

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

R A D A R E D A K C Y J N A

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY
JULIAN BONDER MICHAŁ BROSZKO
WACŁAW OLSZAK BOHDAN STEFANOWSKI
STANISŁAW TURSKI WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

JERZY NOWIŃSKI - REDAKTOR
TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

TOM VI WARSZAWA 1954 ZESZYT 1
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Z ZAGADNIEN TEORII RUSZTÓW PŁASKICH (I)

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Praca przedstawiona na zebraniu naukowym
Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w dniu 2 lutego 1954 r.

Zagadnienia rusztów płaskich nabierają coraz większego znaczenia w związku z rozwojem dwuwymiarowych konstrukcji wstępnie sprężonych i stosowaniem elementów rusztowych ścianowych i stropowych w budownictwie mieszkaniowym.

Dotychczasowe zainteresowania badaczy dotyczyły zagadnień zginania rusztów płaskich; opracowano w związku z tym kilka metod ścisłych i przybliżonych rozwiązania tych złożonych układów. Obecnie punkt ciężkości zainteresowań przesuwa się w kierunku opracowania efektywnych metod wyznaczenia sił krytycznych, powodujących wyboczenie rusztu, oraz złożonej pracy rusztów zginanych i równocześnie ściskanych albo rozciąganych.

Ścisłe rozwiązanie wymienionych tu zagadnień nie nastęrcza formalnie wielkich trudności; zagadnienie stateczności lub też równoczesnego zginania i ściskania prętów na sprężystych podporach (a takim jest w gruncie rzeczy schemat statyczny rusztu) jest opracowane. Praktyczne jednak przeprowadzenie rozwiązania natrafia nawet przy bardzo rzadkiej siatce dźwigarów na duże trudności rachunkowe. Dlatego też poszukiwać będziemy rozwiązań przybliżonych, starając się to typowo nieciągłe zagadnienie mechaniki budowli doprowadzić do zagadnienia częściowo lub całkowicie ciągłego.

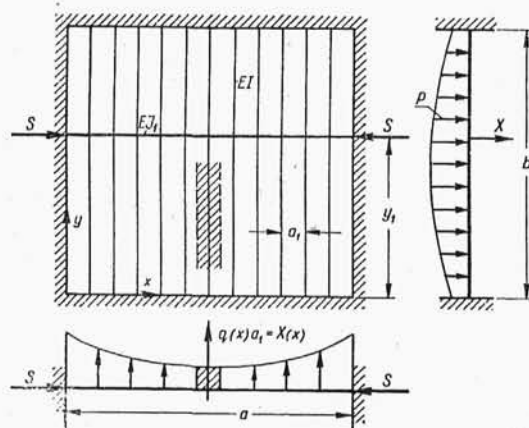
Droga ta w licznych zagadnieniach mechaniki budowli doprowadziła już do celu. W statyce rusztów, w odniesieniu do ich zginania, na drogę tę wstąpił chyba jako pierwszy S. Timoszenko, [1]. W pracy niniejszej metoda S. Timoszenki została rozszerzona na zagadnienia stateczności rusztów i uzupełniona drugą metodą, w której ruszt zastępuje się płytą ortotropową o zerowej sztywności na skręcanie.

1. Zajmijmy się najpierw rusztem najprostszym, składającym się z szeregu podłużnic, o sztywności na zginanie EI i długości b , oraz z jednej poprzecznicą o sztywności na zginanie EJ i długości a . Podłużnice niech będą rozmieszczone w jednakowym odstępie a_1 .

Niech wszystkie podłużnice będą obciążone w sposób jednakowy, a końce ich na brzegach $y=0$ i $y=b$ w jednakowy sposób podparte, przy czym wyłączamy tu możliwość braku podpór wzdłuż jednego lub obu brzegów. Krzyżujące się pręty połączone są ze sobą za pomocą przegubów.

Obciążenie z podłużnic przenosi się częściowo na skrajne podpory podłużnic, częściowo na dźwigar poprzeczny.

