i S. Timoszenki oraz metoda prof. dra W. Wierzbickiego omówiona w pracy: „Przyczynek do zagadnienia stateczności płyty prostokątnej” — Inżynieria i Budownictwo 1946.

W wymienionej pracy przedstawiona jest możliwość wyzyskania myśli Vianella (wyznaczanie siły krytycznej pręta ściskanego sposobem wykreślonym przy pomocy wieloboku sznurowego) do wyboczenia płyty prostokątnej i to na drodze analitycznej.

Zaletą metody prof. Wierzbickiego jest prostota aparatu matematycznego, bowiem zagadnienie brzegowe równania różniczkowego sprowadza się do rozwiązania (dla kolejnych przybliżeń) równania różniczkowego cząstkowego niejednorodnego powierzchni odkształcenia płyty.

B) Celem niniejszych rozważań jest wykorzystanie metody prof. W. Wierzbickiego do zagadnienia jednoczesnego drgania i ściskania płyty prostokątnej, do zagadnienia, które znaleźć może praktyczne zastosowanie w konstrukcjach inżynierskich.

Rozważania ograniczymy do czterech charakterystycznych wypadków płyty prostokątnej.

Znane równanie różniczkowe odkształconej płyty prostokątnej drgającej poprzecznie (drgania swobodne) i ściskanej podłużnie w kierunku osi y siłami q równomiernie rozłożonymi na krawędziach $x=0$, $x=a$ brzmi:

$$N \Delta \bar{w} + q \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

W równaniu tym:

$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\frac{1}{m^2})} \quad \text{— jest charakterystyką sztywności płyty na zginanie}$$

E — modułem sprężystości

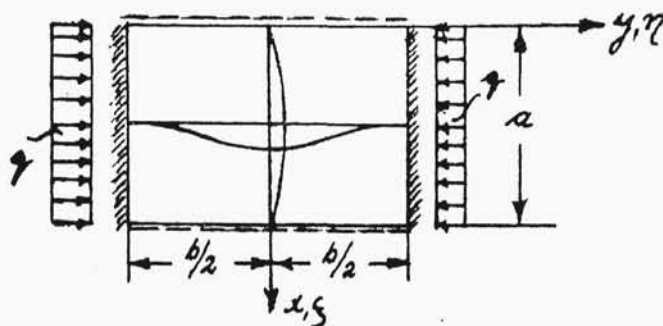
h — grubością płyty

m — liczbą Poissona (dla stali $m = \frac{10}{3}$)

$\bar{w}(x, y, t)$ — rzędną ugięcia płyty $\Delta \bar{w} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}$

γ — ciężarem właściwym, g — przyspieszeniem ziemskim: $\mu = \frac{\gamma h}{g}$.

I) Płyta w krawędziach $y=0$; $y=b$ utwierdzona zupełnie, w krawędziach $x=0$; $x=a$ swobodnie podparta.



Rys. 1.

Wprowadzając oznaczenia:

$$\eta = y/b \quad \xi = x/b \quad b = aa$$

i przy założeniu $w(x, y, t) = w(x, y) \sin \omega t$, gdzie ω jest częstotliwością drgań własnych płyty, do-

przewodźmy równanie (1) do postaci bezwymiarowej:

$$\Delta \Delta w(\zeta, \eta) + \varphi \pi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - k w = 0 \quad (2)$$

gdzie:

$$\varphi \pi^2 = \frac{q b^2}{N} \quad k = \frac{b^4 \mu \omega^2}{N}$$

Przy założeniu

$$w(\zeta, \eta) = Y(\eta) \sin v \zeta \quad v = a \pi$$

spełniającym warunki brzegowe na krawędzi $x=0$ i $x=a$ przekształcamy równanie cząstkowe (2) na równanie różniczkowe zwyczajne:

$$\frac{d^4 Y}{d\eta^4} - 2v^2 \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + v^4 Y = -\pi^2 \varphi \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + k Y. \quad (2a)$$

