

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

R A D A R E D A K C Y J N A

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY
JULIAN BONDER MICHAŁ BROSZKO
WACŁAW OLSZAK BOHDAN STEFANOWSKI
STANISŁAW TURSKI WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

JERZY NOWIŃSKI - REDAKTOR
TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

TOM VI WARSZAWA 1954 ZESZYT 4
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ZAGADNIENIA STATYKI I DYNAMIKI PŁYT WZMOCNIONYCH ŻEBRAMI

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

W publikacji niniejszej autor uogólnia metodę przedstawioną w pracy *Stateczność płyt prostokątnych wzmocnionych żebrami*, [1], na zagadnienia statyki i dynamiki płyt wzmocnionych żebrami. Opracowane zostały tu trzy typy zagadnień, mianowicie zginanie, jednoczesne zginanie i ściskanie względnie rozciąganie, wreszcie drgania wymuszone płyt wzmocnionych żebrami. Przy sposobności opracowania teorii jednoczesnego zginania i ściskania płyty podano rozszerzone kryteria stateczności płyt, uwzględniające sztywność skręcania żeber; w związku z drganiami wymuszonymi podano równanie warunkowe dla zagadnienia drgań swobodnych płyty. Zagadnienia potraktowano możliwie ogólnie zarówno co do typu obciążeń działających na płytę, jak i konfiguracji żeber, tak że rozwiązania zawierają liczne technicznie ważne przypadki szczególne.

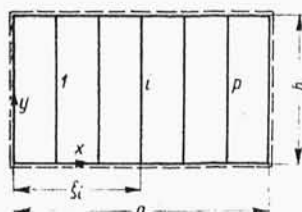
Rozwiązania nasze dotyczą płyt cienkich wzmocnionych żebrami, symetrycznie położonymi względem płaszczyzny środkowej płyty. Zakładamy zatem, że płyta i żebro posiadają wspólną oś zginania. Dalej zakładamy, że między płytą a żebrami brak naprężeń tnących przy wspólnym ich zginaniu. Założenie to, powszechnie stosowane w teorii stateczności płyt uzbrojonych żebrami, [2], [7], daje w zagadnieniach stateczności nieco niższe siły krytyczne, a więc stanowi dolne przybliżenie rzeczywistego zjawiska. Natomiast uwzględniono obok sztywności zginania żebra również jego sztywność na skręcanie, czego do tej pory nie uwzględniano w pracach poświęconych zagadnieniom stateczności płyt wzmocnionych żebrami.

Dalej zakładamy, że oddziaływania między żebrami a płytą odbywają się wzdłuż linii prostych; w ten sposób kontakt żebra z płytą odbywający się na prostokącie o szerokości równej szerokości żebra i długości równej długości żebra sprowadzamy do kontaktu wzdłuż linii prostej. Wreszcie ograniczamy ważność naszych rozwiązań do obszaru odkształceń sprężystych.

Wszelkie rozwiązania podano w dwu alternatywach: po pierwsze, przy użyciu podwójnych szeregów trygonometrycznych wygodnych w użyciu, ale ograniczających zastosowanie do płyt na wszystkich brzegach swobodnie podpartych, po drugie, przy użyciu pojedynczych szeregów trygonometrycznych, gdzie swobodne podparcie płyty ogranicza się jedynie do dwu przeciwległych brzegów płyty.

1. Zginanie płyty wzmocnionej żebrami

Niech będzie dana płyta prostokątna na brzegach swobodnie podparta. Na płytę działa obciążenie $p(x, y)$, skierowane prostopadłe do płaszczyzny środkowej płyty. Niech płyta będzie stężona p żebrami, ułożonymi równoległe do osi y . Oznaczamy przez EI_i ($i = 1, 2, \dots, p$) sztywność na zginanie poszczególnych żeber, a przez GC_i ($i = 1, 2, \dots, p$) ich sztywność na skręcanie.



Rys. 1

Pod wpływem obciążenia zewnętrznego $p(x, y)$ płyta dozna ugięcia, a wzdłuż prostych $x = \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) powstaną siły wzajemnego oddziaływania między żebrami a płytą. Składają się one z dwu części, z oddziaływań pionowych $r^{(i)}(y)$ oraz momentów $m^{(i)}(y)$. Są one funkcjami zmiennej y .

Podamy najpierw rozwiązania kilku zadań pomocniczych.

(a) Niech na płytę prostokątną nie stężoną żebrami działa obciążenie pionowe $r(y)$ wzdłuż prostej $x = \xi$. Obciążenie to można przedstawić za pomocą podwójnego szeregu trygonometrycznego w postaci

$$(1.1) \quad r = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \sin a_n \xi \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

$$a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$

Równanie różniczkowe ugięcia płyty, wywołanego tym obciążeniem, ma postać

$$(1.2) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w = r.$$

Tutaj w oznacza rzędną ugięcia płyty, a N jest jej sztywnością na zginanie.

Rozwiązaniem równania różniczkowego (1.2) będzie funkcja

$$(1.3) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Wstawiając (1.1) oraz (1.3) do równania (1.2) uzyskamy

$$(1.4) \quad a_{n,m} = \frac{2}{a} \frac{r_m \sin a_n \xi}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2}.$$

Tak więc

$$(1.5) \quad w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m \sin a_n \xi}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$D_{n,m} = N(a_n^2 + \beta_m^2)^2.$$

(b) Niech na płytę nie stężoną żebrami działa moment $m(y)$ rozłożony w sposób ciągły wzdłuż prostej $x = \xi$. Ten typ obciążenia przedstawimy sobie jako parę sił

$$\lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} f(y) \Delta \xi = m(y),$$

gdzie $f(y)$ jest pionowym obciążeniem liniowym, działającym ze znakiem dodatnim wzdłuż prostej $x = \xi + \Delta \xi$, a ze znakiem ujemnym w prostej $x = \xi$. Ta para sił wywoła ugięcie płyty

$$(1.6) \quad w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m [\sin a_n (\xi + \Delta \xi) - \sin a_n \xi]}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Przyjmując dla małych wartości $\Delta \xi$, że $\cos a_n \Delta \xi \approx 1$ oraz $\sin a_n \Delta \xi \approx a_n \Delta \xi$ otrzymamy

$$(1.7) \quad w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m a_n \cos a_n \xi}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

(c) Niech na płytę działa obciążenie $p(x, y)$. Ugięcie płyty wyraża znana funkcja

$$(1.8) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{n,m}}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie $p_{n,m}$ są współczynnikami rozwinięcia Fouriera funkcji $p(x, y)$ w podwójny szereg trygonometryczny.

Wracając do płyty uzbrojonej żebrami, na którą obok obciążenia $p(x, y)$ działają reakcje $r^{(i)}(y)$ i $m^{(i)}(y)$, wypiszemy równanie powierzchni jej ugięcia korzystając ze wzorów (1.5), (1.7) i (1.8) w sposób następujący:

$$(1.9) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{D_{n,m}} \left[p_{n,m} + \right. \\ \left. + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p (r_m^{(j)} \sin \alpha_n \xi_j + m_m^{(j)} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_j) \right].$$

Reakcje $m(y)$ i $r(y)$ działają na żebra ze znakiem przeciwnym; żebra doznają pod ich wpływem zginania i skręcania. Zginanie żebra wyrażone jest następującym równaniem różniczkowym:

$$(1.10) \quad EI_i \frac{d^4 \bar{w}_i(y)}{dy^4} = -r^{(i)}(y) \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Kąt skręcania żebra opisuje równanie różniczkowe ¹⁾

$$(1.11) \quad GC_i \frac{d^2 \bar{\varphi}_i(y)}{dy^2} = -m^{(i)}(y) \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

We wzorach tych \bar{w}_i jest rzędną ugięcia, a $\bar{\varphi}_i$ kątem skręcania i -tego żebra.

Przy założeniu swobodnego podparcia końców żeber najwygodniej będzie przedstawić rozwiązanie równań różniczkowych (1.10) oraz (1.11) przy użyciu szeregów trygonometrycznych

$$(1.12) \quad \bar{w}_i(y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(i)} \sin \beta_m y, \quad \bar{\varphi}_i(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^{(i)} \sin \beta_m y.$$

Wyrażając funkcje $r^{(i)}(y)$, $m^{(i)}(y)$ za pomocą szeregów trygonometrycznych

$$(1.13) \quad r^{(i)}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} r_m^{(i)} \sin \beta_m y, \quad m^{(i)}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} m_m^{(i)} \sin \beta_m y,$$

¹⁾ Wartości C_i podane są w pracy [8]. W przypadku żeber z profili cienkościennych należy zamiast (1.11) przyjąć odpowiednie równanie W. Z. Własowa (patrz [9]).

otrzymamy rozwiązanie równań (1.10) i (1.11) w postaci

$$(1.14) \quad \bar{w}_i(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(i)}}{EI_i \beta_m^4} \sin \beta_m y, \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

$$(1.15) \quad \bar{\varphi}_i(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m^{(i)}}{GC_i \beta_m^2} \sin \beta_m y,$$

We wzorach (1.9), (1.14) i (1.15) występują nieznane współczynniki rozwinięcia Fouriera funkcji $r^{(i)}(y)$ i $m^{(i)}(y)$. Otrzymamy je z 2p warunków wyrażających wspólność ugięcia oraz kąta obrotu płyty i żebra na prostych $x = \xi_i$.

Są to warunki

$$(1.16) \quad w(\xi_i, y) = \bar{w}_i(y), \quad \frac{\partial w(\xi_i, y)}{\partial x} = \bar{\varphi}_i(y) \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

Wstawiając do powyższych związków $w(\xi_i, y)$ ze wzoru (1.9) oraz \bar{w}_i i $\bar{\varphi}_i$ ze wzorów (1.14) i (1.15) uzyskamy układ równań

$$(1.17.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_j \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n \xi_j \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{r_m^{(i)}}{EI_i \beta_m^4} = 0,$$

$$(1.17.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n \xi_i \sin \alpha_n \xi_j}{D_{n,m}} +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \cos \alpha_n \xi_i \cos \alpha_n \xi_j}{D_{n,m}} + \frac{m_m^{(i)}}{GC_i \beta_m^2} = 0$$

$$(i=1, 2, \dots, p, \quad m=1, 2, \dots, \infty).$$

Rozwiązanie układu równań (1.17.1) i (1.17.2) daje wielkości $r_m^{(i)}$ i $m_m^{(i)}$, które wstawione do wzorów (1.9), (1.14) i (1.15) pozwalają wyznaczyć powierzchnię ugięcia płyty oraz ugięcia i skręcenia żebra. Znajomość funkcji w , \bar{w}_i i $\bar{\varphi}_i$ pozwala już na wyznaczenie dowolnej wielkości statycznej.

W przypadku gdy połączenie żeber z płytą jest tego typu, że nie dopuszcza do skręcania żeber, odpada z układu równań równanie (1.17.2), a w równaniu (1.17.1) należy przyjąć $m_m = 0$. Mamy tu

$$(1.18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_j \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{r_m^{(i)}}{EI_i \beta_m^4} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, p, \quad m = 1, 2, \dots, \infty).$$

Jeśli w równaniu (1.18) przyjmujemy $EI_i = \infty$ ($i = 1, 2, \dots, p$), to realizujemy ugięcie płyty ciągłej o niepodatnych podporach wzdłuż prostych $x = \xi_i$. Jeżeli w układzie równań (1.17.1) i (1.17.2) przyjmujemy $EI_i = \infty$ oraz $GC_i = \infty$, to realizujemy przypadek utwierdzenia zupełnego na i -tej niepodatnej podporze.

