

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

R A D A R E D A K C Y J N A

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER JERZY LITWINISZYN

JERZY NOWIŃSKI WACŁAW OLSZAK

BOHDAN STEFANOWSKI STANISŁAW TURSKI

WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

JERZY NOWIŃSKI - REDAKTOR

TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

TOM VIII WARSZAWA 1956 ZESZYT 1
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

NAPRĘŻENIA CIEPLNE W POWŁOKACH WALCOWYCH (I)

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie sił wewnętrznych w powłocie walcowej o przekroju kołowym, wywołanych wzrostem temperatury. Zakładamy, że mamy do czynienia z ustalonym polem temperatury. Przyjmujemy, że temperatura zmienia się w sposób liniowy wzdłuż grubości powłoki:

$$(1.1) \quad T(x, y, z) = \tau_0(x, y) + z \tau(x, y).$$

Tutaj $\tau = 1/2(t_1 - t_2)$, jeśli temperaturę występującą w odległości $z = h/2$ od powierzchni środkowej powłoki oznaczmy przez t_1 , a temperaturę dla $z = -h/2$ oznaczmy przez t_2 . Przyjęcie liniowej zmiany temperatury w obrębie grubości płyty nie jest zgodne ze ścisłym rozwiązaniem przestrzennego pola temperatur w powłocie; założenie to jednak będzie tym bliższe rzeczywistości, im grubość powłoki będzie mniejsza w stosunku do pozostałych jej wymiarów.

Pod wpływem pola temperatury powłoka dozna naprężeń i odkształceń. Przeszacowanie powłoki wyznaczmy w oparciu o metodę W. M. M a j s i e l a, [1]. Składowe stanu przeszacowania wyznacza się z wyrażeń całkowych

$$(1.2) \quad 1_i u_i(\xi, \eta, \zeta) = \int_V a T(x, y, z) (\bar{\sigma}_x^{(i)} + \bar{\sigma}_y^{(i)} + \bar{\sigma}_z^{(i)}) dV \quad (i=1, 2, 3).$$

We wzorze tym u_i oznacza składową przeszacowania punktu (ξ, η, ζ) wywołaną polem temperatur; $\bar{\sigma}_x^{(i)}$, $\bar{\sigma}_y^{(i)}$ i $\bar{\sigma}_z^{(i)}$ są naprężeniami normalnymi występującymi w punkcie (x, y, z) , wywołanymi działaniem siły skupionej 1_i , przyłożonej do punktu (ξ, η, ζ) , w ciełe nie poddanym działaniu temperatury, i skierowanej wzdłuż poszukiwanego przeszacowania. Naprężenia powyższe są funkcjami zmiennych x, y, z oraz współrzędnych ξ, η, ζ . Są zatem funkcjami G r e e n a dla stanu 1_i działającego na układ znajdujący się w stanie naturalnym.

W przypadku powłoki walcowej wzór (1.2) zastosujemy do wyznaczenia przeszacowania radialnego w . W dalszych rozważaniach oprzemy się na technicznej teorii powłok W. Z. W ł a s o w a, [2]. Teoria ta daje wyniki dostatecznie bliskie rzeczywistości dla powłok występujących w budow-

nictwie i pozwala wyrazić przemieszczenia i naprężenia za pomocą jednej tylko funkcji przemieszczenia.

Ponieważ w myśl założeń technicznej teorii powłok pomijamy naprężenia $\bar{\sigma}_z$ w stosunku do pozostałych naprężeń, a przemieszczenie w jest niezależne od zmiennej z , napiszemy wzór (1.2) w postaci

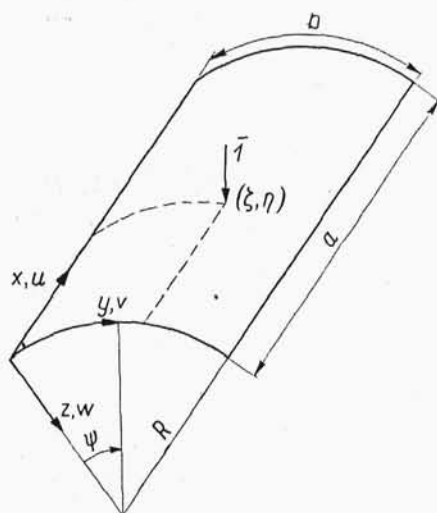
$$(1.3) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \int_V \alpha T(x, y, z) [\bar{\sigma}_x(x, y, z; \xi, \eta) + \bar{\sigma}_y(x, y, z; \xi, \eta)] dV.$$

Tutaj $w(\xi, \eta)$ jest radialnym przemieszczeniem punktu (ξ, η) powierzchni środkowej powłoki, $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\sigma}_y$ naprężeniami normalnymi wywołanymi w punkcie (x, y, z) powłoki działaniem siły skupionej $\bar{P} = \bar{1}$, skierowanej

wzdłuż osi z , a przyłożonej w punkcie (ξ, η) . Podkreślić należy, że naprężenia $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\sigma}_y$ odnoszą się do powłoki znajdującej się w stanie naturalnym.

