

# CZASOPISMO TECHNICZNE

MIESIĘCZNIK POŚWIĘCONY ZAGADNIENIOM TECHNIKI I ARCHITEKTURY

Rok 60

Kraków, Wrzesień—Październik 1947

Nr. 9—10

70-LECIE KRAKOWSKIEGO TOW. TECHNICZNEGO  
60-LECIE „CZASOPISMA TECHNICZNEGO”

## MIEJSKA KOLEJ ELEKTRYCZNA W KRAKOWIE

UL. ŚW. WAWRZYŃCA 13/15  
NR TELEFONU 593-75/76  
SKRYTKA POCZTOWA NR 751

### RACHUNKI BIEŻĄCE:

BANK HANDLOWY ODDZIAŁ KRAKÓW  
K. K. O. MIASTA KRAKOWA NR 50130

INSPEKCJA (OBOK POCZTY GŁ.)  
NR TELEFONU 507-60

REMIZA NA RYDLÓWCE  
NR TELEFONU 557-45

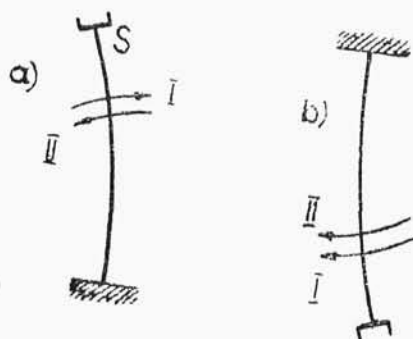
Inż. Dr. WITOLD NOWACKI

## DRGANIA POPRZECZNE I WYBOCZENIE UKŁADU RAMOWEGO JAKO PROBLEM ŁĄCZNY

A) W mechanice ciał doskonale sztywnych stosuje się zazwyczaj miarę dynamiczną do określenia stopnia stateczności układu. Wychylając ciało z położenia równowagi, badamy, czy układ wraca do położenia równowagi w sposób powolny czy szybki. Przy znacznym stopniu stateczności układu otrzymamy znaczną częstotliwość drgań; dla zmniejszającego się stopnia stateczności częstość drgań maleje, dążąc ze zbliżeniem się do granicy stateczności, do zera. Okres drgań własnych względnie częstotliwość drgań stanowi tu dynamiczną miarę niestateczności.

Dynamiczną miarę niestateczności rozszerzono i na ciała sprężyste. Proste doświadczenie, wykonane przez A. Sommerfelda<sup>\*)</sup> i poparte rozważaniem teoretycznym, stwierdza, że smukły pręt pionowy, wprowadzony w drgania poprzeczne, drga z większą częstotliwością w położeniu (rys. 1a) niż w położeniu jak na rys. 1b.

W pierwszym położeniu ciężar własny pręta wywołuje w pręcie naprężenia ściskające, a przy wy-



rys. 1.

chyleniu pręta z położenia równowagi, moment siły ciężkości II przeciwstawia się momentowi sprawdzającemu pręt do położenia równowagi. W drugim położeniu ciężar własny wywołuje rozciąganie, a momenty I i II działają w tym samym kierunku. Jeżeli w położeniu pierwszym pręta na szalce S położymy ciężarki, to ze wzrostem obciążenia, częstotliwość drgań własnych stopniowo zmniejsza się. Dla częstotliwości  $\omega \rightarrow 0$  obciążenie i ciężar własny pręta zdążają do obciążenia krytycznego pręta na wyboczenie.

Belka w dwóch punktach podparta swobodnie, ściskana siłą podłużną i wprowadzona w drgania poprzeczne, zmienia częstotliwość drgań własnych w zależności od wielkości siły podłużnej według wzoru:

$$\omega_k^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{S}{S_k}\right) \quad (a)$$

gdzie  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  jest częstotliwością drgań własnych przy braku siły podłużnej ( $S = 0$ )

$\omega_k = \frac{2\pi}{T}$  jest częstotliwością drgań własnych przy  $S \neq 0$

$S_k = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}$  jest siłą krytyczną wyboczenia.

Z równania (a) wysnuć można następujące wnioski:

- Częstotliwość drgań własnych  $\omega_k$  zmniejsza się ze wzrastającą siłą podłużną i dla  $S \rightarrow S_k$  dąży do zera.
- Częstotliwość drgań własnych wzrasta ze wzrostem siły rozciągającej  $S$ .
- W wypadku drgań wymuszonych następuje ze wzrostem  $\omega$  zmniejszenie siły krytycznej pręta.