Zajmijmy się przypadkiem szczególnie prostym, mianowicie płytą kwadratową stęzoną jednym tylko żebrzem leżącym na osi symetrii układu. Niech na płytę działa obciążenie p jednostajnie rozłożone na całym jej obszarze. Ze względu na symetrię układu i obciążenia zebrzo nie dozna skręcania. Wystarczy zatem ograniczyć się do równania (1.18) przy $i = 1$, tj.

$$(1.19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m}}{D_{n,m}} \sin \alpha_n \xi_1 + r_m^{(1)} \left(\frac{1}{EI_1 \beta_m^4} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha_n \xi_1}{D_{n,m}} \right) = 0.$$

Zważywszy, że dla obciążenia stałego $p_{n,m} = 16p/nm\pi^2$ ($n = 1, 3, \dots, \infty$; $m = 1, 3, \dots, \infty$), a dalej, że przy $\xi_1 = a/2$ jest $\sin \alpha_n \xi_1 = (-1)^{(n-1)/2}$, otrzymamy z równania (1.19)

$$(1.20) \quad \frac{16pa}{\pi^2 m} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(n^2+m^2)^2} + r_m^{(1)} \left[\frac{1}{\gamma_1 m^4} + 2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2+m^2)^2} \right] = 0,$$

gdzie $\gamma_1 = EI_1/Na$.

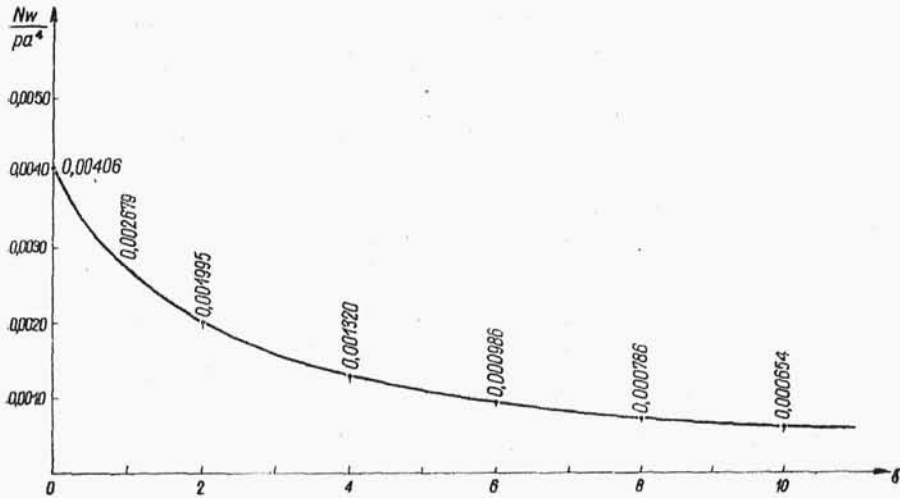
Wielkość γ_1 jest tu parametrem; w miarę jego wzrostu zmniejsza się ugięcie w i \bar{w}_1 . Dla $\gamma = \infty$ otrzymujemy przypadek niepodatnej podpory na linii żebrza, wzdłuż której

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=a/2} = 0.$$

Z równania (1.20) wyznaczono wielkości $r_m^{(1)}$ ($m=1, 3, 5, \dots$) i wstawiono do wzoru (1.9) przy założeniu $x=y=a/2$:

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{D_{n,m}} \left[p_{n,m} + \frac{2}{a} r_m^{(1)} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right].$$

Na rysunku 2 przedstawiono wykres $w=w(\gamma)$.



Rys. 2

Znaczne uproszczenie układu równań (1.17.1) i (1.17.2) daje symetria układu i obciążeń względem prostych $x=a/2$ i $y=b/2$. W tym przypadku otrzymamy przy założeniu p żeber

$$\begin{aligned} r_m^{(1)} &= r_m^{(p)}, & r_m^{(2)} &= r_m^{(p-1)}, & \dots \\ m_m^{(1)} &= -m_m^{(p)}, & m_m^{(2)} &= -m_m^{(p-1)}, & \dots \end{aligned}$$

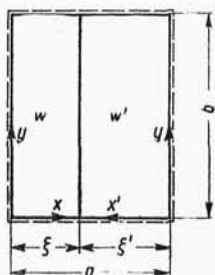
Jeśli p jest liczbą nieparzystą, to dla żebra leżącego wzdłuż prostej $\xi=a/2$ mamy

$$r_m^{(\frac{p+1}{2})} \neq 0, \quad m_m^{(\frac{p+1}{2})} = 0.$$

Przedstawiony tu sposób rozwiązywania zagadnienia zginania płyty wzmocnionej żebrami posiada pewne niedogodności, mianowicie w równaniach warunkowych (1.17.1) i (1.17.2) występują szeregi nie-

skończone. Niedogodność tę ominiemy przez wyrażenie wielkości w [wzór (1.9)] w postaci pojedynczego szeregu trygonometrycznego.

Wprowadzamy tu jednak pewne ograniczenie dotyczące obciążenia p ; zakładamy mianowicie, że jest ono niezależne od zmiennej x .



Rys. 3

Rozwiązanie zadania pomocniczego (a) wyznaczenia ugięcia wywołanego w płycie prostokątnej nie stężonej żebrami obciążeniem $r(y)$ jest znane²⁾. Przy przyjętych układach współrzędnych i oznaczeniach jak na rys. 3 powierzchnię ugięcia wywołaną obciążeniem

$$r(y) = \sum_{m=1}^{\infty} r_m \sin \beta_m y$$

wyrazimy następującymi wzorami:

$$(1.21) \quad \begin{cases} w_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m^2} (A_m \sinh \beta_m x + B_m \beta_m x \cosh \beta_m x) \sin \beta_m y \\ \quad (0 < x < \xi), \\ w'_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m^2} (A'_m \sinh \beta_m x' + B'_m \beta_m x' \cosh \beta_m x') \sin \beta_m y \\ \quad (0 < x' < \xi'). \end{cases}$$

Tutaj

$$(1.22) \quad \begin{cases} A_m = \frac{r_m}{2 N \beta_m \sinh \beta_m a} \left(\beta_m \xi \cosh \beta_m \xi' + \sinh \beta_m \xi' - \beta_m a \frac{\sinh \beta_m \xi}{\sinh \beta_m a} \right), \\ B_m = - \frac{r_m \sinh \beta_m \xi'}{2 N \beta_m \sinh \beta_m a}. \end{cases}$$

Zamieniając we wzorach (1.22) ξ na ξ' i odwrotnie, uzyskamy wielkości A'_m i B'_m .

Dla wyznaczenia powierzchni ugięcia wywołanej liniowo rozłożonymi momentami

$$m(y) = \sum_{m=1}^{\infty} m_m \sin \beta_m y$$

wzdłuż prostej $x = \xi$ wychodzimy z równań (1.21). Stałe całkowania A_m , B_m , A'_m i B'_m wyznaczmy z następujących warunków brzegowych wzdłuż prostej $x = \xi$:

²⁾ Por. [3].

$$(1.23) \quad \begin{cases} w_2 = w'_2, & \frac{\partial w_2}{\partial x} = -\frac{\partial w'_2}{\partial x'}, \\ -N \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w'_2}{\partial x'^2} \right) = m(y), & \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w'_2}{\partial x'^3} = 0. \end{cases}$$

Otrzymamy stąd

$$(1.24) \quad \begin{cases} A_m = -\frac{m_m}{2N \sinh \beta_m a} \left(\beta_m \xi \sinh \beta_m \xi' + \frac{\beta_m a \cosh \beta_m \xi}{\sinh \beta_m a} \right), \\ B_m = \frac{m_m \cosh \beta_m \xi'}{2N \sinh \beta_m a}. \end{cases}$$

Zmieniając we wzorach (1.24) ξ' na ξ otrzymamy wielkości A'_m i B'_m . Do tych samych wyników dojdziemy również na innej drodze. Z definicji momentu $m(y)$ oraz przejścia do granic [wzór (1.6)] łatwo zauważyć, że (1.7) otrzymujemy przez różniczkowanie względem ξ wzoru (1.5) i zastąpienie r_m przez m_m . Tak więc wielkości A_m i B_m dla przypadku obciążenia momentem $m(y)$ otrzymamy przez różniczkowanie względem ξ wielkości A_m i B_m ze wzorów (1.22).

Dla obciążenia $p(y)$ można podać rozwiązanie w postaci pojedynczego szeregu trygonometrycznego, [3],

$$(1.25) \quad w_0(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{\beta_m^4} \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cosh \frac{\beta_m a}{2}} \left[\left(2 + \frac{\beta_m a}{2} \tanh \frac{\beta_m a}{2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cosh \beta_m \left(x - \frac{a}{2} \right) - \beta_m \left(x - \frac{a}{2} \right) \sinh \beta_m \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] \right\} \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$p(y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin \beta_m y.$$

Zatem ugięcie płyty, na którą obok obciążenia $p(y)$ działają obciążenia $r^{(i)}(y)$ i $m^{(i)}(y)$, wyrazimy wzorem stanowiącym analogię do wzoru (1.9):

$$(1.26) \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_{m,0}(x) + \sum_{j=1}^p [w_{m,1}^{(j)}(x) + w_{m,2}^{(j)}(x)] \right\} \sin \beta_m y.$$

Z warunków (1.16) otrzymamy układ równań, w którym nie występują już sumy.

Z porównania tego układu równań z układem (1.17.1) i (1.17.2) uzyskamy

$$(1.27) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{D_{n,m}} = \frac{1}{2N\beta_m \sinh \beta_m a} \left[\left(\beta_m \xi_j \cosh \beta_m \xi'_j + \sinh \beta_m \xi'_j - \beta_m a \frac{\sinh \beta_m \xi_j}{\sinh \beta_m a} \right) \sinh \beta_m \xi_i - \sinh \beta_m \xi'_j \beta_m \xi_i \cosh \beta_m \xi_i \right] \\ (i < j),$$

$$(1.28) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{D_{n,m}} = \frac{1}{2N \sinh \beta_m a} \times \\ \times \left[\cosh \beta_m \xi'_j \beta_m \xi_i \cosh \beta_m \xi_i - \left(\beta_m \xi_j \sinh \beta_m \xi'_j + \frac{\beta_m a \cosh \beta_m \xi_j}{\sinh \beta_m a} \right) \sinh \beta_m \xi_i \right] \\ (i < j),$$

$$(1.29) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_i \cos a_n \xi_j}{D_{n,m}} = \frac{\beta_m}{2N \sinh \beta_m a} \left[\cosh \beta_m \xi'_j (\cosh \beta_m \xi_i + \beta_m \xi_i \sinh \beta_m \xi_i) - \left(\beta_m \xi_j \sinh \beta_m \xi'_j + \frac{\beta_m a \cosh \beta_m \xi_j}{\sinh \beta_m a} \right) \cosh \beta_m \xi_i \right] \\ (i < j),$$

$$(1.30) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin a_n \xi_i}{D_{n,m}} = \frac{p_m}{N\beta_m^4} \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cosh \frac{\beta_m a}{2}} \left[\left(2 + \frac{\beta_m a}{2} \operatorname{tgh} \frac{\beta_m a}{2} \right) \cosh \beta_m \left(\xi_i - \frac{a}{2} \right) - \beta_m \left(\xi_i - \frac{a}{2} \right) \sinh \beta_m \left(\xi_i - \frac{a}{2} \right) \right] \right\},$$

$$(1.31) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} a_n \cos a_n \xi_i}{D_{n,m}} = - \frac{p_m}{2N\beta_m^3 \cosh \frac{\beta_m a}{2}} \left[\left(2 + \frac{\beta_m a}{2} \operatorname{tgh} \frac{\beta_m a}{2} \right) \sinh \beta_m \left(\xi_i - \frac{a}{2} \right) - \beta_m \left(\xi_i - \frac{a}{2} \right) \cosh \beta_m \left(\xi_i - \frac{a}{2} \right) + \cosh \beta_m \left(\xi_i - \frac{a}{2} \right) \right].$$

Dla $i > j$ należy we wzorach (1.27)-(1.29) przestawić ξ_i z ξ'_i oraz ξ_j z ξ'_j .