Na rysunku 1 przedstawiono powłokę, jej zasadnicze wymiary i przyjęty układ współrzędnych x, y, z oraz kierunki dodatnie przemieszczeń u, v, w . Naprężenia normalne wywołane działaniem siły $\bar{P} = \bar{1}$ przyjmują postać

$$(1.4) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_y), \\ \bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_y + \nu \bar{\epsilon}_x). \end{cases}$$



Rys. 1

Tu $\bar{\epsilon}_x$ i $\bar{\epsilon}_y$ są odkształceniami jednostkowymi w kierunku osi x i y , E mo-

dułem sprężystości oraz ν liczbą P o i s s o n a. Odkształcenia te związane są z przemieszczeniami następującymi związkami liniowymi:

$$(1.5) \quad \begin{cases} \bar{\epsilon}_x = \bar{e}_x + \nu \bar{e}_y + (\bar{k}_x + \nu \bar{k}_y) z, \\ \bar{\epsilon}_y = \bar{e}_y + \nu \bar{e}_x + (\bar{k}_y + \nu \bar{k}_x) z, \end{cases}$$

gdzie

$$(1.6) \quad \bar{e}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{e}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\bar{w}}{R}, \quad \bar{k}_x = -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}, \quad \bar{k}_y = -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}.$$

Wstawiając (1.5) do równania (1.3) otrzymujemy

$$(1.7) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \frac{E a}{1-\nu} \int_V [\tau_0(x, y) + z \tau(x, y)] [\bar{e}_x + \bar{e}_y + (\bar{k}_x + \bar{k}_y) z] dx dy dz.$$

Wykonując całkowanie względem z w granicach od $-h/2$ do $+h/2$ znajdujemy

$$(1.8) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = \frac{E h a}{1 - \nu} \int_{\Omega} \tau_0(x, y) (\bar{e}_x + \bar{e}_y) d\Omega + \\ + \frac{E h^3 (1 + \nu) a}{12 (1 - \nu^2)} \int_{\Omega} \tau(x, y) (\bar{k}_x + \bar{k}_y) d\Omega.$$

Związek (1.8) wskazuje, że odróżnić można wpływ pola temperatur τ_0 od wpływu pola τ na stan przemieszczeń i naprężeń i że w stosunku do tych pól obowiązuje zasada superpozycji.

W niniejszej pracy zajmiemy się jedynie wpływem pola τ na stan naprężenia powłoki walcowej.

2. **Nierównomierny wzrost temperatury.** Wpływ ten określa drugi wyraz wzoru (1.8). Wprowadzając oznaczenie $N = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$ oraz uwzględniając związki (1.6) wyrazić możemy przemieszczenie w wywołane przez pole temperatur τ następującym wzorem:

$$(2.1) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = -N (1 + \nu) a \int_{\Omega} \tau(x, y) \nabla^2 \bar{w}(x, y; \xi, \eta) d\Omega,$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Prawą stronę związku (2.1) przedstawiającą całkę powierzchniową przekształcić możemy, zważywszy że $\nabla^2 \tau = 0$, na całkę krzywoliniową

$$(2.2) \quad \bar{1} w(\xi, \eta) = N (1 + \nu) a \int_s \left(\tau \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - \bar{w} \frac{\partial \tau}{\partial n} \right) ds.$$

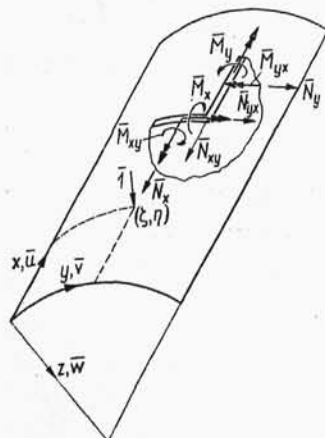
Ze wzoru (2.2) wyprowadzić można szereg wniosków pożytecznych przy rozwiązywaniu powłok o konkretnych typach warunków brzegowych. Ze wzoru tego wynika, że dla $\bar{w} = 0$ i $\partial \bar{w} / \partial n = 0$ znika przemieszczenie w . Z drugiej strony warunki $\bar{w} = 0$ i $\partial \bar{w} / \partial n = 0$ określają utwierdzenie zupełne powłoki wzdłuż brzegu¹⁾. Tak więc przy utwierdzeniu powłoki wzdłuż brzegu (brzeg może być najzupełniej dowolny) znikają przemieszczenia w . Załóżmy, że powłoka jest na części s_1 swego brzegu swobodnie podparta, a na części s_2 zupełnie utwierdzona. Ponieważ na brzegu zupeł-

¹⁾ Utwierdzenie zupełne powłoki należy tu rozumieć w sposób następujący: powłoka na brzegu nie może wykonać obrotu, ma jednak swobodę przemieszczenia w kierunku normalnej od brzegu.

nie utwierdzonym jest $\bar{w} = 0$ i $\partial \bar{w} / \partial n = 0$, a na brzegu swobodnie podpartym jest $\bar{w} = 0$, zatem

$$(2.3) \quad \bar{I} w(\xi, \eta) = N(1 + \nu) \alpha \int_{s_1} \tau \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n} ds_1.$$

W przypadku powłoki wzdłuż całego brzegu swobodnie podpartej całkowanie we wzorze (2.3) rozciąga się na cały obwód powłoki.