Rozważmy najpierw oddzielnie zagadnienie wyoboczenia płyty i oddzielnie zagadnienie drgań własnych płyty.

a) Zagadnienie stateczności płyty:

$$k=0; \quad \varphi \neq 0.$$

Równanie (2a) napiszemy w postaci:

$$Y^{IV} - 2v^2 Y'' + v^4 Y = -\pi^2 \varphi Y''$$

$$Y\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0 \quad Y'\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0. \quad (2b)$$

Przyjmujemy jako pierwsze przybliżenie dla odkształconej płyty funkcję:

$$Y_0 = \frac{\delta}{2} (1 + \cos \lambda \eta) \quad \lambda = 2\pi$$

δ — ugięcie w punkcie $\zeta = \frac{1}{2a}$, $\eta = 0$.

Funkcja Y_0 spełnia warunki brzegowe zadania, nie spełnia jednak równania różniczkowego (2a). Wielkość: $Y_0'' = -\frac{\delta}{2} \lambda^2 \cos \lambda \eta$ wstawiamy w miejsce Y'' po prawej stronie równania (2b). Człon $-\pi^2 \varphi Y_0''$ traktujemy jako obciążenie płyty.

W ten sposób zagadnienie brzegowe równania różniczkowego (2b) sprowadzamy do rozwiązania równania różniczkowego niejednorodnego:

$$Y^{IV} - 2v^2 Y'' + v^4 Y = \frac{\delta}{2} \lambda^2 \pi^2 \varphi \cos \lambda \eta. \quad (2c)$$

Całką ogólną równania różniczkowego (2c) będzie:

$$Y = \frac{\varphi \pi^2 \lambda^2}{2} \delta \cos \lambda \eta + U_1 \cos v \eta + U_2 v \eta \sin v \eta + U_3 \sin v \eta + U_4 v \eta \cos v \eta.$$

Ze względu na symetryczną postać odkształconej (co zakładamy dla wartości $0 < a < \sqrt{3}$): $U_3 = U_4 = 0$.

Z warunków brzegowych $Y(\frac{1}{2}) = 0$, $Y'(\frac{1}{2}) = 0$ znajdziemy:

$$U_1 = \frac{\varphi \pi^2 \lambda^2}{2(\lambda^2 + v^2)^2} F(v/2)$$

$$U_2 = -U_1 \frac{\sin v/2}{\sin v/2 + v/2 \cos v/2}$$

gdzie:

$$F(v/2) = \frac{\sin v/2 + v/2 \cos v/2}{\cos v/2 \sin v/2 + v/2}$$

Dla środka płyty otrzymamy wartość

$$Y(0) = \frac{\varphi \pi^2 \lambda^2 \delta}{2} + U_1.$$

Przyrównując wartości rzędnych $Y_0(0)$ i $Y(0)$ dochodzimy do pierwszego przybliżenia dla parametru φ :

$$\varphi = \frac{2(\lambda^2 + v^2)^2}{\pi^2 \lambda^2 [\lambda + F(v/2)]} \quad (3a)$$

albo przy $\lambda = 2\pi$, $v = \pi a$

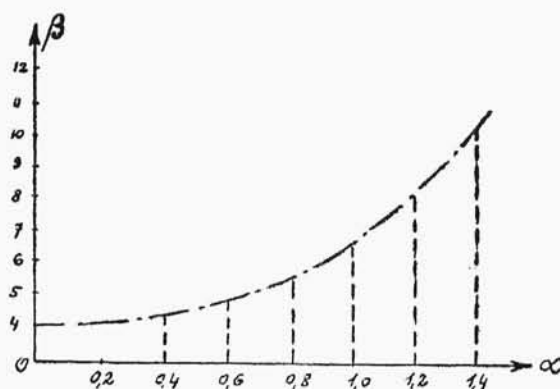
$$q = \frac{N \pi^2}{2b^2} \frac{(1+a^2)^2}{1+F\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \quad (3b)$$