Powyższe twierdzenie zawdzięczamy L. Eulerowi. Związek (a) stanowi dynamiczną miarę wyboczenia. Z pewnym przybliżeniem związek ten będzie słuszny dla prętów o zmiennym przekroju i odmiennych rodzajach utwierdzenia końców pręta.

Z miary dynamicznej wyboczenia korzysta się praktycznie przy określaniu sił krytycznych dla wież, masztów, gdzie na modelu lub w naturze określenie okresu drgań własnych nie nastręcza większych trudności; trudność stanowi określenie sztywności na zginanie układu (odpowiednik  $EJ$  dla pręta).

Poniżej zajmiemy się układami ramowymi nieprzesuwnymi o prętach drgających poprzecznie i jednocześnie ściskanych lub rozciąganych.

B) Rozważmy dowolny, płaski, nieprzesuwny układ ramowy, składający się z prętów prostych. Niech siły działają jedynie w węzłach, wywołując w prętach w stanie statycznym wyłącznie siły podłużne. Przekroje prętów niech będą tak dobrane, że wyboczenie nastąpić może jedynie w płaszczyźnie układu ramowego. Zakładamy nieściśliwość prętów, pomijając wpływ sił podłużnych na odkształcenie układu i pomijając wpływ drgań podłużnych prętów. Zakładamy dalej, że wszelkie założenia teorii wyboczenia jak i drgań własnych są spełnione, a problem zacieśniony do obszaru odkształceń sprężystych.

Ze względu na nieraz bardzo wysoką statyczną niewyznaczalność układu ramowego, stosujemy metodę odkształceń, przyjmując kąty obrotu węzłów jako wielkości nadliczbowe geometryczne.

Jeżeli układ ramowy wychylimy z położenia równowagi i w sposób nagły usuniemy przyczynę wychylenia, układ wykonywać będzie drgania poprzeczne swobodne. Jeśli pominąć wpływ tłumienia

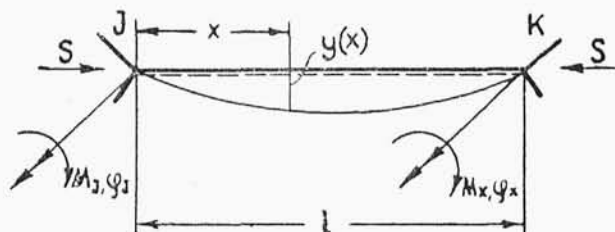
<sup>\*)</sup> A. Sommerfeld: „Eine einfache Vorrichtung zur Veranschaulichung des Knickvorganges“. Z. V. D. J. 1905. Str. 1320.

zewnątrznego i wewnętrznego, to drgania te nie zanikają ani nie zmniejszają swych amplitud.

Z układu ramowego wyodrębnimy pręt J—K. Na końcach pręta, wykonujących drgania własne, powstają momenty o amplitudach  $M_J$ ,  $M_K$ , oraz kąty obrotu o amplitudach  $\varphi_J$ ,  $\varphi_K$ .

Równanie różniczkowe problemu brzmi:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$



rys.2.

$\mu$  = masa pręta na jednostkę długości.

Zakładając:  $y(x, t) = y(x) \sin \omega t$ , przy narażeniu nieznanego postaci drgań  $y(x)$  i częstotliwości drgań  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  przekształcamy cząstkowe równanie różniczkowe (1) na zwyczajne równanie różniczkowe

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + S \frac{d^2 y}{dx^2} - \omega^2 \mu y = 0 \quad (1')$$

Oznaczając dla skrócenia:

$$\alpha^2 = \frac{Sl^2}{EJ}, \quad \frac{\mu \omega^2 l^4}{EJ} = \beta^4,$$

$$\delta = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \beta^4}},$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \beta^4}}, \quad \xi = \frac{x}{l}$$

otrzymamy całkę ogólną równania (1') w postaci:

$$y(\xi) = C_1 \cos \delta \xi + C_2 \sin \delta \xi + C_3 \sin \varepsilon \xi + C_4 \cos \varepsilon \xi \quad (2)$$

