

CZASOPISMO TECHNICZNE

MIESIĘCZNIK POŚWIĘCONY ZAGADNIENIOM TECHNIKI I ARCHITEKTURY

Rok 60

Kraków, Marzec—Kwiecień 1947

Nr. 3—4

70-LECIE KRAKOWSKIEGO TOW. TECHNICZNEGO
60-LECIE „CZASOPISMA TECHNICZNEGO”

SPÓŁDZIELNIA INŻYNIERSKA

SP. Z ODP. UDZIAŁAMI

W KRAKOWIE, UL. PIŁSUDSKIEGO 6

• • • • •

ODDZIAŁY: W RZESZOWIE, TARNOWIE, KRAKOWIE,
ZAKOPANEM, KATOWICACH, GLIWICACH, WROCŁAWIU,
BYDGOSZCZY, POZNANIU, GDAŃSK - GDYNIA W Sopot,
SŁUPSKU I SZCZECINIE

• • • • •

DLA ROBÓT BUDOWLANYCH, DROGOWYCH, KOLEJOWYCH, WODNYCH
I MELIORACYJNYCH, WIERTNICZYCH, POMIAROWYCH, OSOBNY DZIAŁ PROJEKTÓW

Dr. inż. WITOLD NOWACKI

Referat zgłoszony na Zjazd Naukowy
P. Z. I. B. Sekcja techniczna: Zagadnienia
naukowo-konstrukcyjne. (Konferencja staty-
ków-konstruktorów).

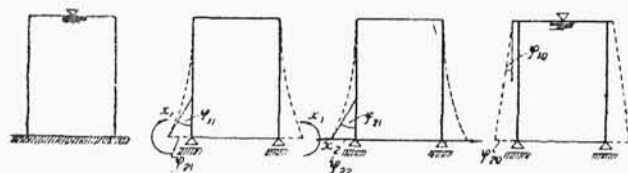
ZASTOSOWANIE METODY ODKSZAŁCEŃ DO BŁON OBROTOWYCH PRZY OBCIĄŻENIU OBROTOWO-SYMETRYCZNYM

Zastosowanie metody odkształceń do błon obrotowych przy obciążeniu obrotowo-symetrycznym.

Przy łączeniu błon obrotowych obciążonych w sposób obrotowo-symetryczny w jedną całość — postępujemy analogicznie jak przy wyznaczaniu stanu naprężeń układów ramowych. Wyznamy odkształconą każdego elementu błonowego oddzielnie, wyrażając przesunięcia i obroty skrajnych przekrojów jako linijowe funkcje momentów zginających i sił tnących tych przekrojów. Odpowiadającą ilości niewiadomych ilość równań warunkowych otrzymujemy z warunków ciągłości odkształconej w węzłach. I tak np. dla błony walcowej w dolnej krawędzi zupełnie utwierdzonej otrzymujemy 2 równania warunkowe:

$$X_1 \varphi_{11} + X_2 \varphi_{21} + \varphi_{10} = 0$$

$$X_1 \varphi_{21} + X_2 \varphi_{22} + \varphi_{20} = 0$$



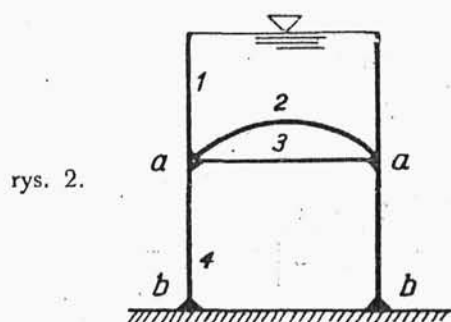
rys. 1.

Dla przykładu rys. 2 naliczymy 10 niewiadomych sił przekroju.

Jeśli by jednak jako nadliczbowe przyjąć wielkość i geometryczne (kąty i przesunięcia węzłów), to ilość nadliczbowych spada do dwóch (φ_a , δ_a). Wielkości te wyznaczymy z warunków statycznych, ze zrównoważenia węzła a: $\sum M_a = 0$, $\sum R_a = 0$.

Gdyby pominąć wpływ wydłużenia płyty a — 3 — a, jedyną nadliczbową pozostaje wielkość φ_a . Należy zatem dla każdego układu błonowego zbadać stopień statycznej i geometrycznej niewyznaczalności i rozwiązywać układ metodą sił lub odkształceń. Przy większej ilości węzłów i przy większej ilości elementów błonowych zbiegających się w węzle stosować będziemy metodę odkształceń.