Rys. 2

Zajmijmy się szczegółowo ostatnio wymienionym przypadkiem podparcia. Rozwiązać należy najpierw zadanie pomocnicze: wyznaczyć funkcję $\bar{w}(x, y; \xi, \eta)$ jako przemieszczenie radialne wywołane działaniem siły skupionej \bar{I} przyłożonej w punkcie (ξ, η) powłoki (rys. 2).

Punktem wyjścia będzie równanie różniczkowe powierzchni ugięcia powłoki, podane przez W. Z. W ł a s o w a²⁾

$$(2.4) \quad \nabla^8 \bar{F} + \lambda \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial x^4} = \frac{\bar{Z}}{N}.$$

W równaniu tym \bar{Z} jest obciążeniem zewnętrznym o wektorze skierowanym wzdłuż osi z , a $\lambda = Eh/R^2 N$ jest wielkością charakteryzującą kształt powłoki. W przypadku powłoki na brzegach swobodnie podpartej funkcja \bar{F} powinna spełniać następujące warunki brzegowe:

dla $x = 0$ i $x = a$

$$(2.5.1) \quad \bar{F} = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial x^4} = \frac{\partial^6 \bar{F}}{\partial x^6} = 0 \quad (\bar{w} = \bar{v} = \bar{N}_x = \bar{M}_x = 0),$$

dla $y = 0$ i $y = b$

$$(2.5.2) \quad \bar{F} = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial y^4} = \frac{\partial^6 \bar{F}}{\partial y^6} = 0 \quad (\bar{w} = \bar{u} = \bar{N}_y = \bar{M}_y = 0).$$

Wyrażając funkcję \bar{F} oraz obciążenie \bar{Z} za pomocą podwójnych szeregów trygonometrycznych

$$(2.6) \quad \begin{cases} \bar{F} = \sum_{n,m} A_{n,m} \sin a_n x \sin \beta_m y, \\ \bar{Z} = \sum_{n,m} B_{n,m} \sin a_n x \sin \beta_m y, \end{cases} \quad \left(a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b} \right)$$

²⁾ Por. [1], s. 329.

i wstawiając (2.6) do (2.4) wyliczymy współczynniki $\bar{A}_{n,m}$ a funkcję \bar{F} przedstawimy w postaci

$$(2.7) \quad \bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{n,m} \frac{B_{n,m}}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie $D_{n,m} = (a_n^2 + \beta_m^2)^4 + \lambda a_n^4$.

Dla obciążenia siłą skupioną $\bar{1}$ działającą w punkcie (ξ, η) jest

$$B_{n,m} = \frac{4}{a b} \sin a_n \xi \sin \beta_m \eta.$$

Tak więc funkcję przemieszczeniową \bar{F} przedstawia wzór

$$(2.8) \quad \bar{F}(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{a b N} \sum_{n,m} \frac{\sin a_n \xi \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Funkcja \bar{F} związana jest z przemieszczeniem \bar{w} zależnością $\bar{w} = \nabla^4 \bar{F}$. Wykonując operację $\nabla^2 \bar{w} = \nabla^2 \bar{F}$ i wstawiając $\nabla^2 \bar{w}$ do wzoru (2.1) znajdziemy

$$(2.9) \quad w(\xi, \eta) = \frac{4(1+\nu)a}{ab} \times \\ \times \sum_{n,m} \frac{\sin a_n \xi \sin \beta_m \eta (a_n^2 + \beta_m^2)^3}{D_{n,m}} \int_{\Omega} \tau(x, y) \sin a_n x \sin \beta_m y dx dy.$$

W przypadku szczególnym stałej temperatury τ otrzymamy

$$(2.10) \quad w(\xi, \eta) = \frac{16(1+\nu)a\tau}{ab} \sum_{n,m} \frac{(a_n^2 + \beta_m^2)^3 \sin a_n \xi \sin \beta_m \eta}{a_n \beta_m [(a_n^2 + \beta_m^2)^4 + \lambda a_n^4]}.$$

Wracając do naszego podstawowego wyniku (2.9) zauważmy, że znajomość ugięcia $w(\xi, \eta)$ pozwoli określić funkcję przemieszczeniową F dla powłoki poddanej działaniu temperatury τ . Otrzymamy ją ze scałkowania związku

$$(2.11) \quad \nabla^4 F(\xi, \eta) = w(\xi, \eta).$$

Tutaj prawa strona równania jest znana; przedstawia ją wzór (2.9). Ponieważ na brzegach $x=0$ i $x=a$ powinno być $F = \partial^2 F / \partial x^2 = 0$, a na brzegach $y=0$ i $y=b$: $F = \partial^2 F / \partial y^2 = 0$, to funkcję F przedstawić można podwójnym szeregiem trygonometrycznym

$$(2.12) \quad F(\xi, \eta) = \sum_{n,m} C_{n,m} \sin a_n \xi \sin \beta_m \eta.$$