Z warunków brzegowych:

$$\xi = 0: \quad y(0) = 0, \quad y''(0) = -\frac{M_J}{EJl^2}$$

$$\xi = 1: \quad y(1) = 0, \quad y''(1) = -\frac{M_K}{EJl^2}$$

wyznamy stałe  $C_1, \dots, C_4$  jako funkcje momentów przywęzłowych  $M_J$ ,  $M_K$ . Jeżeli tak określone stałe  $C_1, \dots, C_4$  wstawimy do zależności

$$y'(0) = \varphi_J/l; \quad y'(1) = \varphi_K/l \quad \text{i powyższe równania rozwiążemy względem } M_J \text{ i } M_K,$$

dojdziemy do następujących równań:

$$\begin{aligned} M_J &= m[c(\alpha, \beta) \varphi_J + s(\alpha, \beta) \varphi_K]; \\ M_K &= m[s(\alpha, \beta) \varphi_J + c(\alpha, \beta) \varphi_K] \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$c(\alpha, \beta) = \frac{\delta^2 + \varepsilon^2}{2} \cdot$$

$$\frac{\cos \delta \sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon \sin \delta}{\sin \delta \sin \varepsilon (\delta^2 - \varepsilon^2) - 2\delta\varepsilon (\cos \delta \cos \varepsilon - 1)}$$

$$s(\alpha, \beta) = \frac{\delta^2 + \varepsilon^2}{2} \cdot$$

$$\frac{\varepsilon \sin \delta - \delta \sin \varepsilon}{\sin \delta \sin \varepsilon (\delta^2 - \varepsilon^2) - 2\delta\varepsilon (\cos \delta \cos \varepsilon - 1)}$$

$$m = \frac{2EJ}{l}.$$

W wypadku szczególnym  $\alpha = 0$ ,  $S = 0$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} M_J &= m[c(\beta) \varphi_J + s(\beta) \varphi_K] \\ M_K &= m[s(\beta) \varphi_J + c(\beta) \varphi_K] \end{aligned} \quad (3a)$$

gdzie:

$$s(\beta) = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\sin \beta - \sin \beta}{1 - \cos \beta \cos \beta};$$

$$c(\beta) = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\cos \beta \sin \beta - \sin \beta \cos \beta}{1 - \cos \beta \cos \beta}.$$

W wypadku  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta = 0$  równanie (3) przechodzi na:

$$\begin{aligned} M_J &= m[c(\alpha) \varphi_J + s(\alpha) \varphi_K] \\ M_K &= m[s(\alpha) \varphi_J + c(\alpha) \varphi_K] \end{aligned} \quad (3b)$$

gdzie:

$$c(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha}$$

$$s(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha - \sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha}.$$

Wreszcie dla  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  przechodzimy z problemu dynamicznego na problem statyczny:  $c(\alpha, \beta) \rightarrow 2$ ,  $s(\alpha, \beta) \rightarrow 1$ .

$$M_J = m(2\varphi_J + \varphi_K); \quad M_K = m(\varphi_J + 2\varphi_K) \quad (3c)$$

Jeżeli np. w węzle J istnieje przegub, to  $M_J = 0$ . Eliminując z pierwszego i drugiego równania (3) wielkość  $\varphi_J$ , uzyskamy:

$$M_J = 0; \quad M_K = m\bar{c}(\alpha, \beta) \varphi_K \quad (4)$$

$$\text{gdzie: } \bar{c}(\alpha, \beta) = \frac{\delta^2 + \varepsilon^2}{2} \cdot \frac{1}{\delta \operatorname{ctg} \delta - \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon}.$$

W wypadku siły rozciągającej należy w równaniu (4) w miejsce  $\alpha$  wstawić  $\alpha\sqrt{-1}$ , co w konsekwencji prowadzi do zamiany  $\delta$  na  $\varepsilon$  w tych równaniach.