Rozważmy dwa krzyżujące się pręty, jedną z podłużnic oraz poprzecznicę. Na podłużnicę tę działa obciążenie zewnętrzne p oraz reakcja podporowa X występująca w miejscu skrzyżowania podłużnicy z poprzecznicą. Na poprzecznicę działają siły X (z przeciwnym niż na podłużnicę zwrotem) oraz podłużna siła ściskająca S .



Rys. 1

Ugięcie punktu skrzyżowania prętów wyrazić można następującym związkiem:

$$(1.1) \quad w_1 = \delta_{10} + X \delta_{11}.$$

Tutaj δ_{10} oznacza ugięcie podłużnicy w punkcie skrzyżowania belek, wywołane w układzie podstawowym ($X=0$) obciążeniem zewnętrznym, a δ_{11} oznacza ugięcie tego samego punktu podłużnicy, wywołane w układzie podstawowym stanem $X=1$.

Przy dostatecznie gęstym rozmieszczeniu podłużnic zastąpić możemy siły skupione X obciążeniem ciągłym $X = qa_1$.

Z równania (1.1) otrzymamy zatem

$$(1.2) \quad w_1 = \delta_{10} + qa_1 \delta_{11}, \quad q = \frac{w_1}{a_1 \delta_{11}} - \frac{\delta_{10}}{a_1 \delta_{11}}.$$

Ugięcie zginanej i jednocześnie ściskanej ^{podłużnicy} podłużnicy wyznaczamy z równania różniczkowego

$$(1.3) \quad EJ_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} + S_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -q.$$

W przypadku rozciągającej siły w poprzecznicy należy w równaniu (1.3) zmienić znak siły S .

Wyrażając funkcję $q(x)$ w równaniu (1.3) za pomocą związku (1.2) otrzymamy

$$(1.4) \quad EJ_1 a_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} + S_1 a_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{w_1}{\delta_{11}} = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}.$$

Zauważmy, że iloraz δ_{10}/δ_{11} wyraża reakcję podporową środkowej podpory podłużnicy trójpłaszczyznowej, wywołaną obciążeniem zewnętrznym p , w założeniu, że podpora ta (w punkcie skrzyżowania się podłużnicy z poprzecznicą) jest niepodatna. Wielkość $1/\delta_{11}$ traktować można jako reakcję podporową środkowej podpory podłużnicy, wywołaną podniesieniem tej podpory o wartość równą jedności.

Oznaczmy

$$R_1^0 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}, \quad \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Wtedy równanie (1.4) przyjmie postać

$$(1.5) \quad EJ_1 a_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} + S_1 a_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \beta_{11} w_1 = R_1^0.$$

Rozwiązanie tego równania pozwala na wyznaczenie momentów zginających i sił tnących poprzecznicy ze wzorów

$$(1.6) \quad M_1 = -EJ_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2}, \quad T_1 = -EJ_1 \frac{d^3 w_1}{dx^3}.$$

Ze wzoru (1.1) wyznaczymy reakcję nadliczbową

$$X = \frac{w_1}{\delta_{11}} - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = w_1 \beta_{11} - R_1^0 = q(x) a_1,$$

co pozwoli na określenie momentów i sił tnących w dowolnym przekroju podłużnic.

Równanie (1.5) traktować możemy jako równanie różniczkowe odkształconej poprzecznicy, spoczywającej na sprężystym podłożu typu Winklera o module podłoża β_{11}/a_1 , ściskanej siłą osiową S_1 , przy obciążeniu pionowym o jednostajnej intensywności R_1^0/a_1 . W przypadku szczególnym, gdy $S_1 = 0$ równanie (1.5) jest identyczne z równaniem wyprowadzonym przez S. Timoszenkę dla zginania rusztów.

Rozwiązaniem równania (1.5) jest

$$(1.7) \quad w_1(x) = \bar{w}_1(x) + A_1 \sin ax + A_2 \cos ax + A_3 \sin \beta x + A_4 \cos \beta x,$$

gdzie

$$a, \beta = \sqrt{\varphi/2 \pm \sqrt{(\varphi/2)^2 - \gamma^2}},$$

$$\varphi = \frac{S_1}{EJ_1}, \quad \gamma = \frac{\beta_{11}}{EJ_1 a_1},$$

a $\bar{w}_1(x)$ jest całką szczególną równania niejednorodnego (1.5).