W dalszym ciągu rozważań ograniczymy się jedynie do błony walcowej połączonej z pierścieniem lub płytą kołową. Metodę objaśnioną na przy-



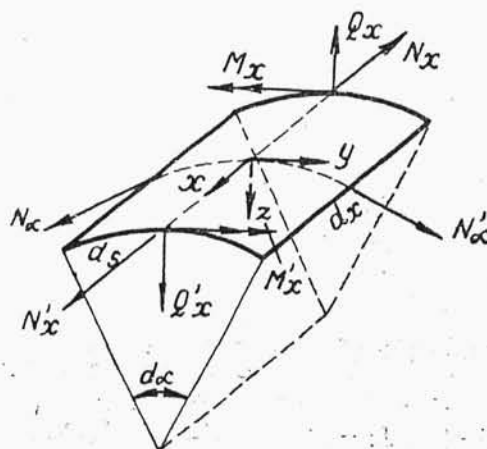
rys. 2.

kładzie błony walcowej rozwinąć można bez trudu na inne typy błon*).

A. Błona walcowa. Stan naprężeń błony walcowej, obciążonej w sposób obrotowo-symetryczny określony jest wielkościami: N_x , N_α , Q_x , M_x . Stan obciążeń określają wielkości:

$$P_x, P_z, P_y = 0$$

$$P = P_x + P_z$$



*) Autor opracował rozwinięcie metody na błony sferyczne i stożkowe.

Z równowagi wyciętego elementu błonowego $dx \cdot ds$ uzyskamy:

$$1) \frac{dN_x}{dx} + p_x = 0$$

$$2) \frac{N_\alpha}{r} + \frac{dQ_x}{dx} + p_z = 0$$

$$3) \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0$$

Stan odkształceń (ε_x , ε_α , k_x , k_α) i przesu-
nięć (u , v , w) charakteryzują następujące
związki:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_\alpha = -\frac{w}{r}, \quad k_x = -\frac{d^2w}{dx^2}, \quad k_\alpha = 0, \quad \tau = 0, \quad \dots (a)$$

Eliminujemy Q_x z równań 2) i 3):

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{N_\alpha}{r} + p_x = 0 \quad \dots (4)$$

Całkowanie równania 1) daje

$$N_x = - \int p_x dx + C_1 \quad \dots (5)$$

Miedzy stanem naprężeń i odkształceń istnieją
następujące związki

$$N_x = D(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_\alpha), \quad N_\alpha = D(\varepsilon_\alpha + \mu \varepsilon_x),$$

$$M_x = -Bk_x, \quad Q_x = \frac{dM_x}{dx}, \quad M_\alpha = \mu M_x$$

przyczym

$$D = \frac{Eh}{1-\mu^2}, \quad B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Podstawiając do powyższych równań związki (a)
otrzymujemy:

$$N_x = D \left(\frac{du}{dx} - \mu \frac{w}{r} \right), \quad N_\alpha = D \left(\mu \frac{du}{dx} - \frac{w}{r} \right)$$

$$M_x = -B \frac{d^2w}{dx^2}, \quad Q_x = -B \frac{d^3w}{dx^3}$$

Wstawiając powyższe wartości do równań (4)
i eliminując $\frac{du}{dx}$ dochodzimy do równania różnic-
kowego zwykłego, linowego 4-go rzędu

$$w^{(IV)} + \frac{L}{L^4} w = \frac{1}{B} \left(\frac{\mu N_x}{r} + p_x \right),$$

$$N_x = - \int p_x dx + C_1, \quad \frac{1}{L^4} = \frac{3(1-\mu^2)}{h^2 r^2} \dots (A)$$

Stan przesunięć określony będzie równaniami:

$$\mu = \int \varepsilon_x dx + C_2, \quad v = 0, \quad w = -r \varepsilon_\alpha$$