Zauważmy, że podany tu sposób rozwiązywania zagadnienia ugięcia płyty stężonej żebrami przy użyciu pojedynczych szeregów trygonometrycznych jest bardziej ogólny; pozwala bowiem na uwzględnienie innych warunków brzegowych niż swobodne podparcie na krawędziach $x=0$, $x=a$.

Przy rozwiązywaniu zadań pomocniczych zamiast wzoru (1.21) należy przyjąć

$$(1.32) \quad \left\{ \begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m^2} (A_m \sinh \beta_m x + B_m \beta_m x \cosh \beta_m x + \\ &+ C_m \cosh \beta_m x + D_m \beta_m x \sinh \beta_m x) \sin \beta_m y \quad (0 < x < \xi), \\ w' &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m^2} (A'_m \sinh \beta_m x' + B'_m \beta_m x' \cosh \beta_m x' + \\ &+ C'_m \cosh \beta_m x' + D'_m \beta_m x' \sinh \beta_m x') \sin \beta_m y \quad (0 < x' < \xi'). \end{aligned} \right.$$

Do czterech warunków brzegowych w przekroju $x=\xi$ dołączyć należy cztery dalsze, po dwa na brzegach $x=0$ i $x'=0$.

Rozważmy wreszcie przypadek płyty stężonej żebrami podłużnymi i poprzecznymi.

Niech będzie r żeber równoległych do osi x o sztywnościach na zginanie $EI_{1,k}$ i sztywnościach na skręcanie $GC_{1,k}$ ($k=1, 2, \dots, r$) oraz p żeber równoległych do osi y o sztywnościach na zginanie $EI_{2,i}$ i sztywnościach na skręcanie $GC_{2,i}$ ($i=1, 2, \dots, p$). Rozwiązanie nasze ograniczymy do płyty na wszystkich krawędziach swobodnie podparte. Zastosujemy tu metodę podwójnych szeregów trygonometrycznych. Oznaczmy, jak dotychczas, oddziaływania i -tego żebra poprzecznego na płytę przez $r^{(i)}(y)$ oraz $m^{(i)}(y)$. Oddziaływania k -tego żebra oznaczmy przez $t^{(k)}(y)$ i $h^{(k)}(y)$.

Sumując ugięcia płyty wywołane obciążeniem zewnętrznym oraz oddziaływaniami żeber podłużnych i poprzecznych otrzymamy

$$(1.33) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m y \sin \alpha_n x}{D_{n,m}} \left[p_{n,m} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p (r_m^{(j)} \sin \alpha_n \xi_j + \right. \\ \left. + m_m^{(j)} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_j) + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r (t_n^{(h)} \sin \beta_m \eta_h + h_n^{(h)} \alpha_n \cos \beta_m \eta_h) \right].$$

Tutaj η_h oznacza odległość h -tego żebra podłużnego od prostej $y=0$.

Całkując równania różniczkowe ugięcia i skręcania żeber podłużnych i poprzecznych, a więc równania

$$(1.34) \quad \begin{cases} E I_{2,i} \frac{d^4 \bar{w}_i}{d y^4} = -r^{(i)}(y), \\ G C_{2,i} \frac{d^2 \bar{\varphi}_i}{d y^2} = -m^{(i)}(y), \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

oraz

$$(1.35) \quad \begin{cases} E I_{1,k} \frac{d^4 \bar{w}_k}{d x^4} = -t^{(k)}(x), \\ G C_{1,k} \frac{d^2 \bar{\varphi}_k}{d x^2} = -h^{(k)}(x), \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

otrzymamy

$$(1.36) \quad \bar{w}_i(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(i)} \sin \beta_m y}{E I_{2,i} \beta_m^4}, \quad \bar{\varphi}_i(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m^{(i)} \sin \beta_m y}{G C_{2,i} \beta_m^2},$$

$$(1.37) \quad \bar{w}_k(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(k)} \sin \alpha_n x}{E I_{1,k} \alpha_n^4}, \quad \bar{\varphi}_k(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^{(k)} \sin \alpha_n x}{G C_{1,k} \alpha_n^2}.$$

Z warunków jednakowych ugięć żeber i płyty,

$$(1.38) \quad w(\xi_i, y) = \bar{w}_i(y), \quad w(x, \eta_k) = \bar{w}_k(x) \\ (i = 1, 2, \dots, p, \quad k = 1, 2, \dots, r),$$

oraz z warunku jednakowego obrotu płyty i żebra*,

$$\frac{\partial w(\xi_i, y)}{\partial x} = \bar{\varphi}_i(y), \quad \frac{\partial w(x, \eta_k)}{\partial y} = \bar{\varphi}_k(x) \\ (i = 1, 2, \dots, p, \quad k = 1, 2, \dots, r),$$

otrzymamy następujący układ nieskończonej ilości równań:

$$(1.39.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_j \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \\ + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n \xi_j \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r \sin \beta_m \eta_h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(h)} \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \\ + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r \cos \beta_m \eta_h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^{(h)} \alpha_n \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{r_m^{(i)}}{E I_{2,i} \beta_m^4} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, p),$$

$$\begin{aligned}
 (1.39.2) \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p \sin \alpha_n \xi_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(j)} \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \\
 & + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p \cos \alpha_n \xi_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m^{(j)} \beta_m \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r t_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_k \sin \beta_m \eta_h}{D_{n,m}} + \\
 & + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r h_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m \cos \beta_m \eta_h \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \frac{t_n^{(k)}}{EI_{k,1} \alpha_n^4} = 0 \\
 & (k = 1, 2, \dots, r),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.39.3) \quad & \sum_{h=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin \alpha_n \xi_j \cos \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \\
 & + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \cos \alpha_n \xi_j \cos \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r \sin \beta_m \eta_h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(h)} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \\
 & + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r \cos \beta_m \eta_h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^{(h)} \alpha_n^2 \cos \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{m_m^{(i)}}{GC_{2,i} \beta_m^2} = 0 \\
 & (i = 1, 2, \dots, p),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.39.4) \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \beta_m \cos \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p \sin \alpha_n \xi_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(j)} \beta_m \cos \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \\
 & + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p \cos \alpha_n \xi_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m^{(j)} \beta_m^2 \cos \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r t_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_h \cos \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \\
 & + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r h_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 \cos \beta_m \eta_h \cos \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \frac{h_n^{(k)}}{GC_{1,k} \alpha_n^2} = 0 \\
 & (k = 1, 2, \dots, r, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad m = 1, 2, \dots, \infty).
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego nieskończonego układu równań nastąpić może jedynie w sposób przybliżony. Piętrzące się trudności rachunkowe ograniczają zasięg stosowania przedstawionej tu metody do najprostszych przypadków płyty stężonej żebrami — do płyt o nielicznych żebrach, przy wykorzystaniu symetrii układu i obciążenia.

Zauważmy jeszcze, że część sum występujących w równaniach (1.39.1)-(1.39.4) przedstawić można w postaci zamkniętej, posługując się wzorami (1.27)-(1.31) i analogicznymi wyprowadzonymi dla kierunku x^3 .

Dla przykładu zajmijmy się przypadkiem najprostszym, płytą kwadratową, stężoną dwoma wzajemnie prostopadłymi żebrami leżącymi w osiach symetrii płyty.

Niech obciążenie p będzie stałe i rozłożone na całym obszarze płyty. Niech zebra posiadają jednakowe właściwości geometryczne i sprężyste. Ze względu na symetrię układu i obciążeń jest $m(y)=0$ oraz $h(x)=0$; przebieg funkcji $r(y)$ i $t(x)$ jest jednakowy. Wystarczy zatem skorzystać z pierwszego równania układu równań (1.39).

Uzyskamy tu

$$(1.40) \quad \frac{16pa}{\pi^2 m} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(n^2+m^2)^2} + r_m \left[\frac{1}{\gamma m^4} + 2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2+m^2)^2} \right] + \\ + 2(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{r_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n^2+m^2)^2} = 0,$$

gdzie $\gamma = EI/Na$.

Ustawiamy powyższe równanie dla $m=1, 3, 5$ ograniczając się do trzech członów ostatniej sumy związku (1.40).

Zakładając, że $\gamma=10$, otrzymamy

$$\begin{aligned} 1,12435 r_1 - 0,02000 r_3 + 0,002958 r_5 + 0,24692 A &= 0, \\ -0,02000 r_1 + 0,036423 r_3 - 0,001730 r_5 + 0,003037 A &= 0, \\ 0,002958 r_1 - 0,001730 r_3 + 0,007231 r_5 + 0,000250 A &= 0. \end{aligned}$$

Pierwiastkami tego układu równań (dla $\gamma=10$) są

$$r_1 = t_1 = -0,22329 A, \quad r_3 = t_3 = -0,20562 A, \quad r_5 = t_5 = 0,007540 A.$$

Wstawiając te wartości do wzoru (1.33) znajdziemy dla środka płyty $w=0,000363 pa^4/N$, a więc wartość bez mała dwa razy mniejszą niż w przypadku płyty kwadratowej stężonej jednym tylko żebrzem.

³⁾ We wzorach (1.27)-(1.31) należy zamienić $\xi, \xi', a, m, p_m, i, j$ na $\eta, \eta', b, n, p_n, k, h$.

2. Jednoczesne zginanie i ściskanie (lub rozciąganie) płyty wzmocnionej żebrami

(A) Niech dana będzie płyta prostokątna wzmocniona żebrami poprzecznymi (rys. 4), obciążona prostopadle do swej płaszczyzny środkowej obciążeniem $p(x, y)$. Niech wzdłuż krawędzi $y = 0$ i $y = b$ działają stałe obciążenia podłużne o intensywności q .

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia ma tu postać

$$(2.1) \quad N \nabla^2 w \pm q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = n.$$

Tutaj $n(x, y)$ jest sumą obciążeń, na które składają się obciążenia $p(x, y)$, oraz oddziaływań żeber $r^{(i)}(y)$ i $m^{(i)}(y)$. Znak plus przy q we wzorze (2.1) odnosi się do obciążeń ściskających, znak ujemny do obciążeń rozciągających.

Zadanie nasze wyznaczenia powierzchni ugięcia płyty, zginania i skręcania żeber, rozwiążemy w analogiczny sposób jak w poprzednim ustępie. Sumując ugięcia płyty, wywołane obciążeniem $p(x, y)$ oraz oddziaływaniami $r^{(i)}(y)$ i $m^{(i)}(y)$, otrzymamy

$$(2.2) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{\Delta_{n,m}} \left[p_{n,m} + \sum_{j=1}^p (r_m^{(j)} \sin \alpha_n \xi_j + m_m^{(j)} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_j) \right],$$

gdzie

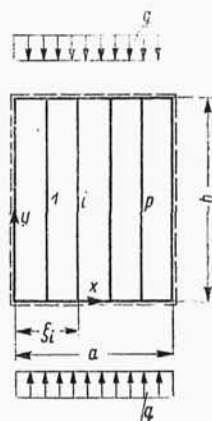
$$\Delta_{n,m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \mp q \beta_m^2.$$

Wzór (2.2) różni się od analogicznego wzoru (1.9) obecnością parametru q w mianowniku wyrażenia występującego pod znakiem sumy.