Szczegółowiej zajmiemy się przypadkiem swobodnego podparcia poprzecznicy.

Rozłóżmy ugięcie $w(x)$ oraz stałą wartość R_1^0 w szereg trygonometryczny

$$(1.8) \quad \begin{cases} w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,1} \sin a_n x, \\ R_1^0 = \frac{4 R_1^0}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin a_n x. \end{cases} \quad \left(a_n = \frac{n\pi}{a} \right)$$

Wyznamy z równania (1.5) stałe $A_{n,1}$:

$$A_{n,1} = \frac{4 R_1^0}{n\pi (EJ_1 a_1 a_n^4 - S_1 a_1 a_n^2 + \beta_{11})}.$$

Zatem

$$(1.9) \quad w_1(x) = \frac{4 R_1^0 a^4}{EJ_1 \pi^5 a_1} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n x}{n^5 - \lambda n^2 + kn},$$

gdzie

$$\lambda = \frac{S_1}{S_E}, \quad S_E = \frac{EJ_1 \pi^3}{a^2}, \quad k = \frac{\beta_{11} a^4}{EJ_1 a_1 \pi^4}.$$

Na podstawie wzoru (1.9) możemy zauważyć, że siła ściskająca S_1 zwiększa ugięcie, a zmniejsza je siła rozciągająca.

Powyższe rozważania dają się bez trudu uogólnić na ruszt o r poprzecznicach.

Założmy, że poprzecznice posiadają różne sztywności i obciążone są różnymi siłami ściskającymi.

Równanie różniczkowe k -tej poprzecznicy przyjmie postać

$$(1.10) \quad EJ_k \frac{d^4 w_k}{dx^4} + S_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} = -q_k$$

gdzie

$$q_k = \frac{X_k}{a_1} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Wielkości X_k związane są z ugięciem k -tej poprzecznicy związkiem

$$(1.11) \quad w_k = \delta_{k0} + \sum_{i=1}^{i=r} X_i \delta_{ki} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Rozwiązujemy powyższy układ względem X_k .

Otrzymamy

$$(1.12) \quad X_k = \sum_{i=1}^{i=r} (\beta_{ik} w_i + \beta_{ki} \delta_{i0}) = \sum_{i=1}^{i=r} \beta_{ik} w_i - R_k^0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Tutaj wielkość R_k^0 traktować można jako reakcję podporową w punkcie k podłużnicy o $r+2$ podporach, wywołaną obciążeniem zewnętrznym podłużnic, a wielkość β_{ik} jako reakcję podporową i -tej podpory tej samej podłużnicy, wywołaną przesunięciem podpory k o wartość $w_k = -1$.

Wstawiając związek (1.12) do równania (1.10) otrzymamy układ równań różniczkowych

$$(1.13) \quad a_1 EJ_k \frac{d^4 w_k}{dx^4} + a_1 S_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} + \sum_{i=1}^{i=r} \beta_{ki} w_i = R_k^0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Powyższy układ równań doprowadzić można drogą eliminacji funkcji w_2, w_3, \dots, w_r do równania różniczkowego dla jednej tylko funkcji w_1 rzędu $4r$.

Ograniczymy się tu jedynie do przypadku swobodnego podparcia wszystkich poprzecznic.

Założmy i tu, że

$$(1.14) \quad w_k = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} A_{n,k} \sin a_n x, \quad R_k^0 = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} R_{k,n}^0 \sin a_n x,$$

gdzie

$$R_{k,n}^0 = \frac{4R_k^0}{n\pi} \quad (n=1, 3, 5, \dots).$$

Założenie to spełnia wszelkie warunki brzegowe zagadnienia.