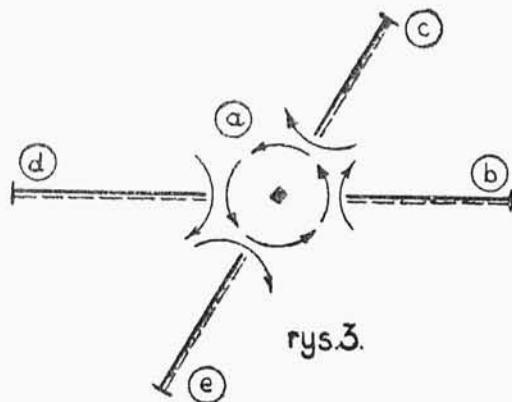
C) Rama nieprzesuwana o  $r$  węzłach wolnych jest układem  $r$ -krotnie geometrycznie niewyznaczalnym. Odpowiednią ilość równań warunkowych

otrzymamy ze zrównoważenia węzłów (sprowadzając w myśl zasady d'Alemberta zagadnienie dynamiczne do statycznego).

Suma amplitud momentów przywęzłowych dowolnego węzła a ramy winna być dla każdej chwili  $t = t_0$  równą zeru. Przy  $r$  węzłach układu ramowego otrzymamy  $r$  równań typu

$$\sum_i M_{ai} = M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} + M_{ae} = 0 \quad (5)$$

Po wprowadzeniu do wielkości  $M_{ai}$  związków (3, 4) uzyskamy układ  $r$  równań liniowych wzglę-



rys.3.

dem  $\varphi$  i jednorodnych. Układ jednorodnych równań warunkowych będzie tylko wtedy niesprzecznym (pominąwszy rozwiązanie trywialne  $\varphi = 0$ ), gdy wyznacznik układu równań  $D(\alpha, \beta)$  będzie równy zeru.

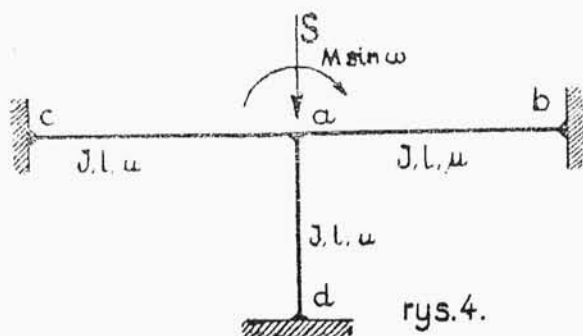
Warunek  $D(\alpha, \beta) = 0$  daje równanie przestępne o  $\infty$  ilości pierwiastków  $\beta$ . Najmniejszy z nich określi podstawową częstotliwość drgań własnych.

I tak dla układu ramowego (rys. 4) zrównoważenie węzła daje

$$M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} = 0$$

$$M_{ab} = mc(\beta)\varphi_a; \quad M_{ac} = mc(\beta)\varphi_a$$

$$M_{ad} = mc(\alpha, \beta)\varphi_a$$



rys.4.

Wyznacznik układu, przy  $\alpha = \text{const.}$  przyjmie postać:

$$D_\beta = 2c(\beta) + c(\alpha, \beta) = 0 \quad (I)$$

Równanie (I) określi zmianę częstotliwości drgań własnych wywołaną siłą  $S$ .

Jeżeli w węźle a działa moment  $M \sin \omega t$ , wywołujący drgania wymuszone układu, przy stałej częstotliwości  $\omega$ , to zrównoważenie węzła a daje:

$$(M_{ab} + M_{ac} + M_{ad}) \sin \omega t = M \sin \omega t$$

Przy stałym  $\omega$ , a tym samym przy stałym  $\beta$ , można wyznaczyć siłę krytyczną  $S$ , wywołującą zniszczenie układu.

W tym wypadku przy  $\varphi_a \rightarrow \infty$  otrzymamy jako warunek wyboczenia

$$D_\alpha = 2c(\beta) + c(\alpha, \beta) = 0, \quad \beta = \text{const.} \quad (II)$$

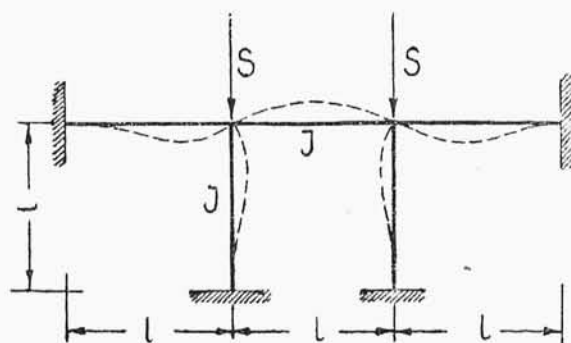
Równanie (II) określi zmianę siły krytycznej  $S_K$  w zależności od zmieniającej się częstotliwości drgań własnych.