Scałkowane równanie (2.11) daje

$$(2.13) \quad F(\xi, \eta) = \frac{4(1+\nu)\alpha}{ab} \times \\ \times \sum_{n,m} \frac{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^3 \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}^2} \int_{\Omega} \tau(x, y) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y dx dy.$$

Znając funkcje $F(\xi, \eta)$ oraz $w(\xi, \eta)$ możemy już wyznaczyć wielkości sił wewnętrznych powłoki oraz składowe stanu przemieszczenia. Są one określone następującymi związkami:

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{\xi} = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}, \quad N_{\eta} = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4}, \quad N_{\xi\eta} = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}, \\ M_{\xi} = -N \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + (1+\nu)\alpha\tau \right], \\ M_{\eta} = -N \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (1+\nu)\alpha\tau \right], \\ M_{\xi\eta} = -N \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}, \\ Q_{\xi} = -N \frac{\partial}{\partial \xi} [\nabla^2 w + (1+\nu)\tau], \\ Q_{\eta} = -N \frac{\partial}{\partial \eta} [\nabla^2 w + (1+\nu)\tau], \\ u = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial \xi \partial \eta^2} - \nu \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right), \\ v = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right], \\ w = \nabla^4 F. \end{array} \right.$$

Wzory (2.14) są znanymi związkami W ł a s o w a rozszerzonymi na zagadnienia naprężeń termicznych.

Z podanych zależności łatwo przejść do zagadnienia naprężeń cieplnych w płycie prostokątnej na obwodzie swobodnie podpartej. Wystarczy we wzorach (2.14) i (2.9) postawić $R \rightarrow \infty$ i $\lambda \rightarrow 0$. Otrzymamy ze wzorów (2.14) $N_{\xi} = N_{\eta} = N_{\xi\eta} = 0$ oraz $u = v = 0$, a ze wzoru (2.9)

$$(2.15) \quad w(\xi, \eta) = \frac{4(1+\nu)\alpha}{ab} \times \\ \times \sum_{n,m} \frac{\sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \int_0^a \int_0^b \tau(x, y) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y dx dy.$$

W przypadku szczególnym $\tau = \text{const}$

$$(2.16) \quad w(\xi, \eta) = \frac{16(1+\nu)\alpha\tau}{ab} \sum_{n,m} \frac{\sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta}{\alpha_n \beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2)} \quad (n, m = 1, 3, 5, \dots).$$

Zważywszy że

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta}{\beta_m (\alpha_n^2 + \beta_m^2)} = \frac{b}{4\alpha_n^2} \left[1 - \frac{\cosh \alpha_n \left(y - \frac{b}{2} \right)}{\cosh \frac{\alpha_n b}{2}} \right],$$

możemy wzór (2.16) przedstawić w znanej postaci, [3] i [4],

$$(2.17) \quad w(\xi, \eta) = \frac{4(1+\nu)\alpha\tau}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi}{\alpha_n^3} \left[1 - \frac{\cosh \alpha_n \left(y - \frac{b}{2} \right)}{\cosh \frac{\alpha_n b}{2}} \right].$$

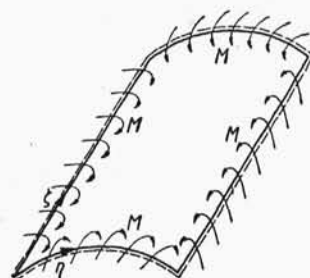
Wróćmy teraz do przypadku powłoki na wszystkich brzegach zupełnie utwardzonej. W tym przypadku jest $w = 0$.

Równanie (2.11) jest jednorodne i może być spełnione jedynie przy $F = 0$. Ze wzorów (2.14) wynika, że w tym przypadku jedynie momenty zginające i siły poprzeczne będą różne od zera:

$$(2.18) \quad \begin{cases} M_{\xi} = M_{\eta} = -N(1+\nu)\alpha\tau, \\ Q_{\xi} = -N(1+\nu)\alpha \frac{\partial \tau}{\partial \xi}, \quad Q_{\eta} = -N(1+\nu)\alpha \frac{\partial \tau}{\partial \eta}, \end{cases}$$

przy tym dla $\tau = \text{const}$ siły poprzeczne będą równe zero. Powyższe stwierdzenie posłuży do podania innej drogi rozwiązania postawionego uprzednio zadania, czyli do wyznaczenia naprężeń cieplnych występujących w powłoce na całym obwodzie swobodnie podpartej. Mianowicie ugięcie powłoki $w(\xi, \eta)$ złożymy z dwu części,

$$w(\xi, \eta) = w_1(\xi, \eta) + w_2(\xi, \eta),$$



Rys. 3

przy czym $w_1(\xi, \eta)$ niech odnosi się do powłoki poddanej działaniu temperatury, ale na brzegach zupełnie utwardzonej (a więc $w_1 = 0$), a $w_2(\xi, \eta)$ niech będzie radialnym przemieszczeniem powłoki nie poddanej działaniu temperatury ($\tau = 0$) i na wszystkich krawędziach swobodnie podpartej, ale obciążonej na brzegach momentem $M = N(1+\nu)\tau$ (rys. 3). Momenty te

posiadają przeciwny kierunek do tych, które występują na brzegach powłoki zupełnie utwardzonej. Sumując obydwa stany otrzymamy

$$(2.19) \quad \begin{cases} w(\xi, \eta) = w_1(\xi, \eta) + w_2(\xi, \eta) = w_2(\xi, \eta), \\ M_\xi = -N(1+\nu) a \tau - N \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} \right), \\ M_\eta = -N(1+\nu) a \tau - N \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} \right), \\ M_{\xi\eta} = -N(1-\nu) \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

a więc wzory zgodne z odpowiednimi wzorami (2.14), zważywszy że $w_2 = w$.