Wprowadzając związki (1.14) do równania (1.13) otrzymamy dla wyznaczenia wielkości $A_{n,k}$ układ równań liniowych

$$(1.15) \quad (a_1 E J_k a_n^4 - a_1 S_k a_n^2) A_{n,k} + \sum_{i=1}^{i=r} \beta_{ki} A_{n,i} = R_{k,n}^0$$

$$(k=1, 2, \dots, r; \quad n=1, 3, \dots).$$

Rozwiązując powyższy układ równań względem $A_{n,k}$ mamy

$$A_{n,k} = \sum_{i=1}^{i=r} a_{ki,n} R_{n,i}^0.$$

Z pierwszego związku (1.14) uzyskamy

$$(1.16) \quad w_k = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{i=r} a_{ki,n} R_{n,i}^0 \right) \sin a_n x.$$

W wielu zagadnieniach technicznych dotyczących rusztów wysuwane jest zagadnienie ich stateczności.

Zajmijmy się przypadkiem gęsto żebrowanego rusztu o jednej poprzecznicy. Dla siły podłużnej S , większej od krytycznej, ruszt dozna wygięcia opisanego równaniem różniczkowym jednorodnym

$$(1.5.1) \quad E J_1 a_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} + S_1 a_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + w_1 \beta_{11} = 0.$$

Założmy $w_1 = A_{1,n} \sin a_n x$, co spełnia warunki swobodnego podparcia i równanie różniczkowe (1.5.1).

Uzyskujemy z (1.5.1) następujący związek:

$$E J_1 a_1 a_n^4 - S_1 a_1 a_n^2 + \beta_{11} = 0.$$

Stąd otrzymamy siłę krytyczną

$$(1.17) \quad S_{1,kr} = \frac{EJ_1 \pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\beta_{11} a^2}{a_1 n^2 \pi^2}.$$

Zajmijmy się tym przypadkiem szczegółowiej. Wielkość β_{11} zależy od geometrycznych i sprężystych właściwości podłużnic i od odległości poprzecznic od osi x :

$$\beta_{11} = \frac{EI}{b^3} \varphi(\eta_1),$$

gdzie $\eta_1 = y_1/b$.

Po prostych przekształceniach napiszemy wzór (1.17) w postaci

$$(1.18) \quad S_{1,k} = \frac{EJ_1 \pi^2}{b^2} \left(\frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} k \right),$$

gdzie

$$\varrho = \frac{a}{b}, \quad k = \frac{Ib}{J_1 a_1} \frac{\varphi(\eta_1)}{\pi^4}.$$

Ustalmy wielkość EJ_1 i b ; niech zmienia się $\varrho = a/b$, k oraz n . Otrzymamy rodzinę krzywych wieńcowych, których rzędne dają nam najmniejsze wartości siły krytycznej.

Na rysunku 2 naniesiono krzywe (1.18) dla następujących trzech przypadków:

- (1) podłużnice na końcach swobodnie podparte,
- (2) podłużnice wzdłuż brzegu $y=0$ zupełnie utwierdzone, a wzdłuż brzegu $y=b$ swobodnie podparte,
- (3) podłużnice na obu końcach utwierdzone zupełnie.

Dla powyższych trzech przypadków założono, że poprzecznicę znajduje się na osi symetrii podłużnic.

Dla przypadków (1)-(3) mamy

$$(1.18.1) \quad k = \frac{48 Ib}{\pi^4 J_1 a_1}, \quad k = \frac{109,7 Ib}{\pi^4 J_1 a_1}, \quad k = \frac{192 Ib}{\pi^4 J_1 a_1}.$$