Dla  $\alpha = 0$ ,  $D_\beta = 3c(\beta) = 0$ , równanie warunkowe drgań własnych bez udziału siły podłużnej.

Dla  $\beta = 0$ ,  $D_\alpha = 4 + c(\alpha) = 0$ , otrzymujemy równanie warunkowe wyboczenia układu.

Zrównoważenie węzłów 1 i 2 układu ramowego rys. 5 daje układ dwóch równań:

$$\begin{aligned} [2c(\beta) + c(\alpha, \beta)]\varphi_1 + s(\beta)\varphi_2 &= 0 \\ s(\beta)\varphi_1 + [2c(\beta) + c(\alpha, \beta)]\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$



rys.5.

Rozwiązanie wyznacznika układu równań prowadzi do dwóch równań warunkowych:

$$\begin{aligned} 2c(\beta) + s(\beta) + c(\alpha, \beta) &= 0 \\ 2c(\beta) - s(\beta) + c(\alpha, \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (III)$$

Pierwsze równanie przedstawia arytmetyczną ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ), drugie symetryczną postać wygięcia układu ramowego.

Wypadek  $\beta = 0$  daje  $c(\alpha) + 3 = 0$   
 $c(\alpha) + 1 = 0.$

W wypadku  $\alpha = 0$  otrzymamy

$$\begin{aligned} 3c(\beta) + s(\beta) &= 0 \\ 3c(\beta) - s(\beta) &= 0. \end{aligned}$$

Dla większej ilości węzłów układu ramowego wyznaczenie pierwiastków  $D(\alpha, \beta) = 0$  następcza znaczne trudności rachunkowe. W tym wypadku duże usługi może oddać algorytm Gauss'a.

Wyznacznik układu równań liniowych jednorodnych:

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \varphi_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (IV)$$

można przedstawić w postaci:

$$D(\alpha, \beta) = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \quad (V)$$

gdzie  $a_{kk}^{(k-1)}(\alpha, \beta)$  jest współczynnikiem przy  $\varphi_k$  w pierwszym równaniu  $(k-1)$ -szej eliminacji.

Przy zadanym np.  $\alpha = \text{const.}$  przyjmujemy za  $\beta$  kolejne wartości, otrzymując coraz to inne układy równań (IV), a po wykonaniu eliminacji coraz to nowe wartości  $D(\alpha, \beta)$  ze wzoru (V). Równanie (V) przedstawia krzywą, której pierwiastki dają kolejne wartości  $\beta_1, \beta_2, \dots$

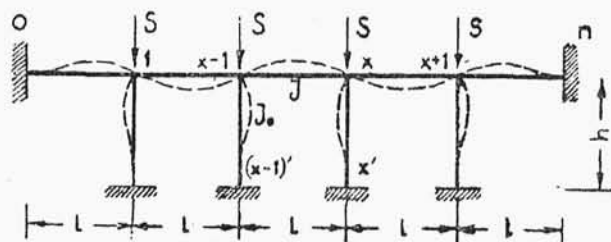
W wypadku regularnych układów ramowych znaczne uproszczenie otrzymamy, stosując równania różnicowe. I tak dla ramy ciągłej rys. 6. zrównoważenie węzła  $x$  daje:

$$M_{x, x-1} + M_{x, x+1} + M_{x, x'} = 0,$$

albo:

$$\varphi_{x-1} s(\beta) + \varphi_x [2c(\beta) + c(\alpha, \beta)k] + \varphi_{x+1} s(\beta) = 0 \quad (VI)$$

gdzie  $k = \frac{m_0}{m}$ .



rys. 6.