Oznaczając przez ζ wielkość $\frac{x}{L}$ a przez λ sto-
sunek $\frac{L}{L}$ przekształcimy równanie (A) do postaci:

$$\frac{d^4w}{d(\lambda\zeta)^4} + 4w = \frac{L^4}{B} \left(\mu \frac{N_x}{r} + p_x \right)$$

$$N_x = - \int p_x dx + C_1 \quad \dots (A_1)$$

Rozwiązanie równania (A₁) daje:

$$w = W(\lambda\zeta) + C_1 e^{-\lambda\zeta} \cos \lambda\zeta + C_2 e^{-\lambda\zeta} \sin \lambda\zeta + C_3 e^{\lambda\zeta} \cos \lambda\zeta + C_4 e^{\lambda\zeta} \sin \lambda\zeta \quad \dots (A_2)$$

albo w innej postaci:

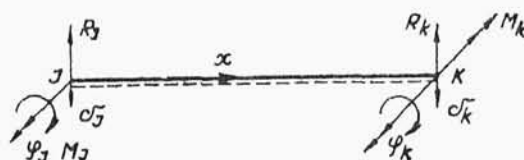
$$w = W(\lambda\zeta) + U_1 \cos \lambda\zeta \cos \lambda\zeta + U_2 \cos \lambda\zeta \sin \lambda\zeta + U_3 \sin \lambda\zeta \cos \lambda\zeta + U_4 \sin \lambda\zeta \sin \lambda\zeta \quad \dots (A_3)$$

$W(\lambda\zeta)$ — rozwiązanie szczególne równania różnic-
kowego niejednorodnego (A₁) jest funkcją jedy-
nie obciążenia zewnętrznego p_x , p_z .

Dla stanu płytowego naprężeń otrzymuje się te
same (lub mało odbiegające) wartości $W(\lambda\zeta)$ co
dla stanu błonowego naprężeń.

Zajmijmy się wyznaczeniem odkształconej w za-
leżności od geometrycznych wartości brzegowych
($W(\lambda\zeta) = 0$). Warunki brzegowe:

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } \zeta = \frac{x}{L} = 0 \quad \delta_I = U_1 \\ \zeta = 0 \quad - \frac{B}{L^2} \frac{d^2w}{d(\lambda\zeta)^2} \Big|_{\zeta=0} = M_I = - \frac{2B}{L^2} U_4 \\ \text{dla } \zeta = 1 \quad \delta_k = U_1 \cos \lambda \cos \lambda + U_2 \cos \lambda \sin \lambda + U_3 \sin \lambda \cos \lambda + U_4 \sin \lambda \sin \lambda \\ \text{,, } \zeta = 1 \quad M_k = \frac{2B}{L} (U_1 \sin \lambda \sin \lambda + U_2 \sin \lambda \cos \lambda - U_3 \cos \lambda \sin \lambda - U_4 \cos \lambda \sin \lambda) \end{aligned} \right\} (b)$$



rys. 4.

Dalej różniczkując $w(\zeta)$ otrzymamy:

$$\varphi_I = \frac{1}{L} \frac{dw}{d(\lambda\zeta)} \Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{L} (U_2 + U_3)$$

$$\varphi_k = \frac{1}{L} \frac{dw}{d(\lambda \zeta)} \Big|_{\zeta=1} = \frac{1}{L} \left\{ U_1 (\cos \lambda \sin \lambda - \sin \lambda \sin \lambda) + U_2 (\cos \lambda \cos \lambda - \sin \lambda \sin \lambda) + U_3 (\sin \lambda \sin \lambda + \cos \lambda \cos \lambda) + U_4 (\sin \lambda \cos \lambda + \cos \lambda \sin \lambda) \right\}.$$

Wstawiając do powyższych związków $U_1 \dots U_4$ otrzymane z rozwiązania układu równań (b) i porządkując równanie względem M_1 , M_k znajdziemy:

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu [c(\lambda) \varphi_1 + s(\lambda) \varphi_k] - \mu' [r(\lambda) \delta_k - t(\lambda) \delta_1] \\ M_k &= -\mu [s(\lambda) \varphi_1 + c(\lambda) \varphi_k] + \mu' [t(\lambda) \delta_k - r(\lambda) \delta_1] \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mu &= \frac{2B}{1} \\ \mu' &= \frac{u}{1} \end{aligned} \quad (B)$$

gdzie

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \lambda \frac{\sin \lambda \cos \lambda - \sin \lambda \cos \lambda}{\sin^2 \lambda - \sin^2 \lambda} \\ s(\lambda) &= \lambda \frac{\cos \lambda \sin \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}{\sin^2 \lambda - \sin^2 \lambda} \\ t(\lambda) &= \lambda^2 \frac{\sin^2 \lambda + \sin^2 \lambda}{\sin^2 \lambda - \sin^2 \lambda} \\ r(\lambda) &= \frac{2 \sin \lambda \sin \lambda}{\sin^2 \lambda - \sin^2 \lambda} \lambda^2 \end{aligned}$$