Wreszcie przyjęto

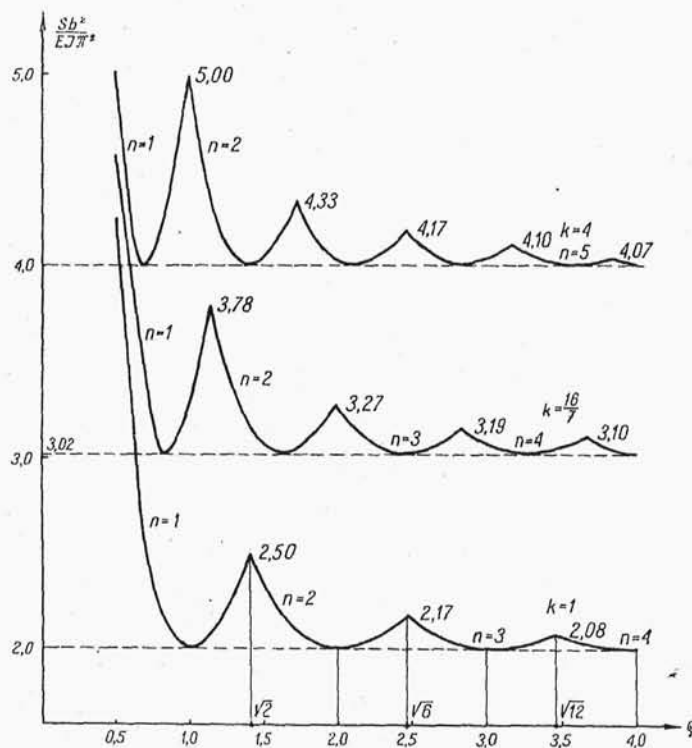
$$\frac{48 Ib}{\pi^4 J_1 a_1} = 1.$$

Najmniejsze wartości S_k otrzymamy dla stosunku boków $\varrho = a/b = = \eta k^{-1/4}$.

Tym odciętym odpowiadają wartości

$$S_{1,kr} = \frac{2 EJ_1 \pi^2}{b^2} \sqrt{k}.$$

Wartości te są niezależne od liczby półfal n .



Rys. 2

Odcięte punktów przecięcia gałęzi o parametrach n oraz $n+1$ przyjmują wartość

$$q = k^{-1} \sqrt{n(1+n)},$$

a rzędne

$$S_{1,kr} = \frac{EJ_1 \pi^2}{b^2} \sqrt{k} \frac{2n^2 + 2n + 1}{n(1+n)}.$$

Dla rusztu o r poprzecznicach odkształcenie układu, dla sił większych od krytycznych, charakteryzowane jest układem równań różniczkowych

$$(1.19) \quad a_1 E J_k \frac{d^4 w_k}{dx^4} + a_1 S_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} + \sum_{i=1}^{i=r} \beta_{ki} w_i = 0 \quad (k=1, 2, \dots, r).$$

Przy poprzecznicach swobodnie podpartych rozwiązujemy układ równań (1.19) wstawiając

$$w_k = A_{k,n} \sin a_n x \quad (k=1, 2, \dots, r).$$

Otrzymamy wówczas z równania (1.19) układ równań

$$(1.20) \quad (a_1 E J_k a_n^4 - a_1 S_k a_n^2) A_{k,n} + \sum_{i=1}^{i=r} \beta_{ki} A_{i,n} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, r).$$

Układ tych równań jednorodnych będzie tylko wtedy niesprzeczny, gdy wyznacznik układu będzie równy zeru. Otrzymamy stąd, przy stałym stosunku sił podłużnych, wielomian r -tego stopnia.

Najmniejszy pierwiastek wielomianu daje najmniejszą wartość siły krytycznej.

Równanie (1.20) obejmuje obszerną klasę przypadków szczególnych, jak np. ruszty, w których w szeregu poprzecznic nie działają siły osiowe lub w których działają siły rozciągające i ściskające. Założyć musimy jednak, że co najmniej jedna z sił S_k ($k=1, 2, \dots, r$) jest siłą ściskającą.

Kilka przykładów objaśni nam tok postępowania przy wyznaczaniu sił krytycznych.

Zajmijmy się rusztem o dwu jednakowych i w jednakowych odległościach położonych poprzecznicach, ściskanych siłą S .

Ze względu na symetrię powierzchni odkształcenia będzie $w_1 = w_2$ o tym samym $A_{1,n} = A_{2,n}$.