Rys. 1 daje zależność między q i a ; a tabela porównanie wartości uzyskanych metodą ścisłą (Fr. Schleicher)¹⁾ i metodą prof. W. Wierzbickiego.

$$q = \frac{N \pi^2}{b^2} \cdot \beta$$

a	Rozw. ścisłe β	Rozw. przybliż. β
0,4	4,339	4,310
0,6	4,817	4,818
0,8	5,586	5,592
1,0	6,743	6,7585
1,2	8,3173	8,446
1,4	10,6898	10,811
1,6	13,6800	14,013

Dla $a \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \frac{4N\pi^2}{b^2}$.



Rys. 2.

Uderza dokładność pierwszego przybliżenia. Największe odchylenie nie przekracza 3%. Dokładniejsze wyniki dla q otrzymamy przez

¹⁾ Fr. Schleicher, Die Knickspannungen von eingespannten rechteckigen Platten, 1931.

porównanie średnich wartości Y i Y_0 z równania:

$$\int_0^{1/2} Y d\eta = \int_0^{1/2} Y_0 d\eta$$

$$q = \frac{a\pi}{16} (4 + a^2)^2 \cdot \frac{\cos \frac{a\pi}{2} \sin \frac{a\pi}{2} + \frac{a\pi}{2}}{\sin^2 \frac{a\pi}{2}} \cdot \frac{N\pi^2}{b^2} \quad (3c)$$

Dla wartości $a > \sqrt{3}$ płyta (jak wykazały badania Fr. Schleichera) wygnie się według dwóch, trzech itd. półfal. W tym wypadku najwygodniej przyjąć jako postać wybożenia płyty w kierunku osi η funkcję:

$$Y_0 = \delta (\cos p\eta + e \cos p\eta), \quad (4)$$

gdzie: $e = \frac{\sin p/2}{\sin p/2}$ a parametry p spełniają równanie:

$$\operatorname{Tg} p/2 + \operatorname{tg} p/2 = 0, \quad p_1 = 4,730, \quad p_2 = 7,853, \\ p_3 = 10,996, \quad p_4 = 14,137.$$

Funkcja (4) spełnia wszelkie warunki brzegowe zadania i przedstawia postać drgań własnych pręta obustronnie utwierdzonego o rozpiętości b . Wstawiając Y_0 z równania (4) do prawej strony równania (2b) uzyskać można na drodze już omówionej zależność między φ i a .

Związek ten zawierać będzie wszelkie postacie wybożenia płyty w zależności od wielkości p_1, p_2, \dots , według jednej, dwóch itd. półfal.

b) Zagadnienie drgań własnych płyty ($q=0$).

Ograniczymy się tu do wyznaczenia pierwszej częstotliwości drgań. Równanie różniczkowe (2b) napiszemy w postaci:

$$Y^{IV} - 2\nu^2 Y'' + \nu^4 Y = k Y_0 \quad (2d)$$

gdzie: $Y_0 = \frac{\delta}{2} (1 + \cos \lambda\eta)$, $\lambda = 2\pi$.

Wielkość $k Y_0$ traktujemy jako obciążenie płyty.

Rozwiązanie równania (2d) prowadzi do:

$$Y = \frac{k\delta}{2} \left[\frac{1}{\nu^4} + \frac{\cos \lambda\eta}{(\lambda^2 + \nu^2)^2} \right] + U_1 \cos \nu\eta + U_2 \nu\eta \sin \nu\eta.$$