Równanie różniczkowe ugięcia żeber przyjmuje teraz odmienną postać

$$(2.3) \quad EI_i \frac{d^4 \bar{w}_i}{dy^4} \pm q A_i \frac{d^2 \bar{w}_i}{dy^2} = -r^{(i)}(y).$$

Dochodzi tu wpływ ściskania żeber, przy czym siła podłużna występująca w żebrze jest proporcjonalna do jego przekroju A_i . Równanie różniczkowe kąta skręcania pręta przyjmujemy bez zmian według wzoru (1.11).



Rys. 4

Przyjmując rozwiązanie równań (2.3) i (1.11) w postaci szeregów trygonometrycznych mamy

$$(2.4) \quad \begin{cases} \bar{w}_i(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(i)} \sin \beta_m y}{EI_i \beta_m^4 \pm A_{2,i} q \beta_m^2}, \\ \bar{\varphi}_i(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m^{(i)} \sin \beta_m y}{GC_i \beta_m^2}. \end{cases}$$

Z warunku jednakowych ugięć i obrotów na prostych $x = \xi$, to jest z warunków (1.16), otrzymamy układ równań

$$(2.5.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin a_n \xi_i}{\Delta_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{\Delta_{n,m}} +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{\Delta_{n,m}} + \frac{r_m^{(i)}}{EI_i \beta_m^4 \pm q A_i \beta_m^2} = 0,$$

$$(2.5.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} a_n \cos a_n \xi_i}{\Delta_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_i \sin a_n \xi_j}{\Delta_{n,m}} +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 \cos a_n \xi_j \cos a_n \xi_i}{\Delta_{n,m}} + \frac{m_m^{(i)}}{GC_i \beta_m^2} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, p, \quad m = 1, 2, \dots, \infty).$$

Z układu równań (2.5.1) i (2.5.2) wyznaczyć można wielkości $r_m^{(i)}$ i $m_m^{(i)}$, a ze wzoru (2.2) ugięcie płyty; ugięcie i skrócenie żebra wyznaczymy ze wzorów (2.4).

W przypadku ściskania płyty układ równań (2.5) może nie mieć rozwiązania. Nastąpi to wówczas, gdy q przyjmie wartość krytyczną. Kryterium wyboczenia układu otrzymujemy, jak wynika z rozważań nad statecznością płyt wzmocnionych żebrami, [1], z przyrównania do zera wyznacznika układu równań (2.5).

Tak więc przystępując do rozwiązania układu równań (2.5) należy określić najmniejszy pierwiastek q_{kr} , (z warunku, że wyznacznik układu powinien być równy zero), następnie najniższą wartość siły krytycznej i sprawdzić, czy q jest mniejsze od q_{kr} . Dodać należy, że przyrównanie wyznacznika układu równań (2.5) do zera daje ogólnie

niejszy warunek wybożenia, niż odpowiedni warunek podany w pracy autora [1]; uwzględnia on wpływ sztywności na skręcanie żeber.

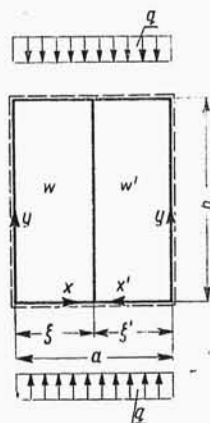
Wykażemy, że wszystkie sumy występujące w układzie równań (2.5) dadzą się zsumować.⁴⁾

Rozważmy, jak uprzednio, dwa pomocnicze zadania.

(a) Niech płyta prostokątna ściskana siłami q w kierunku osi y będzie obciążona oddziaływaniem żeber $r(y)$ wzdłuż prostej $x = \xi$ (rys. 5).

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia ma postać

$$(2.6) \quad \begin{cases} N \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ N \nabla^2 \nabla^2 w' + q \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = 0 & \text{dla } 0 < x' < \xi'. \end{cases}$$



Rys. 5

Rozwiązania układu równań (2.6) poszukujemy w postaci pojedynczych szeregów trygonometrycznych⁴⁾

$$(2.7) \quad \begin{cases} w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sinh \lambda_m x + B_m \sin \psi_m x) \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ w' = \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m \sinh \lambda_m x' + B'_m \sin \psi_m x') \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x' < \xi'. \end{cases}$$

Tutaj

$$\lambda_m = \beta_m \sqrt{\varphi_m + 1}, \quad \psi_m = \beta_m \sqrt{\varphi_m - 1},$$

gdzie

$$\varphi_m = \frac{qb^2}{N\pi^2 m^2}.$$

Z warunków brzegowych wzdłuż prostej $x = \xi$,

$$(2.8) \quad \begin{cases} w = w', & \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w'}{\partial x'}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}, & -N \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w'}{\partial x'^3} \right) = r(y), \end{cases}$$

⁴⁾ Por. [4].

i przy założeniu, że $r(y) = \sum_{m=1}^{\infty} r_m \sin \beta_m y$, wyznaczmy stałe całkowania:

$$(2.9) \quad \begin{cases} A_m = -\frac{r_m \sinh \lambda_m \xi'}{N(\psi_m^2 + \lambda_m^2) \lambda_m \sinh \lambda_m a}, & A'_m = A_m \frac{\sinh \lambda_m \xi}{\sinh \lambda_m \xi'}, \\ B_m = \frac{r_m \sin \psi_m \xi'}{N(\psi_m^2 + \lambda_m^2) \psi_m \sin \psi_m a}, & B'_m = B_m \frac{\sin \psi_m \xi}{\sin \psi_m \xi'}. \end{cases}$$

Dla momentu $m(y)$ działającego wzdłuż prostej $x = \xi$ ugięcie płyty określają równania (2.7); stałe całkowania uzyskamy ze zrózniczkowania względem ξ wyrażeń (2.9) i przez zastąpienie r_m przez m_m :

$$(2.10) \quad \begin{cases} A_m = \frac{m_m \cosh \lambda_m \xi'}{N(\psi_m^2 + \lambda_m^2) \sinh \lambda_m a}, & A'_m = -A_m \frac{\cosh \lambda_m \xi}{\cosh \lambda_m \xi'}, \\ B_m = -\frac{m_m \cos \psi_m \xi'}{N(\psi_m^2 + \lambda_m^2) \sin \psi_m a}, & B'_m = -B_m \frac{\cos \psi_m \xi}{\cos \psi_m \xi'}. \end{cases}$$

W rozwiązaniu (2.7) zakładaliśmy, że $\varphi_m = qb^2/N\pi^2 m^2$ jest większe od jedności. Zdarzyć się jednak może, że w którymś z członów szeregu (2.7) będzie $\varphi_m \leq 1$.

Dla $\varphi_m < 1$ poszukujemy rozwiązania w postaci

$$(2.11) \quad \begin{cases} w_m = (A_m \sinh \lambda_m x + B_m \sinh \varepsilon_m x) \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ w'_m = (A'_m \sinh \lambda_m x' + B'_m \sinh \varepsilon_m x') \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x' < \xi', \end{cases}$$

gdzie

$$\varepsilon_m = \beta_m \sqrt{1 - \sqrt{\varphi_m}}.$$

Z warunków brzegowych (2.8) otrzymamy

$$(2.12) \quad \begin{cases} A_m = -\frac{r_m}{N \lambda_m (\lambda_m^2 - \varepsilon_m^2)} \frac{\sinh \lambda_m \xi'}{\sinh \lambda_m a}, & A'_m = A_m \frac{\sinh \lambda_m \xi}{\sinh \lambda_m \xi'}, \\ B_m = \frac{r_m}{N \varepsilon_m (\lambda_m^2 - \varepsilon_m^2)} \frac{\sinh \varepsilon_m \xi'}{\sinh \varepsilon_m a}, & B'_m = B_m \frac{\sinh \varepsilon_m \xi}{\sinh \varepsilon_m \xi'}. \end{cases}$$

Dla obciążenia momentem $m(y)$ wzdłuż prostej $x = \xi$ stałe z równania (2.11) przyjmują postać

$$(2.13) \quad \begin{cases} A_m = \frac{r_m \cosh \lambda_m \xi'}{N(\lambda_m^2 - \varepsilon_m^2) \sinh \lambda_m a}, & A'_m = -A_m \frac{\cosh \lambda_m \xi}{\cosh \lambda_m \xi'}, \\ B_m = -\frac{m_m \cosh \varepsilon_m \xi'}{N(\lambda_m^2 - \varepsilon_m^2) \sinh \varepsilon_m a}, & B'_m = -B_m \frac{\cosh \varepsilon_m \xi}{\cosh \varepsilon_m \xi'}. \end{cases}$$

Dla $\varphi_m = 1$ poszukujemy rozwiązania w postaci

$$(2.14) \quad \begin{cases} w_m = (A_m \varrho_m x + B_m \sinh \varrho_m x) \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ w'_m = (A'_m \varrho_m x' + B'_m \sinh \varrho_m x') \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x' < \xi', \end{cases}$$

gdzie

$$\varrho_m = \beta_m \sqrt{2}.$$

Dla obciążenia $r(y)$ znajdziemy

$$(2.15) \quad \begin{cases} A_m = \frac{r_m \xi'}{Na \varrho_m^3}, & A'_m = A_m \frac{\xi}{\xi'}, \\ B_m = -\frac{r_m \sinh \varrho_m \xi'}{N \varrho_m^3 \sinh \varrho_m a}, & B'_m = B_m \frac{\sinh \varrho_m \xi}{\sinh \varrho_m \xi'}. \end{cases}$$

Dla obciążenia $m(y)$ mamy

$$(2.16) \quad \begin{cases} A_m = -\frac{m_m}{Na \varrho_m^2}, & A'_m = -A_m, \\ B_m = \frac{m_m \cosh \varrho_m \xi'}{N \varrho_m^2 \sinh \varrho_m a}, & B'_m = -B_m \frac{\cosh \varrho_m \xi}{\cosh \varrho_m \xi'}. \end{cases}$$

Założmy, że obciążenie p jest funkcją y i daje się rozłożyć w szeregi $p = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin \beta_m y$.

Całkę równania różniczkowego ugięcia płyty

$$N \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p$$

napiszemy w postaci

$$(2.17) \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{N \beta_m^4 (1 - \varphi_m)} (1 + A_m \sinh \lambda_m x + B_m \cosh \lambda_m x + C_m \sin \psi_m x + D_m \cos \psi_m x) \sin \beta_m y.$$

Po wyznaczeniu stałych całkowania z warunków brzegowych $w = 0$ i $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ wzdłuż prostych $x = 0$ i $x = a$ i wstawieniu ich do wzoru (2.17) znajdziemy

$$(2.18) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{N \beta_m^4 (1 - \varphi_m)} \left[1 + \frac{\psi_m^2}{\psi_m^2 + \lambda_m^2} \left(\tanh \frac{\lambda_m a}{2} \sinh \lambda_m x - \cosh \lambda_m x \right) - \frac{\lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \psi_m^2} \left(\tanh \frac{\psi_m a}{2} \sin \psi_m x + \cos \psi_m x \right) \right] \sin \beta_m y.$$

Założyliśmy tu $\varphi_m > 1$. Jeśli w którymś z członów szeregu (2.18) będzie $\varphi_m < 1$, to zamiast ψ_m należy wstawić $i \varepsilon_m$ ($i = \sqrt{-1}$). Wstawiając w tym wyrażeniu $\varepsilon_m = 0$ i $\lambda_m = \varrho_m = \beta_m \sqrt{2}$ znajdziemy odpowiedni wzór dla $\varphi_m = 1$.