Rozwiązaniem tego równania różnicowego będzie:

$$\varphi_x = A \cos ax + B \sin ax \quad (VII)$$

Wstawiając  $\varphi_x$  do warunków brzegowych zadania:  $x = 0, \varphi_0 = 0, x = n, \varphi_n = 0$ , uzyskamy:

$$A = 0, \quad \sin an = 0, \quad \varphi_x = B \sin j \frac{\pi x}{n}$$

$$a = j \frac{\pi}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Wstawiając  $\varphi_x$  z równania (VII) do równania (VI), otrzymamy następujące równanie warunkowe problemu:

$$2[s(\beta) \cos j \frac{\pi}{n} + c(\beta)] = -kc(a, \beta) \quad (VIII)$$

Z wartości  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  wstawiamy do równania (VIII) wielkość  $j = n-1$ , gdyż  $j = 0, j = n$  przeczy założeniom, a możliwą postać wy-

gienia, dającą najmniejsze pierwiastki równania (VIII), uzyskamy jedynie dla  $j = n-1$ .

W tym wypadku:

$$2s(\beta) \cos \frac{\pi}{n} = kc(\alpha, \beta) + 2c(\beta).$$

Równanie to przy  $\beta = \text{const.}$  daje nieskończoną ilość pierwiastków  $\alpha$ , przy  $\alpha = \text{const.}$  nieskończoną ilość pierwiastków  $\beta$ . Najmniejszy z pierwiastków  $\alpha$  określi najmniejszą wartość siły krytycznej przy drganiach wymuszonych częstotliwością  $\omega$ , najmniejszy z pierwiastków  $\beta$ , częstotliwość drgań podstawowych przy działaniu siły podłużnej.

$$\text{Dla } n = \infty, \alpha = 0, s(\beta) = \frac{k+2}{2} c(\beta)$$

$$\text{dla } n = \infty, \beta = 0, kc(\alpha) + 2 = 0.$$

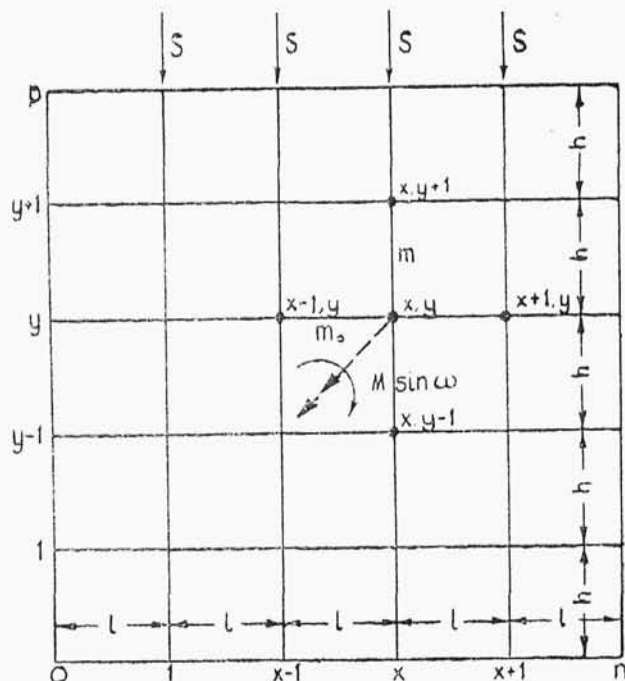
Rozważmy jeszcze regularną ramę piętrową (rys. 7) o jednakowych geometrycznych i sprężystych właściwościach słupów i rygli.

Niech układ ramowy podlega drganiom wymuszonym, spowodowanym momentem  $M \sin \omega$ , działającym w węźle  $x, y$ . Zrównoważenie węzła  $x, y$ , daje równanie warunkowe:

$$(M_{x, x+1} + M_{x, x-1} + M_{y, y+1} + M_{y, y-1}) \sin \omega = -M \sin \omega \quad (6)$$

Rygle ramy doznają drgań poprzecznych bez udziału sił podłużnych. Wstawiając do równania (6) wielkości momentów przywęzłowych według wzorów (3) i (3a), otrzymamy równanie:

$$s_0 \varphi_{x+1, y} + 2c_0 \varphi_{xy} + s_0 \varphi_{x-1, y} + k(s \varphi_{x, y+1} + 2c \varphi_{xy} + s \varphi_{x, y-1}) = \frac{M}{m_0} \quad (6a)$$



rys. 7.



$$k = \frac{m}{m_0}, \quad s_0 = s_0(\beta_0), \quad c_0 = c_0(\beta_0),$$

$$c = c(\alpha, \beta), \quad s = s(\alpha, \beta)$$

$$\beta_0 = l \sqrt{\frac{\omega^2 \mu}{E J_0}}, \quad \beta = h \sqrt{\frac{\omega^2 \mu}{E J}},$$

$$a = h \sqrt{\frac{S}{E J}}$$

Dla pozostałych węzłów otrzymamy jednorodne równania typu (6a). Jeżeli przy drganiach wymuszonych, okres drgań wymuszonych pokrywa się z okresem drgań własnych, lub też przy braku momentu, wymuszającego drgania wymuszone, zależy nam na określeniu okresu drgań własnych, — wyznacznik układu równań gatunkowych, wypisanych dla wszystkich węzłów wolnych, winien być równy zeru.