Z warunków brzegowych $Y(\frac{1}{2}) = 0$, $Y'(\frac{1}{2}) = 0$ uzyskamy stałe całkowania:

$$U_1 = \frac{k\delta}{2} \left[\frac{1}{(\lambda^2 + \nu^2)^2} - \frac{1}{\nu^4} \right] F(\nu/2) \\ U_2 = -U_1 \frac{\sin \nu/2}{\sin \nu/2 + \nu/2 \cos \nu/2},$$

a z przyrównania $Y_0(0) \approx Y(0)$ wielkość parametru k :

$$k = \frac{2\nu^4 (\lambda^2 + \nu^2)^2}{\nu^4 [1 + F(\nu/2)] + (\lambda^2 + \nu^2)^2 [1 - F(\nu/2)]}, \quad (5a)$$

albo

$$\omega^2 = \frac{N\pi^4}{b^4 \mu} \cdot \frac{2a^4 (4 + a^2)^2}{a^4 \left[1 + F\left(\frac{\pi a}{2}\right) \right] + (4 + a^2)^2 \left[1 - F\left(\frac{\pi a}{2}\right) \right]}. \quad (5b)$$

Dla $a \rightarrow \infty$; $a \rightarrow 0$ otrzymamy:

$$\omega^2 = \frac{N\pi^4}{b^4 \mu} \cdot \frac{2 \cdot 16}{2 + \frac{\pi^4}{24}} = \frac{N\pi^4}{b^4 \mu} \cdot 5,282 \text{ zam. } \frac{N\pi^4}{b^4 \mu} \cdot 5,139.$$

Dla wyższych częstotliwości należałoby przyjąć:

$$Y_0 = \delta (\cos p\eta + e \cos p\eta).$$

c) Zagadnienie łączne. $q \neq 0$:

Napiszmy równanie (2a) w postaci:

$$Y^{IV} - 2\nu^2 Y'' + \nu^4 Y = k Y - \pi^2 \varphi Y''. \quad (2a)$$

Prawą stronę równania traktujemy jako obciążenie, przy przyjęciu

$$Y_0 = \frac{\delta}{2} (1 + \cos \lambda\eta).$$

Rozwiązaniem równania (2a) będzie:

$$Y = \frac{\varphi \pi^2 \lambda^2 \delta}{2(\lambda^2 + \nu^2)^2} \cos \lambda\eta + \frac{k\delta}{2} \left[\frac{1}{\nu^4} + \frac{1}{2(\lambda^2 + \nu^2)^2} \cos \lambda\eta \right] + \\ + U_1 \cos \nu\eta + U_2 \nu\eta \sin \nu\eta.$$

Z warunków brzegowych:

$$Y(\frac{1}{2}) = 0, \quad Y'(\frac{1}{2}) = 0$$

i z przyrównania $Y_0(0) \approx Y(0)$ otrzymamy następującą przybliżoną zależność między φ i k :

$$\frac{\lambda^2 \varphi^2 \pi^2}{2(\lambda^2 + \nu^2)^2} [1 + F(\nu/2)] + \\ + \frac{k}{2\nu^4 (\lambda^2 + \nu^2)^2} [\nu^4 (1 + F(\nu/2)) + \\ + (\lambda^2 + \nu^2)^2 (1 - F(\nu/2))] = 1. \quad (6)$$

Jeżeli przez φ_0 oznaczymy wielkość φ dla $k=0$ (równ. 3a) a przez k_0 wielkość k dla $\varphi=0$ (równ. 5a), to równanie (6) da się przedstawić jako $k = k_0 (1 - \varphi/\varphi_0)$ lub też:

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 - q/q_0). \quad (7)$$

Stwierdzamy zatem, że 1) częstotliwość drgań własnych płyty maleje ze wzrostem obciążenia q i dla $q \rightarrow q_0$ (krytyczna wartość obciążenia płyty dla $\omega=0$!) maleje do zera; 2) dla sił rozciągających q natomiast częstotliwość wzrasta.

II) Płyta w krawędziach $x=0$; $x=a$ utwierdzona zupełnie, w krawędziach $y=0$, $y=b$ swobodnie podparta.