Sumując teraz ugięcia płyty, wywołane obciążeniem $p(y)$ oraz oddziaływaniami $r^{(i)}(y)$ i $m^{(i)}(y)$; i korzystając z warunków (1.16) otrzymamy układ równań, który jest identyczny z układem (2.5). Z porównania obu układów wynika, że

$$(2.19) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_i \sin \alpha_n \xi_j}{\Delta_{n,m}} = \frac{1}{N(\psi_m^2 + \lambda_m^2)} \left(-\frac{\sinh \lambda_m \xi_j'}{\lambda_m \sinh \lambda_m a} \sinh \lambda_m \xi_i + \right. \\ \left. + \frac{\sin \psi_m \xi_j'}{\psi_m \sin \psi_m a} \sin \psi_m \xi_i \right) \quad \text{dla } j > i \text{ oraz } \varphi_m > 1,$$

$$(2.20) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n \xi_j \sin \alpha_n \xi_i}{\Delta_{n,m}} = \frac{1}{N(\psi_m^2 + \lambda_m^2)} \left(\frac{\cosh \lambda_m \xi_j'}{\sinh \lambda_m a} \sinh \lambda_m \xi_i - \right. \\ \left. - \frac{\cos \psi_m \xi_j'}{\sin \psi_m a} \sin \psi_m \xi_i \right) \quad \text{dla } j > i \text{ oraz } \varphi_m > 1,$$

$$(2.21) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \cos \alpha_n \xi_i \cos \alpha_n \xi_j}{\Delta_{n,m}} = \frac{1}{N(\psi_m^2 + \lambda_m^2)} \left(\frac{\lambda_m \cosh \lambda_m \xi_j'}{\sinh \lambda_m a} \cosh \lambda_m \xi_i - \right. \\ \left. - \frac{\psi_m \cos \psi_m \xi_j'}{\sin \psi_m a} \cos \psi_m \xi_i \right) \quad \text{dla } j > i \text{ oraz } \varphi_m > 1,$$

$$(2.22) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin \alpha_n \xi_i}{\Delta_{n,m}} = \frac{p_m}{N \beta_m^4 (1 - \varphi_m)} \left[1 + \right. \\ \left. + \frac{\psi_m^2}{\psi_m^2 + \lambda_m^2} \left(\operatorname{tgh} \frac{\lambda_m a}{2} \sinh \lambda_m \xi_i - \cosh \lambda_m \xi_i \right) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_m^2}{\psi_m^2 + \lambda_m^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_m a}{2} \sin \psi_m \xi_i + \cos \psi_m \xi_i \right) \right],$$

$$(2.23) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_i}{\Delta_{n,m}} = \\ = \frac{p_m}{N \beta_m^4 (1 - \varphi_m)} \left[\frac{\psi_m^2 \lambda_m}{\psi_m^2 + \lambda_m^2} \left(\operatorname{tgh} \frac{\lambda_m a}{2} \cosh \lambda_m \xi_i - \sinh \lambda_m \xi_i \right) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_m^2 \psi_m}{\psi_m^2 + \lambda_m^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_m a}{2} \cos \psi_m \xi_i - \sin \psi_m \xi_i \right) \right] \quad \text{dla } \varphi_m > 1.$$

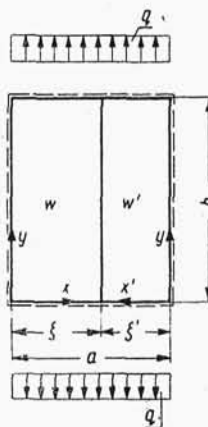
Dla $i > j$ należy zamienić ξ na ξ' .

W przypadkach kiedy $\varphi_m < 1$ albo $\varphi_m = 1$, otrzymamy wyrażenia zamknięte dla powyższych sum korzystając ze stałych całkowania (2.10), (2.13) i (2.16).

Rozważyć trzeba oddzielnie przypadek rozciągania płyty. Przypadek ten przy użyciu podwójnych szeregów trygonometrycznych został uprzednio rozwiązany. We wzorach (2.2)-(2.5) należy przyjmować dolny z dwu znaków przy q . Pozostaje nam jedynie podać wyrażenia zamknięte dla sum występujących w równaniach (2.5.1) i (2.5.2) dla przypadku rozciągającego obciążenia q .

Punktem wyjścia jest równanie różniczkowe

$$(2.24) \quad \begin{cases} N \nabla^2 \nabla^2 w - q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ N \nabla^2 \nabla^2 w' - q \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = 0 & \text{dla } 0 < x' < \xi'. \end{cases}$$



Rys. 6

Rozwiązanie tego układu równań przy uwzględnieniu warunków brzegowych swobodnego podparcia na brzegach $x = 0$ i $x = a$ daje

$$(2.25) \quad \begin{cases} w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sinh \gamma_m x \cos \delta_m x + B_m \cosh \gamma_m x \sin \delta_m x) \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ w = \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m \sinh \gamma_m x' \cos \delta_m x' + B'_m \cosh \gamma_m x' \sin \delta_m x') \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x' < \xi', \end{cases}$$

gdzie

$$\gamma_m, \delta_m = \frac{\beta_m}{2} \sqrt{\sqrt{1 + \varphi_m} \pm 1}.$$

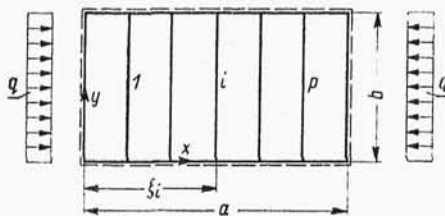
Nie wyznaczamy jednak stałych A_m, B_m, \dots dla przypadków obciążenia $r(y), m(y)$ oraz $p(y)$; są one tak złożone, że prostszą drogą będzie bezpośrednio zsumowanie wyrażeń występujących w równaniach (2.5).

(b) Niech dana będzie płyta prostokątna wzmocniona żebrami poprzecznymi (rys. 7), obciążona prostopadle do jej płaszczyzny środkowej obciążeniem p . Na krawędziach $x = 0$ oraz $x = a$ niech działa obciążenie podłużne ściskające o intensywności q .

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty ma tu postać

$$(2.26) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = n,$$

gdzie $n(x, y)$ jest sumą obciążeń działających na płytę.



Rys. 7

Ugięcie płyty wyrazimy związkiem

$$(2.27) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{B_{n,m}} [p_{n,m} + \\ + \sum_{j=1}^p (r_m^{(j)} \sin \alpha_n \xi_j + m_m^{(j)} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_j)],$$

gdzie

$$B_{n,m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q \alpha_n^2.$$

Ponieważ żebra nie są tu ściskane, to ugięcie ich wyrazi się wzorem (1.14). Dla skręcania żebra pozostaje w mocy wzór (1.16). Układ równań, z których wyznacza się współczynniki $r_m^{(i)}$ i $m_m^{(i)}$, przyjmuje postać

$$(2.28.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin \alpha_n \xi_i}{B_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_i \sin \alpha_n \xi_j}{B_{n,m}} + \\ + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n \xi_j \sin \alpha_n \xi_i}{B_{n,m}} + \frac{r_m^{(i)}}{EI_i \beta_m^4} = 0,$$

$$(2.28.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_i}{B_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n \xi_i \sin \alpha_n \xi_j}{B_{n,m}} + \\ + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \cos \alpha_n \xi_i \cos \alpha_n \xi_j}{B_{n,m}} + \frac{m_m^{(i)}}{GC_i \beta_m^2} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, p).$$

W rozpatrywanym przypadku ściskania płyty należy zbadać wyznacznik tego układu równań. Z przyrównania do zera wyznacznika wyznaczamy najmniejszy jego pierwiastek, czyli najmniejszą siłę krytyczną. Ogranicza ona od góry wartość q , którą wolno nam wstawić jako parametr do układu równań.

Wszystkie sumy występujące we wzorach (2.28.1) i (2.28.2) dadzą się zsumować.

Postępując jak w poprzednim ustępie wyznaczamy ugięcie płyty nie stężonej zębem, wywołane obciążeniami $p(y)$, $m(y)$ i $r(y)$.

Równanie różniczkowe ugięcia płyty ma tu w przypadku obciążeń liniowych $r(y)$ i $m(y)$ postać

$$(2.29) \quad \begin{cases} N \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ N \nabla^2 \nabla^2 w' + q \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} = 0 & \text{dla } 0 < x' < \xi'. \end{cases}$$

Rozwiązanie jest podane w [5]:

$$(2.30) \quad \begin{cases} w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sin \mu_m x + B_m \sin \nu_m x) \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ w' = \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m \sin \mu_m x' + B'_m \sin \nu_m x') \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x' < \xi', \end{cases}$$

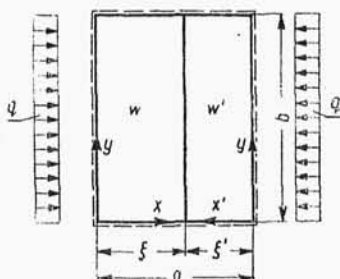
gdzie

$$\mu_m, \nu_m = \frac{\beta_m}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varphi_m - 2) \pm \sqrt{\varphi_m(\varphi_m - 4)}}, \quad \varphi_m = \frac{q}{N \beta_m^2}.$$

Założyliśmy tu, że $\varphi_m > 4$.

Postępując analogicznie jak w przypadku płyty ściskanej w kierunku osi y , otrzymamy po prostych przeliczeniach

$$(2.31) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m \sin \beta_m y}{N(\mu_m^2 - \nu_m^2)} \left(\frac{\sin \mu_m \xi'}{\mu_m \sin \mu_m a} \sin \mu_m x - \frac{\sin \nu_m \xi'}{\nu_m \sin \nu_m a} \sin \nu_m x \right) \\ \text{dla } 0 < x < \xi$$



Rys. 8

oraz

$$(2.32) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m \sin \beta_m y}{N(\mu_m^2 - \nu_m^2)} \left(-\frac{\cos \mu_m \xi'}{\sin \mu_m a} \sin \mu_m x + \frac{\cos \nu_m \xi'}{\sin \nu_m a} \sin \nu_m x \right)$$

dla $0 < x < \xi$.

Dla $0 < x' < \xi'$ otrzymamy odpowiednie powierzchnie ugięcia wstawiając we wzorach (2.31)-(2.32) ξ zamiast ξ' i na odwrót.