Wyznamy teraz funkcję $w_2(\xi, \eta)$. Przemieszczenie to wyrazić możemy związkiem, [5]³⁾,

$$(2.20) \quad w_2(\xi, \eta) = \frac{2}{Na} \sum_{n,m} \frac{[A_m - (-1)^n C_m] a_n + \frac{a}{b} [B_n - (-1)^m D_n] \beta_m}{(a_n^2 + \beta_m^2)^4 + \lambda a_n^4} \sin a_n \xi \sin \beta_m \eta.$$

We wzorze tym wielkości A_m, B_n, C_m i D_n są współczynnikami rozwinięcia na szereg *F o u r i e r a* momentów brzegowych $A(\eta), B(\xi), C(\eta)$ i $D(\xi)$; w naszym przypadku są to momenty o wartości $M = (1+\nu) a \tau$. Dla stałej wartości τ współczynniki *F o u r i e r a* przyjmują postać

$$(2.21) \quad A_m = C_m = \frac{4(1+\nu) a \tau N}{\pi m}, \quad B_n = D_n = \frac{4(1+\nu) a \tau N}{\pi n} \\ (m, n = 1, 3, \dots).$$

Wstawiając (2.21) do (2.20) uzyskamy

$$(2.22) \quad w_2(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) = \frac{16(1+\nu) a \tau}{a b} \sum_{n,m} \frac{\sin a_n \xi \sin \beta_m \eta (a_n^2 + \beta_m^2)^3}{a_n \beta_m [(a_n^2 + \beta_m^2)^4 + \lambda a_n^4]},$$

a więc wynik zgodny z uprzednio otrzymanym (2.10).

Rozszerzmy teraz przedstawiony sposób rozwiązania na przypadek bardziej złożony, mianowicie na przypadek powłoki, której brzegi są na

³⁾ W pracy tej wyprowadzono wzór ogólniejszy, bo uwzględniający wpływ sił ściskających przyłożonych na brzegu płyty. We wzorze tym oznaczonym (1.9) należy przyjąć $q = 0$.

przemian swobodnie podparte i utwierdzone zupełnie. Wyznaczenie powierzchni ugięcia w sprowadzić możemy tu do wyznaczenia powierzchni w_2 ze wzoru (2.20). Załóżmy, że powłoka jest zupełnie utwierdzona wzdłuż brzegów $y = 0$ i $y = b$, a swobodnie podparta na pozostałych brzegach. Wtedy współczynniki rozwinięcia Fouriera A_m i C_m są znane: są to współczynniki rozwinięcia funkcji $N(1+\nu)a\tau(0,\eta)$ i $N(1+\nu)a\tau(a,\eta)$. Współczynniki B_n i D_n są wielkościami nieznanymi. Do dyspozycji mamy jednak dwa warunki brzegowe: $\partial w_2(\xi, 0)/\partial \eta = 0$ i $\partial w_2(\xi, b)/\partial \eta = 0$. Wykorzystanie tych warunków prowadzi do układu dwu liniowych równań niejednorodnych, z których wyznaczymy współczynniki B_n i D_n .

W przypadku szczególnym $\tau = \text{const}$ mamy

$$A_m = C_m = \frac{4(1+\nu)a\tau}{\pi m} \quad (m = 1, 3, \dots).$$

Wobec symetrii powierzchni w względem osi $y = b/2$ jest $B_n = D_n$. Wzór (2.20) przyjmie zatem postać

$$(2.23) \quad w_2(\xi, \eta) = \frac{4}{Na} \sum_{n,m} \frac{\frac{4(1+\nu)a\tau a_n N}{\pi m} + \frac{a}{b} B_n \beta_m}{(a_n^2 + \beta_m^2)^4 + \lambda a_n^4} \sin a_n \xi \sin \beta_m \eta \quad (n, m = 1, 3, 5, \dots).$$

Z warunku $\partial w_2(\xi, 0)/\partial \eta = 0$, a więc z warunku zupełnego utwierdzenia powłoki wzdłuż brzegu $\eta = 0$, otrzymamy

$$(2.24) \quad B_n = - \frac{4(1+\nu)a a_n \tau N}{a} \frac{\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{D_{n,m}}}{\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}}}.$$

Moment zginający utwierdzenia, występujący wzdłuż brzegów $\eta = 0$ i $\eta = b$, przedstawia szereg