Wzory (B) nazywamy wzorami transformacyjnymi problemu.

$$\text{Z równań } R_1 = -\frac{B}{L^3} \frac{d^3 w}{d(\lambda \zeta)^3} \Big|_{\zeta=0}$$

$$R_k = -\frac{B}{L^3} \frac{d^3 w}{d(\lambda \zeta)^3} \Big|_{\zeta=1}$$

$$\text{znajdziemy } R_1 = \mu' [t(\lambda) \varphi_1 + r(\lambda) \varphi_k] + \mu'' [n(\lambda) \delta_k - m(\lambda) \delta_1] \quad (c)$$

$$\mu'' = \frac{u}{1}$$

$$R_k = \mu' [r(\lambda) \varphi_1 + t(\lambda) \varphi_k] - \mu'' [m(\lambda) \delta_k - n(\lambda) \delta_1]$$

$$M_1 = M_1^0 + \mu [c(\lambda) \varphi_1 + s(\lambda) \varphi_k] - \mu' [r(\lambda) \delta_k - t(\lambda) \delta_1]$$

$$M_k = M_k^0 - \mu [s(\lambda) \varphi_1 + c(\lambda) \varphi_k] + \mu' [t(\lambda) \delta_k - r(\lambda) \delta_1]$$

$$R_1 = R_1^0 - \mu' [t(\lambda) \varphi_1 + r(\lambda) \varphi_k] + \mu'' [n(\lambda) \delta_k - m(\lambda) \delta_1] \quad (E)$$

$$R_k = R_k^0 + \mu' [r(\lambda) \varphi_1 + t(\lambda) \varphi_k] - \mu'' [m(\lambda) \delta_k - n(\lambda) \delta_1]$$

Tutaj M_1^0 , M_k^0 , R_1^0 , R_k^0 są brzegowymi wartościami statycznymi układu podstawowego geometrycznie wyznaczalnego ($\varphi_1 = \varphi_k = \delta_1 = \delta_k = 0$)

$$\text{przyczem } n(\lambda) = 2\lambda^3 \frac{\cos \lambda \sin \lambda + \cos \lambda \sin \lambda}{\sin^2 \lambda - \sin^2 \lambda},$$

$$m(\lambda) = \lambda^3 \frac{\cos \lambda \cos \lambda + \sin \lambda \cos \lambda}{\sin^2 \lambda - \sin^2 \lambda}$$

Podobnie ustawiamy równania transformacyjne dla przypadków szczególnych przegubu w I lub K, wreszcie dla przekrojów swobodnych w I i K.

Zmniejszający się człon funkcji w (równ. A₂) jest drganiem okresowo-tłumionym o dekrement logarytmicznym π . Amplitudy w (λ^2) i ich pochodne zmniejszają się z każdą połówką fali

$$l_0 = \frac{\pi l}{\lambda} = \pi L \text{ o wartość } e^{-\pi} \text{ czyli } \sim \frac{1}{23,14}$$

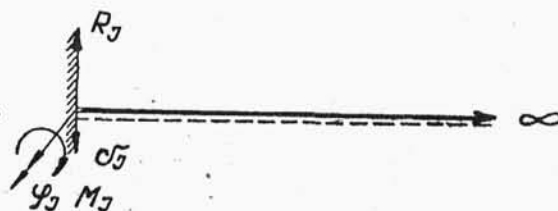
poprzedniej amplitudy. Amplitudy zmniejszają się tym bardziej, im większe jest λ , albo im mniejsze jest L . Dlatego przy $\lambda = \frac{1}{L} > 7$ można uważać błonę jako nieskończenie długą w jednym kierunku $C_3 \rightarrow 0$, $C_4 \rightarrow 0$.

W tym wypadku

$$W = C_1 e^{-\lambda \zeta} \cos \lambda \zeta + C_2 e^{-\lambda \zeta} \sin \lambda \zeta$$

$$M_1 = \mu \lambda \varphi_1 + \mu' \lambda^2 \delta_1 \quad (D)$$

$$R_1 = -\mu' \lambda^2 \varphi_1 - 2\mu'' \lambda$$



rys. 5.