Z porównania wyrażeń uzyskanych przy pomocy pojedynczych i podwójnych szeregów trygonometrycznych znajdziemy

$$(2.33) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_j}{B_{n,m}} = \frac{1}{N(\mu_m^2 - \nu_m^2)} \left(\frac{\sin \mu_m \xi'_j}{\mu_m \sin \mu_m a} \sin \mu_m \xi_i - \right. \\ \left. - \frac{\sin \nu_m \xi'_j}{\nu_m \sin \nu_m a} \sin \nu_m \xi_i \right) \quad \text{dla } i > j,$$

$$(2.34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{B_{n,m}} = \frac{1}{N(\mu_m^2 - \nu_m^2)} \left(-\frac{\cos \mu_m \xi'_j}{\sin \mu_m a} \sin \mu_m \xi_i + \right. \\ \left. + \frac{\cos \nu_m \xi'_j}{\sin \nu_m a} \sin \nu_m \xi_i \right),$$

$$(2.35) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_i \cos a_n \xi_j}{B_{n,m}} = \frac{1}{N(\mu_m^2 - \nu_m^2)} \left(-\frac{\mu_m \cos \mu_m \xi'_j}{\sin \mu_m a} \cos \mu_m \xi_i + \right. \\ \left. + \frac{\nu_m \cos \nu_m \xi'_j}{\sin \nu_m a} \cos \nu_m \xi_i \right).$$

Zdarzyć się może przy przyjętym q , że w jednym z członów szeregu (2.31) i (2.32) będzie $\varphi_m < 4$ lub $\varphi_m = 1$. W tych przypadkach należy dla m -tego członą przyjąć dla $0 < x < \xi$,

$$(2.36) \quad w_m = (A_m \sinh \sigma_m x \cos \tau_m x + B_m \cosh \sigma_m x \sin \tau_m x) \sin \beta_m y,$$

$$\sigma_m = \frac{\beta_m}{2} \sqrt{4 - \varphi_m}, \quad \tau_m = \frac{\beta_m}{2} \sqrt{\varphi_m}, \quad \varphi_m < 4,$$

albo

$$(2.37) \quad w_m = (A_m \sin \beta_m x + B_m \beta_m x \cos \beta_m x) \sin \beta_m y, \quad \text{jeśli } \varphi_m = 4.$$

Założmy dalej, że obciążenie p jest funkcją jedynie zmiennej y . Rozwiązania równania różniczkowego ugięcia płyty

$$(2.38) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = p$$

poszukujemy w postaci

$$(2.39) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{N \beta_m^4} (1 + A_m \sin \mu_m x + B_m \cos \mu_m x + \\ + C_m \sin v_m x + D_m \cos v_m x) \sin \beta_m y \quad \text{dla } \varphi_m > 4.$$

Stałe całkowania wyznaczmy z warunków brzegowych

$$w = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{dla } x = 0 \text{ i } x = a.$$

Po prostych wyliczeniach uzyskamy

$$(2.40) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{N \beta_m^4} \left[1 + \frac{v_m^2}{\mu_m^2 - v_m^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\mu_m a}{2} \sin \mu_m x + \cos \mu_m x \right) - \right. \\ \left. - \frac{\mu_m^2}{\mu_m^2 - v_m^2} \left(\operatorname{tg} \frac{v_m a}{2} \sin v_m x + \cos v_m x \right) \right] \sin \beta_m y.$$

Tak więc

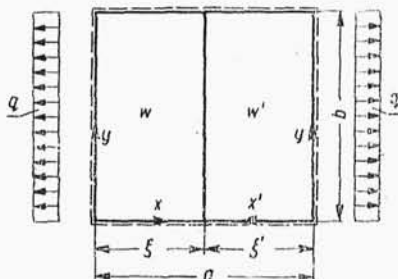
$$(2.41) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin a_n \xi_i}{B_{n,m}} = \frac{p_m}{N \beta_m^4} \left[1 + \frac{v_m^2}{\mu_m^2 - v_m^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\mu_m a}{2} \sin \mu_m \xi_i + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \mu_m \xi_i \right) - \frac{\mu_m^2}{\mu_m^2 - v_m^2} \left(\operatorname{tg} \frac{v_m a}{2} \sin v_m \xi_i + \cos v_m \xi_i \right) \right],$$

$$(2.42) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} a_n \cos a_n \xi_i}{D_{n,m}} = - \frac{p_m}{N \beta_m^4} \frac{v_m \mu_m}{\mu_m^2 - v_m^2} \left[v_m \left(\operatorname{tg} \frac{\mu_m a}{2} \cos \mu_m \xi_i + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \mu_m \xi_i \right) + \mu_m \left(\operatorname{tg} \frac{v_m a}{2} \cos v_m \xi_i - \sin v_m \xi_i \right) \right].$$

Pozostaje jeszcze rozpatrzyć przypadek rozciągania płyty stężonej żebrami. Różnica w stosunku do uprzednio rozpatrywanego przypadku polega na tym, że dla przypadku rozciągania mamy $B_{n,m} = N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + q a_n^2$. Również i tu wszystkie sumy występujące w układzie równań (2.28) dadzą się zsumować.

Postępując tą samą drogą co w przypadku sił ściskających, opieramy się na równaniach powierzchni ugięcia

$$(2.43) \quad \begin{cases} N V^2 V^2 w - q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ N V^2 V^2 w' - q \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0 & \text{dla } 0 < x' < \xi'. \end{cases}$$



Rys. 9

Rozwiązaniem tych równań, przy uwzględnieniu warunków swobodnego podparcia wzdłuż krawędzi $x = 0$ i $x = a$, są szeregi

$$(2.44) \quad \begin{cases} w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sinh \chi_m x + B_m \sinh \zeta_m x) \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ w' = \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m \sinh \chi_m x' + B'_m \sinh \zeta_m x') \sin \beta_m y & \text{dla } 0 < x' < \xi'. \end{cases}$$

gdzie

$$\chi_m, \zeta_m = \frac{\beta_m}{\sqrt{2}} \sqrt{(2 + \varphi_m) \pm \sqrt{\varphi_m(4 + \varphi_m)}}, \quad \varphi_m = \frac{q}{N \beta_m^2}.$$

Po wyznaczeniu stałych całkowania dla obciążeń liniowych $r(y)$ i $m(y)$ i porównaniu wzorów na ugięcie uzyskanych dla tych obciążeń za pomocą pojedynczych i podwójnych szeregów trygonometrycznych otrzymamy

$$(2.45) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_j}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + q a_n^2} = \frac{1}{N(\chi_m^2 - \zeta_m^2)} \left(\frac{\sinh \zeta_m \xi_j'}{\zeta_m \sinh \zeta_m a} \sinh \zeta_m \xi_i - \frac{\sinh \chi_m \xi_j'}{\chi_m \sinh \chi_m a} \sinh \chi_m \xi_i \right).$$

$$(2.46) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + q a_n^2} = \frac{1}{N(\chi_m^2 - \zeta_m^2)} \left(-\frac{\cosh \zeta_m \xi_j'}{\sinh \zeta_m a} \sinh \zeta_m \xi_i + \right. \\ \left. + \frac{\cosh \chi_m \xi_j'}{\sinh \chi_m a} \sinh \chi_m \xi_i \right),$$

$$(2.47) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 \cos a_n \xi_j \cos a_n \xi_i}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + q a_n^2} = \frac{1}{N(\chi_m^2 - \zeta_m^2)} \left(-\frac{\zeta_m \cosh \zeta_m \xi_j'}{\sinh \zeta_m a} \cosh \zeta_m \xi_i + \right. \\ \left. + \frac{\chi_m \cosh \chi_m \xi_j'}{\sinh \chi_m a} \cosh \chi_m \xi_i \right).$$

Powyższe wzory są słuszne dla $j > i$. Dla $j < i$ należy zamienić ξ na ξ' .

Założmy, że obciążenie p działające na płytę jest funkcją jedynie zmiennej y .

Rozwiązanie równania różniczkowego tak obciążonej płyty

$$(2.48) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w - q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p,$$

przyjmiemy w postaci

$$(2.49) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{N \beta_m^4} (1 + A_m \sinh \chi_m x + B_m \cosh \chi_m x + C_m \sinh \zeta_m x + \\ + D_m \cosh \zeta_m x) \sin \beta_m y.$$

Uwzględniając warunki swobodnego podparcia płyty wzdłuż brzegów $x=0$ i $x=a$ otrzymamy

$$(2.50) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m \sin \beta_m y}{N \beta_m^4} \left[1 - \frac{\zeta_m^2}{\chi_m^2 - \zeta_m^2} \left(\tanh \frac{\chi_m a}{2} \sinh \chi_m x - \right. \right. \\ \left. \left. - \cosh \chi_m x \right) - \frac{\chi_m^2}{\chi_m^2 - \zeta_m^2} \left(\cosh \zeta_m x - \tanh \frac{\zeta_m a}{2} \sinh \zeta_m x \right) \right].$$

Porównując wzór (2.50) z poniższym, przedstawiającym ugięcie płyty dla tego samego obciążenia:

$$(2.51) \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin a_n x \sin \beta_m y}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + q a_n^2},$$

znajdziemy przy $x = \xi_i$ odpowiednie wyrażenie zamknięte dla sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin a_n \xi_i}{N (a_n^2 + \beta_m^2)^2 + q a_n^2}.$$

Różniczkując oba wymienione wzory względem x i wstawiając $x = \xi_i$ otrzymamy wyrażenie zamknięte dla sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} a_n \cos a_n \xi_i}{N (a_n^2 + \beta_m^2)^2 + q a_n^2}.$$

(c) Przedstawione w częściach (a) i (b) niniejszego ustępu zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania lub rozciągania płyt stężonych żebrem można jeszcze uogólnić przy użyciu pojedynczych szeregów trygonometrycznych na inne podparcie brzegów niż swobodne wzdłuż prostych $x=0$ i $x=a$. We wszystkich pomocniczych zadaniach dotyczących wyznaczania powierzchni ugięcia, wywołanej obciążeniami $r(y)$ i $m(y)$ przyjmowaliśmy funkcje w i w' w postaci, spełniającej już warunki swobodnego podparcia wzdłuż brzegów $x=0$ i $x=a$. Uzupełniając rozwiązania dla w i w' funkcjami symetrycznymi i dalszymi dwiema stałymi całkowania, możemy uwzględnić dowolne warunki brzegowe (zarówno jednorodne, jak i niejednorodne) wzdłuż prostych $x=0$ i $x=a$.

Dalsze uogólnienie polega na łącznym obciążeniu płyty obciążeniem podłużnym q_1 w kierunku osi x oraz q_2 w kierunku osi y . Ponadto uwzględnić można siły skupione P_i , ściskające względnie rozciągające, działające bezpośrednio na żebra.

Układ równań, z których wyznacza się współczynniki $r_m^{(i)}$ oraz $m_m^{(i)}$, przyjmie tu postać

$$(2.52.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m}}{C_{n,m}} \sin a_n \xi_i + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_j}{C_{n,m}} + \\ + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{C_{n,m}} + \frac{r_m^{(i)}}{EI_i \beta_m^4 + (A_{2,i} q_2 + P_i) \beta_m^2} = 0,$$

$$(2.52.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} a_n \cos a_n \xi_i}{C_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_i \sin a_n \xi_j}{C_{n,m}} + \\ + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_i \cos a_n \xi_j}{C_{n,m}} + \frac{m_m^{(i)}}{G C_i \beta_m^2} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, p, \quad m = 1, 2, \dots, \infty),$$

gdzie

$$C_{n,m} = N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 \mp q_1 a_n^2 \mp q_2 \beta_m^2.$$

W powyższym układzie równań q_1 , q_2 oraz P_i są wartościami dodatnimi; znaki ujemne przy tych wielkościach odnoszą się do sił ściskających, znaki dodatnie do sił rozciągających.

Po wyznaczeniu współczynników $r_m^{(i)}$ i $m_m^{(i)}$ otrzymamy ugięcie płyty ze wzoru

$$(2.53) \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin a_n x \sin \beta_m y}{C_{n,m}} \times \left[p_{n,m} + \sum_{j=1}^p (r_m^{(j)} \sin a_n \xi_j + m_m^{(j)} a_n \cos a_n \xi_j) \right],$$

a linię ugięcia ze wzoru

$$(2.54) \quad \bar{w}_i(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(i)} \sin \beta_m y}{E I_i \beta_m^4 \mp (A_{2,i} q_2 + P_i) \beta_m^2}.$$

Kąt skreślenia żebra znajdziemy ze wzoru

$$(2.55) \quad \bar{\varphi}_i(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m^{(i)} \sin \beta_m y}{G C_i \beta_m^2}.$$

W rozpatrywanym tu bardzo ogólnym przypadku można, postępując drogą wskazaną w ustępach (a) i (b), zsumować wszystkie sumy występujące w układzie równań (2.52).