Wyliczenie wyznacznika układu równań jednorodnych ominiemy, traktując układ równań:

$$\begin{aligned} s_0 \varphi_{x+1,y} + 2 c_0 \varphi_{xy} + s_0 \varphi_{x-1,y} + \\ + k (\varphi_{y+1,x} s + 2 c \varphi_{xy} + s \varphi_{x,y-1}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, n, \quad y = 0, 1, 2, \dots, p.$$

jako cząstkowe równanie różnicowe drugiego rzędu.

Przedstawiając  $\varphi_{xy}$  jako iloczyn dwóch funkcji  $X_x$  i  $Y_y$ , z których pierwsza zależy od  $x$ , druga od  $y$  ( $\varphi_{xy} = X_x Y_y$ ), sprowadzamy równanie różnicowe cząstkowe do układu dwóch równań różnicowych zwyczajnych:

$$X_{x+1} + \left(2 \frac{c_0}{s_0} - \frac{\lambda}{s_0}\right) X_x + X_{x-1} = 0; \quad (8)$$

$$Y_{y+1} + \left(2 \frac{c}{s} + \frac{\lambda}{sk}\right) Y_y + Y_{y-1} = 0$$

gdzie  $\lambda$  jest wielkością stałą.

Rozwiązaniem równań (8) będzie:

$$\begin{aligned} X_x &= A \cos ax + B \sin ax; \\ Y_y &= C \cos bx + B \sin bx \end{aligned} \quad (9)$$

Wstawiając równania (9) do równań (8), otrzymamy:

$$\begin{aligned} 2 \cos a + \left(2 \frac{c_0}{s_0} - \frac{\lambda}{s_0}\right) &= 0; \\ 2 \cos b + \left(2 \frac{c}{s} + \frac{\lambda}{sk}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Eliminując z ostatnich równań wielkość  $\lambda$ , dochodzimy do następującej zależności:

$$s_0 \cos a + ks \cos b = -(c_0 + kc) \quad (11)$$

Ograniczymy się do ramy utwierdzonej całkowicie wzdłuż konturów. Otrzymamy w tym wypadku proste warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} x=0 \quad X_0 &= 0; \quad y=0 \quad Y_0 = 0 \\ x=n \quad X_n &= 0; \quad y=p \quad Y_p = 0. \end{aligned}$$

Wprowadzenie tych jednorodnych warunków brzegowych do równania (9) daje:

$$A = 0; \quad C = 0; \quad B \sin an = 0; \quad D \sin bp = 0$$

$$\text{albo} \quad a = \frac{i\pi}{n}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$b = \frac{j\pi}{p}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, p).$$

Przy tak określonych wartościach  $a$  i  $b$  równanie (11) brzmi:

$$s_0 \cos \frac{i\pi}{n} + ks \cos \frac{j\pi}{p} = -(C_0 + kc) \quad (12)$$

Równanie (12) jest równaniem warunkowym problemu. Rozważmy jeszcze, które z wielkości  $i, j$  wchodzi w rachubę. Kąt obrotu  $\varphi_{xy}$  jest iloczynem funkcji  $X_x$  i  $Y_y$ .

$$\varphi_{xy} = X_x \cdot Y_y = B \cdot D \sin \frac{i\pi}{n} x \cdot \sin \frac{j\pi}{p} y.$$

Wielkości  $i=0, i=n, j=0, j=p$  odpadają, gdyż sprowadzają  $\varphi_{xy}$  do zera dla każdego  $x$  i  $y$ , co przeczy założeniu.