Jedynie dla niskich błon walcowych, gdzie stosunek $\frac{1}{2r}$ waha się koło jedności, należy korzystać ze wzorów transformacyjnych B i C, — przeciwnie — ze wzorów D.

Superpozycja obciążenia zewnętrznego i wpływu wartości geometrycznych brzegowych daje w wypadku wzoru $\lambda = \frac{1}{L} < 7$

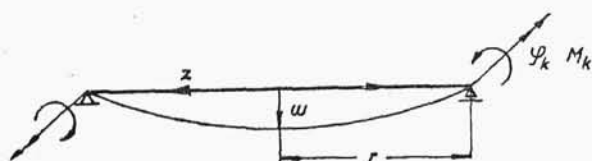
Wartości te dla najrozmaitszych typów obciążeń nie trudno znanymi metodami wyznaczyć.

B. Płyta kołowa — element często łączony z błoną walcową jako przepona lub zamknięcie albo dno zbiornika. Dla stanu obciążeń $p = \text{const.}$ i przy obrocie brzegu płyty o kąt φ_1 uzyskamy

$$M_{Ir} = -\frac{p r^2}{8} + \frac{N}{r} (1 + \mu) \varphi_1$$

$$(\text{w kierunku } r) \quad N = \frac{E d^3}{12(1 - \mu^2)}$$

$$M_{It} = -\frac{p r^2}{8} \mu + \frac{N}{r} (1 + \mu) \varphi_1$$

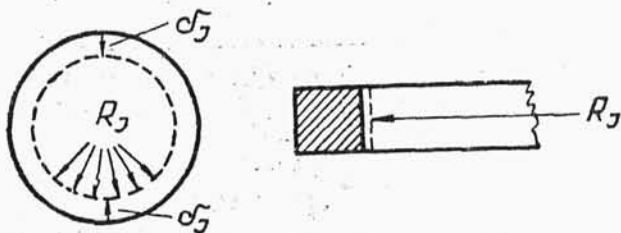


rys. 6.

$$(\text{w kierunku stycznym}). \quad R_{Ir} = -\frac{p r}{2}$$

C. Pierścień kołowy — przyjmujemy jako dostatecznie wielki, tak, że przenosić będzie jedynie siły osiowe. Przy skróceniu średnicy pierścienia o wartość $2\delta_1$ znajdziemy: $R_1 = -\frac{EA}{r^2} \delta_1$

$A = \text{przekrój pierścienia.}$



rys. 7.

D. Równania warunkowe metody odkształceń.

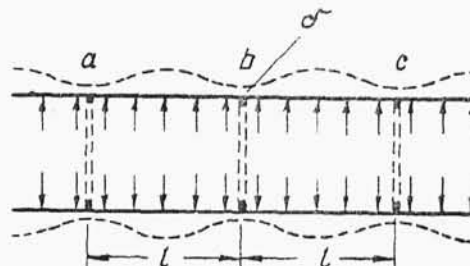
Zajmijmy się najpierw prostym wypadkiem błony cylindrycznej składającej się z kilku walców o różnej grubości. Obciążenie niech będzie rozłożone w sposób ciągły w obrębie walca o stałej grubości. W każdym węźle k wystąpią dwie nadliczbowe (φ , δ). Z równowagi wyciętego węzła k otrzymamy dwa równania:

$$\begin{aligned} M_{k(k-1)} - M_{k(k+1)} &= 0, \\ R_{k(k-1)} + R_{k(k+1)} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (F)$$

Wyrażając momenty i reakcje przywęzłowe przez geometryczne wartości brzegowe przy pomocy wzorów transformacyjnych (F) otrzymamy dla każdego węzła układ dwóch niejednokrotnych równań liniowych. Ilość równań odpowiada ilości nadliczbowych.

Jeżeli błona posiada grubość stałą, natomiast obciążenie jest funkcją nieciągłą, to miejsce nieciągłości traktujemy jako węzeł i dla takiego węzła wypisujemy równania (F). Znaczne uproszczenie otrzymamy wtedy, gdy dla każdej błony walcowej $\lambda > 7$. Wpływ brzegowych wartości statycznych węzłów $(k-1)$ i $(k+1)$ może być pominięty i dla każdego węzła otrzymamy układ dwóch równań o jedynie dwóch nadliczbowych.