W najogólniejszym przypadku płyty wzmocnionej żebrami podłużnymi i poprzecznymi (rys. 10), przy obciążeniu p , q_1 i q_2 oraz $P_{1,k}$ i $P_{2,i}$, otrzymamy dla wyznaczenia współczynników $r_m^{(i)}$, $m_m^{(i)}$, $t_n^{(k)}$ i $h_n^{(k)}$ układ równań analogicznych do układu (1.39), z tą jednak różnicą, że zamiast $D_{n,m}$ wstawić należy $D_{n,m} = N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 \mp (q_1 a_n^2 + q_2 \beta_m^2)$, zamiast $r_m^{(i)}/E I_i \beta_m^4$ wielkość

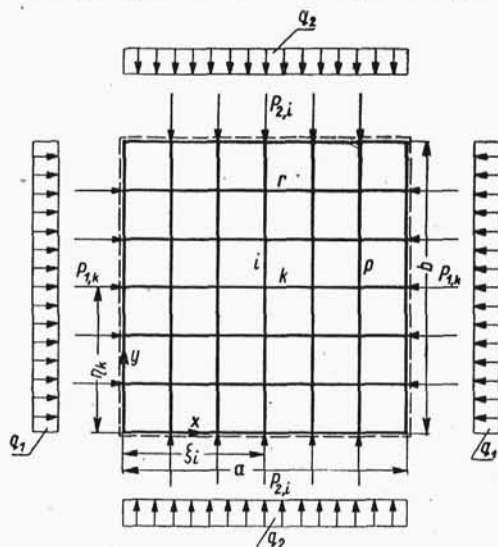
$$\frac{r_m^{(i)}}{E I_i \beta_m^4 \mp (A_{2,i} q_2 + P_{2,i}) \beta_m^2},$$

zamiast $t_n^{(k)}/E I_k a_n^4$ wielkość

$$\frac{t_n^{(k)}}{E I_k a_n^4 \mp (A_{1,k} q_1 + P_{1,k}) \beta_m^2}.$$

Trzy pierwsze sumy występujące w tym układzie równań dadzą się zsumować. Trudności jednak nawet przybliżonego rozwiązania tego

układu ograniczają zakres podanej tu metody do kilku krzyżujących się żeber, ułożonych symetrycznie względem obu osi symetrii płyty. W szczególnie prostym przypadku płyty kwadratowej stężonej jednakowymi żebrami krzyżującymi się na osi symetrii płyty i przy obciąż-



Rys. 10

zeniu p jednostajnie rozłożonym na obszarze płyty, dalej przy $q_1 = q_2 = q$ oraz $P_1 = P_2 = 0$, znajdziemy współczynniki r_m z równania

$$\frac{16pa}{\pi^2 m} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n H_{n,m}} + r_m \left(\frac{1}{\gamma m^4 - \delta m^2} + 2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{H_{n,m}} \right) +$$

$$+ \frac{2}{a} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{t_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{H_{n,m}} = 0 \quad (m = 1, 3, \dots, \infty).$$

Tutaj jest

$$\gamma = \frac{EI}{Na}, \quad H = (n^2 + m^2)^2 - s(n^2 + m^2),$$

$$s = \frac{q}{q_E}, \quad q_E = \frac{N\pi^2}{a^2}, \quad \delta = \frac{A}{a}.$$

Ze względu na symetrię obciążeń układu, a zatem i jednakowy przebieg funkcji r i t , można w powyższym równaniu wstawić r_n zamiast t_n .

3. Drgania własne i wymuszone płyty wzmocnionej żebrami

Niech dana będzie płyta prostokątna na wszystkich swych brzegach swobodnie podparta. Płyta niech będzie stężona p żebrami poprzecznymi o sztywności na zginanie EI_i i sztywności na skręcanie GC_i ($i = 1, 2, \dots, p$). Prostopadle do płaszczyzny płyty niech działa obciążenie okresowo zmienne $p(x, y, t) = p(x, y) \sin \omega t$.

Pod wpływem obciążenia płyta dozna ugięcia, a wzdłuż prostych $x = \xi$ powstaną siły wzajemnego oddziaływania $r^{(i)}(y) \sin \omega t$ oraz $m^{(i)}(y) \sin \omega t$. Równanie różniczkowe ugięcia płyty przyjmie tu postać

$$(3.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w(x, y, t) + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = n(x, y, t),$$

gdzie $n(x, y, t)$ jest sumą obciążeń, na którą składają się obciążenia $p(x, y) \sin \omega t$ oraz oddziaływanie żebra, a μ jest masą odniesioną do jednostki powierzchni środkowej.

Sumując ugięcie wywołane obciążeniem p , r i m otrzymamy przy użyciu podwójnych szeregów trygonometrycznych

$$(3.2) \quad w = \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{M_{n,m}} \times \\ \times \left[p_{n,m} + \sum_{j=1}^p (r_m^{(j)} \sin \alpha_n \xi_j + m_m^{(j)} \alpha_n \cos \alpha_n \xi_j) \right],$$

gdzie

$$M_{n,m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - \mu \omega^2.$$

Pod wpływem obciążenia żebra doznają drgań zginających poprzecznych i drgań skrętnych.

Dla drgań poprzecznych mamy do dyspozycji równanie różniczkowe

$$(3.3) \quad EI_i \frac{\partial^4 \bar{w}_i(y, t)}{\partial y^4} + \mu_{2,i} \frac{\partial^2 \bar{w}_i(y, t)}{\partial t^2} = -r^{(i)}(y) \sin \omega t \\ (i = 1, 2, \dots, p).$$

Drgania skrętne opisane są równaniem

$$(3.4) \quad GC_i \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i(y, t)}{\partial y^2} + c_{2,i} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i(y, t)}{\partial t^2} = -m^{(i)}(y) \sin \omega t \\ (i = 1, 2, \dots, p).$$

Przy założeniu swobodnego podparcia żeber rozwiązanie równań (3.3) i (3.4) można przedstawić w postaci

$$(3.5) \quad \bar{w}_i(y, t) = \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(i)} \sin \beta_m y}{E I_i \beta_m^4 - \mu_{2,i} \omega^2}, \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

$$(3.6) \quad \bar{\varphi}_i(y, t) = \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m^{(i)} \sin \beta_m y}{G C_i \beta_m^2 - c_{2,i} \omega^2},$$

Nieznane współczynniki $r_m^{(i)}$ i $m_m^{(i)}$ wyznaczymy ze związków

$$(3.7) \quad w(\xi_i, y, t) = \bar{w}_i(y, t), \quad \frac{\partial w(\xi_i, y, t)}{\partial x} = \bar{\varphi}_i(y, t) \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

Prowadzą one do układu równań

$$(3.7.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} \sin a_n \xi_i}{M_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_j}{M_{n,m}} +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{M_{n,m}} + \frac{r_m^{(i)}}{E I_i \beta_m^4 - \mu_{2,i} \omega^2} = 0,$$

$$(3.7.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n,m} a_n \cos a_n \xi_i}{M_{n,m}} + \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p r_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_i \sin a_n \xi_j}{M_{n,m}} +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p m_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 \cos a_n \xi_i \cos a_n \xi_j}{M_{n,m}} + \frac{m_m^{(i)}}{G C_{2,i} \beta_m^2 - c_{2,i} \omega^2} = 0$$

$$(i=1, 2, \dots, p, \quad m=1, 2, \dots, \infty).$$

Rozwiązanie tego układu^{*} jest jednoznaczne w przypadku różnej od zera wartości wyznacznika układu. Przyrównanie do zera wyznacznika układu jest warunkiem drgań własnych układu. W tym bowiem przypadku, przy $p=0$, układ równań (3.7) będzie niesprzeczny tylko przy zerowej wartości wyznacznika układu. Pierwiastki przyrównanego do zera wyznacznika układu równań (3.7) dają częstotliwości drgań własnych. Tak więc przy rozwiązywaniu układu równań niejednorodnych (3.7) baczyc należy na to, aby często-

tliwość drgań wymuszających nie pokrywała się z jakąkolwiek częstotliwością drgań własnych. Można okazać, że wszystkie sumy występujące w układzie równań (3.7) dadzą się przedstawić w postaci wyrażeń zamkniętych.

Postępując drogą wskazaną w ustępie pierwszym i drugim niniejszej pracy otrzymamy tu ⁵⁾

$$(3.8) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{M_{n,m}} = \\ = \frac{1}{N(\phi_m^2 + \psi_m^2)} \left(\frac{\sin \psi_m \xi'_j}{\psi_m \sin \psi_m a} \sin \psi_m \xi_i - \frac{\sinh \phi_m \xi'_j}{\phi_m \sinh \phi_m a} \sinh \phi_m \xi_i \right),$$

$$(3.9) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{M_{n,m}} = \\ = \frac{1}{N(\phi_m^2 + \psi_m^2)} \left(-\frac{\cos \psi_m \xi'_j}{\sin \psi_m a} \sin \psi_m \xi_i + \frac{\cosh \phi_m \xi'_j}{\phi_m \sinh \phi_m a} \sinh \phi_m \xi_i \right),$$

$$(3.10) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n \xi_i \cos a_n \xi_j}{M_{n,m}} = \\ = \frac{1}{N(\phi_m^2 + \psi_m^2)} \left(-\frac{\psi_m \cos \psi_m \xi'_j}{\sin \psi_m a} \cos \psi_m \xi_i + \frac{\phi_m \cosh \phi_m \xi'_j}{\sinh \phi_m a} \cosh \phi_m \xi_i \right).$$

Wzory powyższe są słuszne dla $j > i$. Wprowadziliśmy przy tym oznaczenia

$$\phi_m, \psi_m = \beta_m \sqrt{\vartheta_m \pm 1},$$

gdzie $\vartheta_m = \mu \omega^2 / N \beta_m^4$. Wzory (3.8)-(3.10) są słuszne dla $\vartheta_m > 1$. Nie podajemy tu wzorów dla $\vartheta_m \leq 1$; uzyskać je można łatwo przez analogię ze wzorami (2.11) i (2.14).

Dla obciążenia $p(y) \sin \omega t$ działającego na nie wzmocnioną żebrami płytę otrzymamy

$$(3.11) \quad w = \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m \sin \beta_m y}{N \beta_m^4 (1 - \vartheta_m)} \left[1 + \frac{\psi_m^2}{\phi_m^2 + \psi_m^2} \left(\tanh \frac{\phi_m a}{2} \sinh \phi_m x - \cosh \phi_m x \right) - \frac{\phi_m^2}{\phi_m^2 + \psi_m^2} \left(\tanh \frac{\psi_m a}{2} \sin \psi_m x + \cos \psi_m x \right) \right].$$

⁵⁾ Patrz [6].

Wstawiając w wyrażeniach dla w i $\partial w / \partial x$ ze wzoru (3.11) $x = \xi$, otrzymamy pierwszą sumę występującą w równaniach (3.7.1) i (3.7.2).