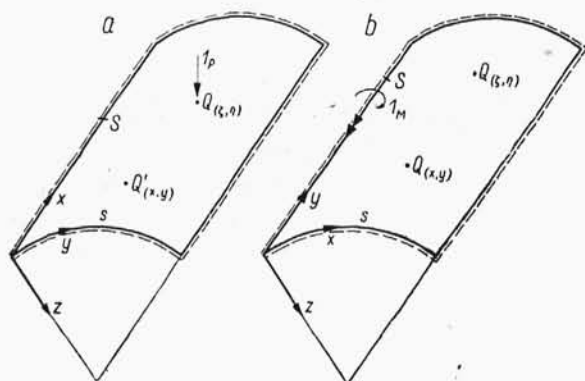
$$(2.25) \quad M_\eta(\xi, 0) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \sin a_n \xi.$$

Wstawiając B_n ze wzoru (2.24) do (2.20) otrzymamy powierzchnię w_2 . Ze wzorów (2.19) wyznaczymy wszelkie wielkości statyczne powłoki.

Wyznaczenie naprężeń cieplnych powłoki na brzegu swobodnie podpartej lub też na kolejnych odcinkach swobodnie podpartej i utwierdzonej nastąpić może na innej jeszcze drodze.

Rozważmy powłokę walcową na całym brzegu swobodnie podpartą. Niech na powłokę działa siła skupiona $P = 1_P$ przyłożona w punkcie $Q(\xi, \eta)$ i skierowana wzdłuż osi z (rys. 4a). Wywoła ona w dowolnym punkcie $Q'(x, y)$ przemieszczenie radialne $w_P(Q, Q')$. Kąt nachylenia tej powierzchni na brzegu s w punkcie S i w kierunku normalnej n oznaczmy przez $\partial w_P(Q, S)/\partial n$.

Niech teraz na brzegu s w punkcie S działa moment skupiony $M = 1_M$ o wektorze stycznym do brzegu. Wywoła on powierzchnię ugięcia



Rys. 4

$W_M(S, Q')$, a w punkcie Q ugięcie $w_M(S, Q)$ (rys. 4b). Z twierdzenia J. C. M a x w e l l a wynika, że

$$(2.26) \quad 1_P w_M(S, Q) = 1_M \frac{\partial w_P(Q, S)}{\partial n}.$$

Wiemy z poprzednich rozważań, że powierzchnię ugięcia wyznaczyć można jako powierzchnię wywołaną

w powłoce nie poddanej działaniu temperatury, a poddanej działaniu momentów zginających $M = N(1 + \nu) \alpha \tau$ przyłożonych do jej brzegu. Ugięcie zatem powłoki poddanej działaniu temperatury wyrazić można wzorem

$$(2.27) \quad w_2(Q) = \int_s M(S) w_M(S, Q) ds = \int_s M(S) \frac{\partial w_P(Q, S)}{\partial n} ds,$$

albo też

$$(2.28) \quad w_2(Q) = w(Q) = N(1 + \nu) \alpha \int_s \tau(S) w_M(S, Q) ds = N(1 + \nu) \alpha \int_s \tau(S) \frac{\partial w_P(Q, S)}{\partial n} ds.$$

Zauważmy, że ostatni wzór jest identyczny ze wzorem (2.3) dla przypadku swobodnego podparcia płyty na całym brzegu.

Rozważmy teraz powłokę, która na części brzegu s_1 jest swobodnie podparta, a na pozostałej s_2 utwierdzona zupełnie (rys. 5). Moment $M(S_1)$ występujący wzdłuż brzegu s_1 jest znany i równy $N(1 + \nu) \alpha \tau(S_1)$; wzdłuż brzegu s_2 moment $M(S_2)$ jest funkcją na razie nieznaną. Ze wzoru (2.27) otrzymamy

$$(2.29) \quad w(Q) = N(1 + \nu) \alpha \int_{s_1} \tau(S_1) w_M(S_1, Q) ds_1 + \int_{s_2} M(S_2) w_M(S_2, Q) ds_2.$$

Ale wzdłuż brzegu s_2 powinno być $\partial w(Q)/\partial n = 0$. Oznaczając pierwszą całkę wzoru (2.29) przez $w_0(Q)$ otrzymamy

$$(2.30) \quad \frac{\partial w(S'_2)}{\partial n} = 0 = \frac{\partial w_0(S'_2)}{\partial n} + \int_{s_2} M(S_2) w_M(S_2, S'_2) ds_2.$$

Оtrzymałiśmy równanie całkowe F r e d h o l m a pierwszego rodzaju. Rozwiązując je otrzymamy funkcję $M(S_2)$, a wstawiając tę ostatnią do wzoru (2.29) otrzymamy przemieszczenie w .