Przy założeniu: $w = Y \sin \nu \zeta$, $\nu = \pi a$ równanie różniczkowe zadania

$$\Delta \Delta w(\zeta, \eta) = -\varphi \pi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + k w$$

przyjmie postać:

$$Y^{IV} - 2\nu^2 Y'' + \nu^4 Y = (\varphi\pi^2\nu^2 + k)Y.$$

Zakładając podobnie jak w wypadku I-szym

$$Y_0 = \frac{\delta}{2}(1 + \cos \lambda\eta)$$

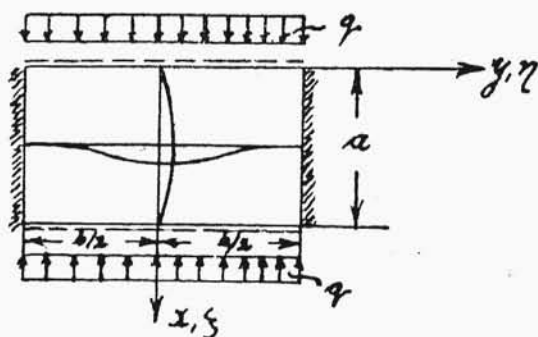
otrzymamy rozwiązanie równania:

$$Y^{IV} - 2\nu^2 Y'' + \nu^4 Y = \frac{\delta}{2}(\varphi\pi^2\nu^2 + k)(1 + \cos \lambda\eta)$$

w następującej postaci:

$$Y = A \left[\frac{1}{\nu^4} + \frac{\cos \lambda\eta}{(\lambda^2 + \nu^2)^2} \right] + U_1 \cos \nu\eta + U_2 \nu\eta \sin \nu\eta$$

$$A = \frac{\delta}{2}(\varphi\nu^2\pi^2 + k).$$



Rys. 3.

Z warunków brzegowych: $Y(\frac{1}{2}) = 0$, $Y'(\frac{1}{2}) = 0$ i z przyrównania $Y_0(0) \approx Y(0)$ otrzymamy zależność:

$$(\varphi\pi^2\nu^2 + k) \frac{\nu^4 [1 + F(\nu/2)] + (\lambda^2 + \nu^2)^2 [1 - F(\nu/2)]}{\nu^4 (\lambda^2 + \nu^2)^2} = 2, \quad (8)$$

albo

$$k = k_0(1 - \varphi/\varphi_0) \quad (9)$$

gdzie:

φ_0 jest wartością φ ze wzoru (8) przy $k=0$

a k_0 „ „ „ k „ „ (8) „ $\varphi=0$.

III. Płyta dookoła swobodnie podparta.

Wychodząc z równania (2) i zakładając $w_0 = \delta \sin \nu\zeta \sin \lambda\eta$, $\nu = n\pi a$, $\lambda = m\pi$ traktujemy prawą stronę równania (10) jako obciążenie płyty

$$\Delta \Delta w(\zeta, \eta) = w_0 \cdot k - \varphi\pi^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} = \quad (10)$$

$$= \delta(k + \varphi\pi^2\lambda^2) \sin \lambda\eta \sin \nu\zeta.$$

Rozwiązaniem równania (10) będzie:

$$w(\zeta, \eta) = \delta \frac{(k + \varphi\pi^2\lambda^2)}{(\lambda^2 + \nu^2)^2} \sin \lambda\eta \sin \nu\zeta.$$

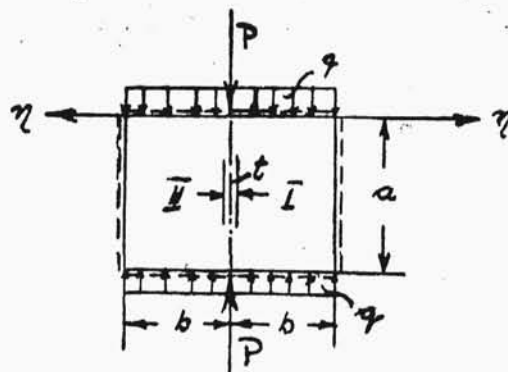
Przyrównując rzędne $w(\zeta, \eta) = w_0(\zeta, \eta)$ otrzymamy wynik ścisły¹⁾:

$$(k + \varphi\pi^2\lambda^2) = (\lambda^2 + \nu^2)^2 \text{ albo } \omega^2 = \omega_0^2(1 - q/q_0) \quad (11)$$

¹⁾ A. Nadai, Elastische Platten 1925, str. 165.