Rozważmy tu szczegółowiej drgania wymuszone płyty kwadratowej wzmocnionej jednym żebrem leżącym na osi $x = a/2$. Przyjmiemy tu obciążenie $p \sin \omega t$ jednostajnie rozłożone na obszarze płyty. Posłużymy się pojedynczymi szeregami trygonometrycznymi. Z pierwszego równania układu równań (3.7) przy użyciu wzorów (3.8) i (3.11) otrzymamy

$$(3.12) \quad a_{m,p} + m_m \left(a_{m,1} + \frac{1}{EI \beta_m^4 - \mu_0 \omega^2} \right) = 0,$$

gdzie

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{m,p} &= \frac{p_m}{N \beta_m^4 (1 - \vartheta_m)} \left(1 - \frac{\psi_m^2}{\psi_m^2 + \phi_m^2} \frac{1}{\cosh \frac{\phi_m a}{2}} - \frac{\psi_m^2}{\psi_m^2 + \phi_m^2} \frac{1}{\cos \frac{\psi_m a}{2}} \right), \\ a_{m,1} &= \frac{1}{N (\phi_m^2 + \psi_m^2)} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\psi_m a}{2}}{\psi_m} - \frac{\operatorname{tgh} \frac{\phi_m a}{2}}{\phi_m} \right). \end{aligned} \right.$$

Ugięcie punktu środkowego płyty otrzymamy ze wzoru

$$(3.14) \quad w \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, t \right) = \sin \omega t \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (a_{m,p} + r_m a_{m,1});$$

stąd

$$w \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, t \right) = \sin \omega t \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} a_{m,p} \left(1 - \frac{a_{m,1}}{a_{m,p} + \frac{1}{EI \beta_m^4 - \mu_0 \omega^2}} \right).$$

Z ostatniego wyrażenia wynika, że $w \rightarrow \infty$, gdy

$$a_{m,1} + \frac{1}{EI \beta_m^4 - \mu_0 \omega^2} = 0.$$

Jest to jednocześnie warunek drgań własnych płyty stężonej żebrem. Z równania przestępnego

$$(3.15) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi_m a}{2}}{\frac{\psi_m a}{2}} - \frac{\operatorname{tgh} \frac{\phi_m a}{2}}{\frac{\phi_m a}{2}} + \frac{4 \sqrt{\vartheta_m}}{\gamma m^2 \pi^2 - \frac{\delta \omega^2}{m^2 \pi^2}} = 0,$$

gdzie

$$\gamma = \frac{EI}{Na}, \quad \delta = \frac{\mu_0 a^3}{N},$$

otrzymujemy nieskończoną ilość pierwiastków. Zauważmy jednak, że wobec przyjętego obciążenia symetrycznie rozłożonego względem prostej $x=a/2$, równanie przestępne (3.15) daje jedynie częstotliwości związane z symetryczną postacią drgań płyty względem $x=a/2$.

Znacznie prościej przedstawia się warunek drgań swobodnych przy użyciu podwójnych szeregow. Mamy tu

$$(3.16) \quad 2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2+m^2)^2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} + \frac{1}{\gamma m^4 - \frac{\delta \omega^2}{\pi^4}} = 0,$$

gdzie

$$\omega_0^2 = \frac{N \pi^4}{a^4 \mu}.$$

Bez trudu wyznaczyć można z powyższego równania wartość ω dla danych parametrów γ i δ lub dla danego ω wyznaczyć parametry γ i δ . Dla przykładu wyznaczmy tę wartość parametrów γ i δ , przy których możliwa jest zarówno symetryczna jak i antysymetryczna postać drgań płyty w kierunku osi x . Wiadomo, że dla postaci drgań o dwu półfalach z linią węzłową wzdłuż prostej $x=a/2$ częstotliwość wyraża się wzorem

$$\omega_1^2 = \left[\frac{N \pi^4}{\mu a^4} (n^2 + m^2)^2 \right]_{n=2, m=1} = 25.$$

Wstawiając powyższą wartość ω_1 oraz $m=1$ do (3.16) otrzymamy proste związki między γ i δ .

Zagadnienie drgań płyt wzmocnionych jednokierunkowymi żebrami bez trudu rozszerzyć można na przypadek krzyżujących się żeber. Dla wyznaczenia nieznanymi współczynników $r_m^{(i)}$, $m_m^{(i)}$, $t_n^{(k)}$ i $h_n^{(k)}$ ($i=1, 2, \dots, p$; $k=1, 2, \dots, r$) skorzystać można z układu równań (1.17), z tym jednak, że zamiast $D_{n,m}$ wstawić należy $M_{n,m}$, zamiast $r_m^{(i)}/EI_i \beta_m^4$ wartość $r_m^{(i)}/(EI_i \beta_m^4 - \mu_{2,i} \omega^2)$, zamiast $t_n^{(k)}/EI_k \alpha_n^4$ wartość $t_n^{(k)}/(EI_k \alpha_n^4 - \mu_{1,k} \omega^2)$, zamiast $m_m^{(i)}/GC_{2,i} \beta_m^2$ wartość $m_m^{(i)}/(GC_{2,i} \beta_m^2 - c_{2,i} \omega^2)$, wreszcie zamiast $h_n^{(k)}/GC_{1,k} \alpha_n^2$ wartość $h_n^{(k)}/(GC_{1,k} \alpha_n^2 - c_{1,k} \omega^2)$.

Drugim kierunkiem naszych uogólnień jest uwzględnienie wpływu stałych sił ściskających, równomiernie rozłożonych na obwodzie płyty. Na przykład dla płyty wzmocnionej żebrami poprzecznymi, ściskanej stałym i niezależnym od czasu obciążeniem q na brzegach $x=0$ i $x=a$, otrzymamy dla obciążenia $p(x, y) \sin \omega t$ układ równań analogiczny do układu równań (2.5) z tym zastrzeżeniem, że zamiast $\Delta_{n,m}$

wstawić należy $N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - q a_n^2 - \mu \omega^2$, zamiast $r_m^{(i)}/E I_i \beta_m^4$ wielkość $r_m^{(i)}/(E I_i \beta_m^4 - \mu_{2,i} \omega^2)$ i zamiast $m_m^{(i)}/G C_i \beta_m^2$ wielkość $m_m^{(i)}/(G C_i \beta_m^2 - c_{2,i} \omega^2)$.

Układ tych równań będzie niesprzeczny, gdy wyznacznik układu równań będzie różny od zera. Z przyrównania do zera wyznacznika układu (przy $p_{n,m} = 0$) otrzymamy warunek, z którego wyznaczyć można częstotliwości drgań układu przy udziale sił podłużnych q . Wykazać można, że ze wzrostem q częstotliwość drgań własnych maleje i dla q dążącego do krytycznej wartości q_{kr} częstotliwość drgań własnych dąży do zera. Łatwo to stwierdzić przyjmując w omawianym układzie równań $\omega = 0$. Otrzymujemy stąd warunek wyboczenia płyty. Ze wzrostem sił rozciągających q częstotliwość drgań płyty rośnie.

Wreszcie zagadnienie drgań własnych rozszerzyć można na przypadek płyty wzmocnionej rusztem żeber przy udziale stałych i niezależnych od czasu obciążeń q_1 , q_2 , $P_{2,i}$ oraz $P_{1,k}$.

Otrzymamy układ równań analogiczny do układu (1.39). Większość sum występujących w tych równaniach daje się zsumować.

Przedstawiona tu ogólna metoda rozwiązywania podstawowych zagadnień statyki i dynamiki płyt wzmocnionych żebrami pozwala na bezpośrednie całkowanie równań różniczkowych bez uciekania się, jak to dotychczas czyniono, do metod przybliżonych, głównie energetycznych. Dopuszcza ona również prostą interpretację statyczną. Dla większej ilości żeber rosną jednak niepominiernie trudności rachunkowe, wobec czego szukać należy rozwiązań na innej drodze. Jednym z kierunków dalszych badań, których wyniki będą przedstawione w następnych pracach, to zastąpienie płyty wzmocnionej gęstą siatką żeber modelem płyty ortotropowej.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Nowacki, *Stateczność płyt wzmocnionych żebrami*, Arch. Mech. Stos., t. 6, 2 (1954).
- [2] S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, New York 1936.
- [3] K. Girkmann, *Flächentragwerke*, II wyd., Wiedeń 1948.
- [4] W. Nowacki, *O pewnych szczególnych przypadkach wyboczenia płyt*, Arch. Mech. Stos., t. 2, 2 (1950).
- [5] W. Nowacki, *Jednoczesne zginanie i ściskanie pewnego typu płyt ciągłych*, Arch. Mech. Stos., t. 1, 1 (1949).
- [6] W. Nowacki, *Drgania własne i wymuszone pewnego typu płyt ciągłych*, Księga Zjazdowa PZITB, wydawn. Min. Budown., nr 37, Gdańsk 1949.
- [7] J. Nałeszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Warszawa 1953.
- [8] C. Weber, *Die Lehre von der Verdrehungsfestigkeit*, Forsch. Arb. Wes., 249, 1921.
- [9] W. Z. Własow, *Tonkostiennyye uprugije stierżni*, Strojizdat, 1940.

Р е з ю м е

ВОПРОСЫ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ПЛАСТИНОК
С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

В работе приводится точное решение вопроса собственных и вынужденных колебаний прямоугольной пластинки с поперечными и продольными ребрами жесткости. Исходным пунктом являются дифференциальные уравнения поперечных колебаний пластинки (3.1) и поперечных и крутильных колебаний ребер (3.3) и (3.4). Кроме нагрузки $p(x, y) \sin \omega t$, на пластинку действуют реакции ребер [вертикальные нагрузки $r^{(i)}(y)$], моменты $m^{(i)}(y)$ вдоль прямых $x = \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$), вертикальная нагрузка $t^{(k)}(x)$ и моменты $h^{(k)}(x)$ вдоль прямых $y = \eta_k$ ($k = 1, 2, \dots, r$). Эти реакции действуют на ребра в противоположных направлениях.

Из условий совместного прогиба и поворота пластинки и ребер вдоль прямых $x = \xi_i$ и $y = \eta_k$ можно получить достаточное число неоднородных линейных уравнений для определения коэффициентов Фурье в разложениях неизвестных функций $r^{(i)}(y)$, $m^{(i)}(y)$, $t^{(k)}(x)$ и $h^{(k)}(x)$. В случае собственных колебаний (или продольного изгиба, при $\omega = 0$) получается система однородных уравнений. Приравнявая к нулю детерминант этой системы, получается частота собственных колебаний (или критические силы, $\omega = 0$). Детально рассматриваются предельные случаи: в первом параграфе — статическая проблема изгиба пластинки с ребрами жесткости, во втором — проблема одновременного изгиба и сжатия (или растяжения), а также устойчивости пластинки с ребрами жесткости.

Дано решение двумя способами, применяя обыкновенные и двойные тригонометрические ряды.

S u m m a r y

STATICS AND DYNAMICS OF PLATES WITH RIBS

An exact solution of the problems of free and forced vibrations of a rectangular plate with longitudinal and transversal ribs is obtained in this paper. The starting points are the differential equation of transversal vibrations of the plate, (3.1), and the transversal and torsional vibrations of the ribs, (3.3) and (3.4).

Beside the load $p(x, y) \sin \omega t$ the plate is loaded by the forces caused by the presence of ribs [vertical loads $r^{(i)}(y)$], the moments

$m^{(i)}(y)$ along the lines $x = \xi_i (i = 1, 2, \dots, p)$, the vertical load $t^{(k)}(x)$ and the moments $h^{(k)}(x)$ along the lines $y = \eta_k (k = 1, 2, \dots, r)$. These loads act on the ribs in opposite directions. From the condition of equality of deflection and rotation of plate and ribs a sufficient number of non-homogeneous linear equations is obtained in order to find the Fourier expansion coefficients of the unknown functions $r^{(i)}(y)$, $m^{(i)}(y)$, $t^{(k)}(x)$ and $h^{(k)}(x)$.

In the case of free vibrations (or buckling, $\omega = 0$) we obtain a system of homogeneous equations. Taking the determinant of the system equal to zero we can find the frequencies of free vibrations (or critical forces, $\omega = 0$) of the structure. The following particular cases are examined in detail: the statical problem of bending of a plate with ribs, which is discussed in the first section; simultaneous bending and compression (or tension), as well as the stability of a plate with ribs, as seen in the second section. The solution is found in two ways by means of simple and double trigonometric series.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 września 1954 r.