Wróćmy jeszcze do wzoru (2.1). Otóż występującą tam funkcję Greena — $N \nabla^2 \bar{w}(x, y; \xi, \eta)$ można na podstawie związków

$$\bar{M}_x = -N \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right),$$

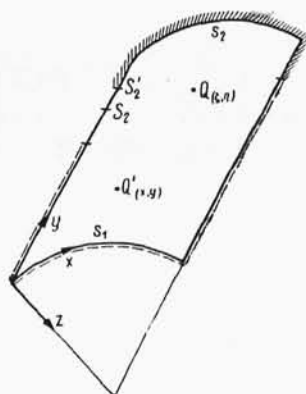
$$\bar{M}_y = -N \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)$$

traktować jako powierzchnię wpływową sumy momentów

$$\bar{M}(x, y; \xi, \eta) = \bar{M}_x(x, y; \xi, \eta) + \bar{M}_y(x, y; \xi, \eta),$$

a wzór (2.1) zapisać w postaci

$$(2.31) \quad w(\xi, \eta) = a \int_{\Omega} \tau(x, y) \bar{M}(x, y; \xi, \eta) dx dy.$$



Rys. 5

Postać ta może mieć poważne znaczenie dla płyt prostokątnych o rozmaitych warunkach brzegowych, dla których opracowano już wiele powierzchni wpływowych, [6].

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. M. M a j s i e l, *Temperaturnaja zadacza teorji uprugosti*, Kijów 1951.
- [2] W. Z. W ł a s o w, *Obszczaja teorja obołoczek i jej prilożenje w tiechnike*, Moskwa 1949.
- [3] B. G. G a l e r k i n, *Termiczieskije napriażenja w plastinkach*, Sbornik Inż. Soor., Leningrad 1924.
- [4] J. L. M a u l b e t s c h, *Thermal Stresses in Plates*, J. Appl. Mech., 2A, 141 (1935).
- [5] W. N o w a c k i, *Wyboczenie i drgania własne powłoki walcowej*, Arch. Mech. Stos. 3 (1955).
- [6] A. P u c h e r, *Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten*, Ing.-Archiv. 1941.

Резюме

ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ (I)

Работа имеет целью определить термические напряжения, вызванные в цилиндрической оболочке кругового сечения ростом температуры, изменяющейся линейно вдоль толщины пластинки, (1.1). Исход-

ной точкой решения является интегральная зависимость В. М. Майзеля, [1], [формула (1.2)], которая для случая оболочки принимает вид формулы (1.3). В этой последней формуле w есть радиальное перемещение оболочки под действием температуры, $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\sigma}_y$ — нормальные напряжения, вызванные действием единичной силы, приложенной в точке (ξ, η) по направлению оси z . Основываясь на технической теории оболочек В. З. Власова, можно зависимость (1.3) довести до вида (1.8). Эта зависимость указывает, что влияние поля τ можно отделить от влияния поля τ_0 на перемещения и напряжения в оболочке, а также, что по отношению к этим полям справедлив принцип суперпозиции. В настоящей работе подробно рассматривается влияние поля τ . Перемещение w , вызванное полем температур τ , можно представить формулой (2.1) или формулой (2.2). Из последней, можно определить несколько зависимостей. Для $\bar{w} = 0$ и $\partial \bar{w} / \partial n = 0$, следовательно для случая оболочки, зашлепленной по контуру, исчезает перемещение w . Для оболочки свободно подпертой на части s_1 ее контура, а зашлепленной на части s_2 — w определяется по формуле (2.3).

В работе приводится решение задачи для нескольких случаев опирания пластинки.

Для оболочки, свободно подпертой по контуру, расчеты ведутся следующим образом. Из уравнения В. З. Власова, (2.4), определяют функции \bar{F} и \bar{w} для оболочки, подвергаемой действию сосредоточенной силы в точке (ξ, η) и направленной вдоль оси z , применяя двойные тригонометрические ряды. Подставляя функцию $\nabla^2 w$ в формулу (2.2) и интегрируя, получают прогиб $w(\xi, \eta)$, [формула (2.9)]. При помощи уравнения (2.11) определяют функцию перемещения для оболочки, подвергаемой действию поля температур τ . Из зависимостей (2.14) определяют все статические величины и составляющие перемещений, вызванные в оболочке полем τ . Следует заметить, что в оболочке, зашлепленной по контуру, образуются лишь изгибающие моменты и поперечные силы, определенные формулами (2.18). Это утверждение позволяет рассматривать прогиб оболочки, как сумму двух прогибов: прогиба w_1 оболочки, зашлепленной по контуру и подвергаемой действию поля τ , а также прогиба w_2 оболочки, не подвергаемой действию температуры, но нагруженной по контуру изгибающими моментами $M = N(1 + \nu)\alpha\tau$. Статические величины, вызванные этими состояниями, определяют по формулам (2.19). Поверхность w_2 можно определить при помощи двойного тригонометрического ряда (2.20). В этой формуле величины A_m , B_n , C_m и D_n — коэффициенты разложения в ряд Фурье краевых моментов значением $M = N(1 + \nu)\alpha\tau$. Этот способ можно распространить на случай обо-

лочки с краями попеременно свободно подпертыми и защемленными. В случае краев вдоль $y = 0$ и $y = b$ защемленных, а остальных свободно подпертых, коэффициенты A_m и C_m известны, как коэффициенты разложения функции $N(1+\nu)\alpha\tau(0, \eta)$ и $N(1+\nu)\alpha\tau(a, \eta)$. Коэффициенты B_n и C_n — неизвестные величины. Можно их определить, используя граничные условия $\partial w_2/\partial n = 0$, на краю $y = 0$ и $y = b$.