Przyjęta funkcja $w_0(\zeta, \eta)$ pokrywa się z rozwiązaniem zagadnienia brzegowego równania różniczkowego (2).

IV) Wyboczenie płyty dookoła swobodnie podpartej siłą skupioną P i obciążeniem g .



Rys. 4.

Równanie różniczkowe ugięcia płyty I (wzgl. II) brzmi przy założeniu $w = \sum_1^\infty a_n Y \sin \nu\zeta$

$$\nu = n\pi a$$

$$Y^{IV} - 2\nu^2 Y'' + Y\nu^4 = \varphi\pi^2\nu^2 Y \quad \varphi = \frac{qb^2}{N\pi^2}.$$

Przyjmując jedną półfalę w kierunku osi η

$$Y_0 = \cos \lambda\eta \quad \lambda = \pi/2 \quad \eta = y/6$$

otrzymamy powierzchnię odkształcenia:

$$w = \sum_1^\infty \left(\frac{\varphi\pi^2\nu^2 a_n}{(\nu^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda\eta + V_1 \cos \nu\eta + V_2 \sin \nu\eta + V_3 \nu\eta \cos \nu\eta + V_4 \nu\eta \sin \nu\eta \right) \sin \nu\zeta.$$

Z warunków brzegowych:

$$Y(0) = a_n \quad Y'(0) = 0 \quad Y(1) = 0 \quad Y''(1) = 0$$

znajdziemy stałe całkowania:

$$V_1 = a_n \left[1 - \frac{\varphi\pi^2\nu^2}{(\nu^2 + \lambda^2)^2} \right] \quad V_2 = -V_3 \quad V_4 = -Tg\nu \cdot V_3$$

gdzie

$$\varphi_0 = \frac{(\nu^2 + \lambda^2)^2}{\pi^2\nu^2}$$

jest siłą krytyczną dla wypadku $P=0$.

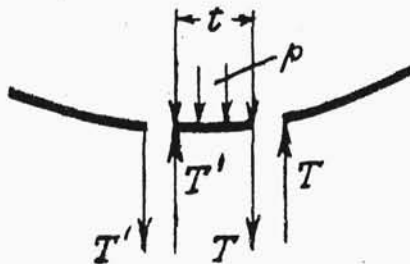
Siła tnąca w prostej $\eta=0$ daje:

$$T = -N \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \eta} \right).$$

Ponieważ $Y'(0)=0$, otrzymujemy ostatecznie:

$$T = -\frac{N}{b} \sum_1^\infty a_n Y'''(0) \sin \nu\zeta$$

$$T = -\frac{2N}{b^3} \sum_1^\infty a_n \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \frac{\nu^3 \cos^2 \nu}{\sin \nu \cos \nu - \nu} \sin \nu\zeta.$$



Rys. 5.

Zrównoważenie paska płyty o szerokości t daje:

$$p - 2T = 0.$$

Równanie różniczkowe wygięcia paska txa :

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = p \quad \text{przy} \quad w(0, \zeta) = \sum_1^{\infty} a_n \sin v \zeta$$

prowadzi do związku:

$$a_n \left[\frac{EJ}{b^4} v^4 - \frac{Pv^2}{b^2} + \frac{2N}{b^3} v^2 (1 - \varphi/\varphi_0) \frac{\cos^2 v}{\cos v \sin v - v} \right] = 0$$

$$J = \frac{t \cdot b^3}{12}.$$

Jeśli $t \rightarrow 0$: $J \rightarrow 0$

$$P = \frac{4Nv}{b} \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \frac{\cos^2 v}{\cos v \sin v - v}.$$

Z ostatniego związku odczytujemy, że między siłą krytyczną P a obciążeniem q zachodzi związek liniowy

$$P = P_0 \left(1 - \frac{q}{q_0} \right),$$

gdzie P_0 jest siłą krytyczną przy $q=0$, q_0 — siłą krytyczną dla $P=0$.