Z pozostałych wartości  $i, j$  w rachubę wchodzi jedynie wartości  $i=n-1$ , oraz  $j=p-1$ , gdyż jedynie dla tych wartości węzły fali pokrywają się z węzłami układu ramowego. Otrzymujemy zatem przy  $i=n-1; j=p-1$  następujące równanie warunkowe:

$$s_0 \cos \frac{\pi}{n} + ks \cos \frac{\pi}{p} = c_0 + kc \quad (13)$$

Rozważmy wypadki szczególne.

a)  $\beta = 0$ . Problem wyboczenia ramy  $s_0 = 1, c_0 = 2$

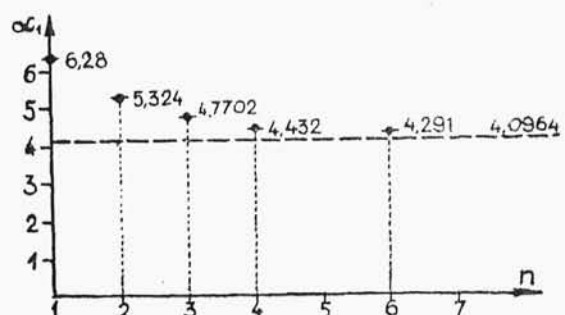
$$\cos \frac{\pi}{n} + ks(\alpha) \cos \frac{\pi}{p} = 2 + kc(\alpha) \quad (a)$$

Równanie (a) daje  $\infty$  ilość pierwiastków  $\alpha_i$ . Najmniejszy z nich określi

$$S_{k, \min} = \alpha_1^2 \frac{EJ}{h^2}$$

Dla  $n=p$ , oraz  $k=1$  wyliczono  $\alpha_i$  dla wzrastającej ilości pręseł (rys. 8)

$$\cos \frac{\pi}{n} [1 + s(\alpha)] = 2 + c(\alpha) \dots \quad (b)$$



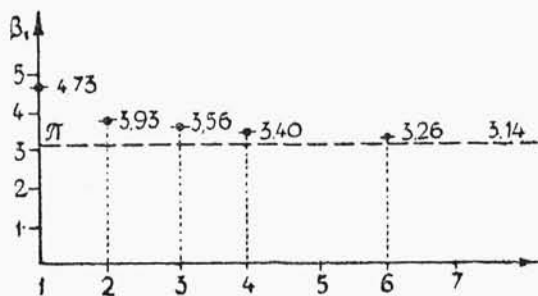
rys.8.

b) W wypadku  $\alpha = 0$ , w wypadku drgań własnych bez udziału siły osiowej, przy  $k = 1$ ,  $\beta = \beta_0$  i  $n = p$ , otrzymamy z równania (13):

$$\cos \frac{\pi}{n} = \frac{c(\beta)}{s(\beta)} = \frac{\cos \beta \sin \beta - \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta - \sin \beta} \quad (c)$$

Z równania (c) wyliczone najmniejsze pierwiastki  $\beta_1$  przy wzrastającej liczbie przęseł naniesiono na rys. 9. Wartości  $\beta_1$  maleją asymptotycznie do

wartości  $\pi$ . Dla  $n \rightarrow \infty$ ,  $\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$  otrzy-



rys.9.

ujemy częstotliwość drgań własnych taką, jak dla belki w dwóch punktach swobodnie podpar-  
tej. Wpływ utwierdzenia bardzo silnie maleje ze  
wzrostem ilości przęseł.

Rozważmy jeszcze wypadek sił rozciągających  
S. Dla  $k = \infty$  i  $J_0 = 0$ , otrzymamy belkę  
ciągłą 0,1 . . . . . p.

Równanie (13) uprości się w tym wypadku do  
prostej postaci:

$$\cos \frac{\pi}{p} = \frac{c(\bar{\alpha}, \beta)}{s(\bar{\alpha}, \beta)}, \quad \bar{\alpha} = \sqrt{-\frac{SI^2}{EJ}}, \quad \bar{\alpha} = i\alpha$$

Dla nieskończonej ilości przęseł  $p \rightarrow \infty$  otrzy-  
mamy:

$$c(\bar{\alpha}, \beta) = s(\bar{\alpha}, \beta) \quad \text{albo:}$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \delta} \cdot \frac{\cos \varepsilon + 1}{\sin \varepsilon} = 1 \quad (d)$$

Z przeliczeń wynika, że ze wzrostem S wzrasta  
częstotliwość  $\omega$ .