Определение термических напряжений в оболочке свободно подпертой на краю, или на последовательных отрезках края попеременно свободно подпертой и защемленной, можно получить другим, более общим путем. Из рассмотрения двух состояний, представленных на рис. 4а и 4б, согласно положению о взаимности перемещений, вытекает зависимость (2.26). Так как прогиб оболочки $w = w_2$ можно определить как поверхность, вызванную действием изгибающих моментов $M = N(1+\nu)\alpha\tau$, приложенных на краю оболочки, то зависимость (2.28) справедлива. Для оболочки, свободно подпертой по всему контуру, $M(S)$ является известной функцией и определение поверхности $w_2 = w$ не встречается с затруднениями. В случае оболочки, свободно подпертой на части s_1 края, а замещенной на остальной части s_2 момент $M(S_2)$, выступающий на краю s_2 , является неизвестной функцией. Прогиб w_2 выражен здесь интегральной формулой (2.29). Из условия $\partial w(Q')/\partial n = 0$ на краю s_2 получают интегральное уравнение (2.30), из которого следует определить функцию $M(S_2)$.

Summary

THERMAL STRESSES IN CYLINDRICAL SHELLS (I)

The object of the paper is to determine the thermal stresses in a circular cylindrical shell due to temperature increase varying linearly across the thickness of the shell, (1.1). The starting point is W. M. M a y s e l's integral relation, [1], Eq. (12), which, in the case of a shell, takes the form of Eq. (1.3). In this equation w is the radial displacement of the shell subjected to the action of temperature, $\bar{\sigma}_x$ and $\bar{\sigma}_y$ — normal stresses due to the unit force acting at the point (ξ, η) in the direction of the z axis. On the basis of the engineer's theory of shells of V. Z. V l a s o v, the relation (1.3) can be transformed into (1.8). This relation indicates that the influence of the field τ on the state of stress and displacement in the shell can be separated from that of the field τ_0 , and that the law of superposition is valid for these fields. The influence of the field τ is investigated in this paper. The displacement w due to the tem-

perature field can be represented by Eq. (2.1) or (2.2). From the latter some relations can be determined. For $\bar{w} = 0$ and $\partial \bar{w} / \partial n = 0$, that is in the case of a shell built in at the edges, the displacement w vanishes. For a shell simply supported on the part s_1 and built in on the part s_2 of its periphery, w is found from Eq. (2.3).

In this paper the solutions are obtained for several cases of shell support.

For a shell simply supported at the edges the procedure is as follows. From V. Z. Vlasov's equation (2.4), using double trigonometric series, the functions \bar{F} and \bar{w} are determined for a shell loaded with a concentrated load at the point (ξ, η) and parallel to the z axis. Substituting $\nabla^2 w$ in Eq. (2.2) and integrating we obtain the deflection $w(\xi, \eta)$, [Eq. (2.9)]. Using Eq. (2.11) the displacement function for a shell subjected to the temperature field τ can be found. From the relations (2.14) all static quantities and the displacement components in the shell, due to the temperature field τ are found.

It is interesting to note that for a shell built in at the edges only bending moments and shearing forces determined by Eqs. (2.18) will appear. This observation permits to consider the deflection of the shell as composed of two states: the deflection w_1 of the shell built in at the edges and subjected to the action of the field τ , and the deflection w_2 of the shell not subjected to the action of temperature but loaded with bending moments $M = N(1 + \nu) a \tau$ at the edges. The statical quantities due to these states are found from Eqs. (2.19). The surface w_2 can be determined by means of a double trigonometric series (2.20). In this equation A_m, B_n, C_m and D_n are the Fourier coefficients for the bending moments $M = N(1 + \nu) a \tau$ at the edges. This method can be generalized to the case of a shell whose edges are alternately simply supported and built in. Considering the case when the edges $y = 0$ and $y = b$ are built in — the remaining edges being simply supported — the coefficients A_m and C_m are known as the coefficients of expansion of functions $N(1 + \nu) \times a \tau(0, \eta)$ and $N(1 + \nu) a \tau(a, \eta)$; the coefficients B_n and C_n are unknown. They can be determined using the boundary conditions $\partial w_2 / \partial n = 0$ at the edge $y = 0$ and $y = b$.

The determination of thermal stresses in a shell simply supported at the periphery, or having alternate segments simply supported and built in, can be done in another, more general way. Considering the two states represented in Figs. 4a and 4b we find, from the theorem of reciprocity of displacements, Eq. (2.26). Since the deflection of the shell $w = w_2$ can be determined as a surface due to the bending moments $M = N(1 + \nu) a \tau$ acting along the edge of the shell, we have Eq. (2.28). For a shell simply supported at the periphery, $M(S)$ is a known

function and the determination of the surface $w_2 = w$ is not difficult. In the case of a shell simply supported on the part s_1 of the periphery the rest, s_2 , being built in, the moment $M(S_2)$ along the edge s_2 is an unknown function. The deflection w_2 is expressed by the integral formula (2.29). From the condition $\partial w(Q')/\partial n = 0$ for s_2 , we obtain the integral equation (2.30) from which the function $M(\dot{S}_2)$ can be determined.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1955 r.