W wypadku, gdy $q=0$, wzór:

$$P_0 = \frac{4Nv}{b} \frac{\cos^2 v}{\cos v \sin v - v}$$

pokrywa się z rozwiązaniem A. Sommerfelda¹⁾.

$$\text{Dla } n=1 \quad b \geq a \quad P_0 = \frac{4N\pi}{a}.$$

W zagadnieniu łączącym drgania i ściskania płyty, punktem wyjścia rozważań będzie równanie powierzchni odkształcenia

$$Y^{IV} - 2v^2 Y'' + Yv^4 = (\varphi\pi^2 v^2 + k) Y.$$

Po przeprowadzeniu analogicznych działań jak dla wypadku ściskania bez udziału drgań znajdziemy ostatecznie:

$$\frac{\varphi\pi^2 v^2}{(v^2 + \lambda^2)^2} + \frac{k}{(v^2 + \lambda^2)^2} = 1 - \frac{P}{P_0}. \quad (a)$$

Oznaczając przez

$$\bar{\varphi}_0 = \left(1 - \frac{P}{P_0} \right) \frac{(v^2 + \lambda^2)^2}{\pi^2 v^2}$$

wielkość obciążenia krytycznego $\frac{qb^2}{N\pi^2}$ dla $k=0$,

a przez

$$\bar{k}_0 = \left(1 - \frac{P}{P_0} \right) (v^2 + \lambda^2)^2$$

wielkość $\frac{\omega^2 b^4 \mu}{N}$ dla $q=0$ napiszemy związek (a) w postaci

$$\omega^2 = \bar{\omega}_0^2 \left(1 - \frac{q}{q_0} \right).$$

Zauważmy jeszcze, że dla $q=0$ i $b \rightarrow \infty$

$$\omega^2 = \omega_{0,\infty}^2 \left(1 - \frac{P}{P_0} \right),$$

gdzie $\omega_{0,\infty}$ jest częstotliwością drgań własnych płyty nieskończenie długiej przy stanie $P=0$, czyli

$$\omega_{0,\infty}^2 = \frac{N\pi^4 n^4}{\mu a^4}.$$

Powyższe przykłady pozwalają ocenić korzyści stosowania metody prof. W. Wierzbickiego do zagadnień jednoczesnego drgania i ściskania płyty. Pierwsze przybliżenie daje wyniki dostatecznie dokładne dla celów praktycznych. Dokładność pierwszego przybliżenia ocenić można drugim, trzecim... przybliżeniem. Polega ono na wstawieniu otrzymanej funkcji Y do prawej strony równania (2a) i uzyskaniu nowego przybliżenia. Przyrównanie rzędnych kolejnych przybliżeń: $Y_{n-1} \approx Y_n$ lub całek

$$\int Y_{n-1} d\eta \approx \int Y_n d\eta$$

daje wartość kolejnych parametrów q_n, k_n . Wykonane dwa dalsze przybliżenia przypadku Ia wykazały doskonałą zbieżność ciągu parametru φ_0 . Zaskakującą jest zgodność wyniku ostatecznego we wszystkich czterech wypadkach, mianowicie związku:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{q}{q_0} \right).$$

Zależność ta wykryta dla pręta ściskanego i drgającego poprzecznie (pręta obustronnie swobodnie podpartego) przez L. Eulera zdaje się potwierdzać (dla wypadku III w sposób ścisły) dla rozmaitych utwierdzeń płyty w sposób przybliżony, podobnie jak to ma miejsce dla innych wypadków utwierdzeń pręta.

¹⁾ A. Sommerfeld, Z. Math. Physik 1906.