W wypadku obciążenia (rys. 8) pozostaje w każdym węźle nadliczbowa δ .



rys. 8.

$$R_{bc} + R_{ba} + R_{\text{pierścienia}} = 0$$

$$R_{bc} = -\mu'' [m(\lambda) - n(\lambda)] \delta + R^0$$

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \dots = 0$$

$$R_{ba} = -\mu'' [m(\lambda) - n(\lambda)] \delta + R^0$$

$$\delta_a = \delta_b = \delta_c = \dots = 0$$

$$R_{\text{pierśc.}} = -\frac{EA}{r^2} \delta$$

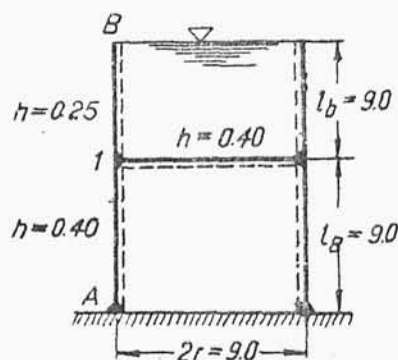
Stąd

$$\delta = -\frac{R^0}{\mu'' [m(\lambda) - n(\lambda)] + \frac{EA}{r^2}}$$

Dla

$$A \gg 0, \quad \delta \gg 0, \quad R_{bc} \gg R^0$$

Przypadek zbiegania się błon walcowych i płyty w jednym węźle objaśnia rys. 9. Jedyna nadlicz-



rys. 9.

bowa (przy pominięciu wydłużenia płyty) to kąt φ_1 . Zrównoważenie węzła 1 daje:

$$M_{1B} + M_{1 \text{ płyty}} - M_{1A} = 0$$

Ale

$$\left. \begin{aligned} M_{IB} &= M_{IB}^0 + \mu_b \lambda_b \varphi_1 + \mu'_b \lambda_b^2 \delta_1 \\ M_{IA} &= M_{IA}^0 - \mu_a \lambda_a \varphi_1 + \mu'_a \lambda_a^2 \delta_1 \\ M_{Ip} &= M_{Ip}^0 + N \frac{(1 + \mu)}{r} \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

$$\delta_1 = 0, \quad M_{IA}^0 = 0$$

Stąd

$$\varphi_1 = \frac{-(M_{IB}^0 + M_{Ip}^0)}{[\mu_a \lambda_a + \mu_b \lambda_b + \frac{N}{r}(1 + \mu)]};$$

$$M_{IB}^0 = \frac{L_b^3 \gamma}{2} (\lambda_b - 1) = 2 \cdot 685 \text{ tm/m};$$

$$M_{Ip}^0 = -\frac{p r^2}{8} = -22 \cdot 79 \text{ tm/m}$$

Stąd $\varphi_1 = 13 \cdot 95 / \mu_a \lambda_a$ a z równań (α)

$$M_{IB} = 6,985 \text{ tm/m}, \quad M_{IA} = -13 \cdot 95 \text{ tm/m}$$

$$M_{Ip} = -20,397 \text{ t/mm}, \quad R_{IB} = -12 \cdot 28 \text{ tm/m},$$

$$R_{IA} = 13,61 \text{ tm/m}.$$

Dla górnej komory przy wyznaczeniu wartości $U_1 \dots U_4$ z równ. (b) otrzymamy następujące równania:

$$\text{Odkształcona: } W_{IB} = \frac{1}{1B_b} \left[0,1744 (\lambda \zeta) - 1,936 + 1,937 e^{-\lambda \zeta} \cos \lambda \zeta + 4,583 e^{-\lambda \zeta} \sin \lambda \zeta \right]$$

Moment gnący:

$$M_x = -\frac{1}{2L_B^2} \left(-9,166 e^{-\lambda \zeta} \cos \lambda \zeta + 3,874 e^{-\lambda \zeta} \sin \lambda \zeta \right)$$

Siła tnąca:

$$Q_x = -\frac{1}{2L_B^3} \left(13,04 e^{-\lambda \zeta} \cos \lambda \zeta + 5,292 e^{-\lambda \zeta} \sin \lambda \zeta \right)$$

$$N_\alpha = -\frac{E h_b}{r} w_b = -0,1166 \cdot 10^6 \cdot w_{1B}.$$

Poniżej podano wykresy wielkości W , M_x .