Z równania (1.20) otrzymamy zatem

$$(a_1 E J_1 a_n^4 - S a_1 a_n^2 + \beta_{11} + \beta_{12}) A_{1,n} = 0,$$

co prowadzi do związku

$$(1.21) \quad S_{kr} = \frac{E J_1 \pi^2 n^2}{a^3} + \frac{(\beta_{11} + \beta_{12}) a^2}{n^2 \pi^2 a_1}.$$

Przy założeniu swobodnego podparcia podłużnic łatwo znajdziemy, że

$$\beta_{11} = \frac{8}{5} 162 \frac{EI}{b^3}, \quad \beta_{12} = -\frac{7}{5} 162 \frac{EI}{b^3}.$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy z (1.21)

$$(1.22) \quad S_k = \frac{E J_1 \pi^2}{b^3} \left(\frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} k_2 \right),$$

gdzie

$$k_2 = \frac{32,4 I b}{J_1 a_1 \pi^4}.$$

Dla podłużnic obustronnie utwierdzonych jest

$$\beta_{11} = \frac{16}{5} 162 \frac{E I}{b^3}, \quad \beta_{12} = -\frac{11}{5} 162 \frac{E I}{b^3},$$

$$(1.22.1) \quad S_{kr} = \frac{E J_1 \pi^2}{b^3} \left(\frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} k'_2 \right),$$

gdzie

$$k'_2 = \frac{162 I b}{J_1 a_1 \pi^4}.$$

Rozpatrzmy teraz ruszt składający się z szeregu podłużnic oraz z trzech poprzecznic o jednakowym przekroju i w jednakowych odstępach rozmieszczonych, ściskanych jednakową siłą S .

Otrzymamy układ równań

$$(1.23) \quad \begin{cases} (a_1 E J_1 a_n^4 - S a_1 a_n^2 + \beta_{11}) A_{1,n} + \beta_{12} A_{2,n} + \beta_{13} A_{3,n} = 0, \\ \beta_{21} A_{1,n} + (a_1 E J_1 a_n^4 - S a_1 a_n^2 + \beta_{22}) A_{2,n} + \beta_{23} A_{3,n} = 0, \\ \beta_{31} A_{1,n} + \beta_{32} A_{2,n} + (a_1 E J_1 a_n^4 - S a_1 a_n^2 + \beta_{33}) A_{3,n} = 0. \end{cases}$$

Ze względu na symetryczną, względem $y=b/2$, postać wybożenia rusztu jest $A_{1,n} = A_{3,n}$.

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (1.23) prowadzi do równania kwadratowego względem S , którego mniejszy pierwiastek daje siłę krytyczną

$$(1.24) \quad \begin{cases} S_{kr} = \frac{E J_1 \pi^2}{b^3} \left(\frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} k_3 \right), \\ k_3 = \frac{I b}{2 J \pi^4 a_1} [(\gamma_{11} + \gamma_{22}) - \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4 \gamma_{12}^2}]. \end{cases}$$

W przypadku podłużnic na końcach swobodnie podpartych jest

$$\beta_{11} = \frac{23}{14} \gamma, \quad \beta_{22} = \frac{32}{14} \gamma, \quad \beta_{12} = -\frac{22}{14} \gamma, \quad \beta_{13} = \frac{9}{14} \gamma,$$

$$\gamma = 384 \frac{EI}{b^3}, \quad \gamma_{11} = \beta_{11} + \beta_{13}, \quad \gamma_{22} = \frac{16}{7} \gamma = \beta_{22}, \quad \gamma_{12} = \sqrt{2} \beta_{12}.$$

Po prostych przekształceniach napiszemy (1.24) w postaci

$$(1.25) \quad k_3 = \frac{24,3374}{\pi^4} \frac{Ib}{J_1 a_1}.$$

Dla podłużnic utwierdzonych zupełnie mamy

$$\beta_{11} = \frac{132}{42} \gamma, \quad \beta_{22} = \frac{105}{42} \gamma, \quad \beta_{12} = -\frac{84}{42} \gamma, \quad \beta_{13} = \frac{36}{42} \gamma, \quad \gamma = 384 \frac{EI}{b^3},$$

$$\gamma_{11} = \beta_{11} + \beta_{13}, \quad \gamma_{22} = \beta_{22}, \quad \gamma_{12} = +\sqrt{2} \beta_{12},$$

oraz

$$(1.25.1) \quad k'_3 = \frac{124,35}{\pi^4} \frac{Ib}{J_1 a_1}.$$

Wreszcie dla czterech poprzecznic ściskanych siłą S otrzymamy, wykorzystując symetrię postaci wyboczenia względem osi $y = b/2$, układ dwu równań

$$(a_1 E J_1 a_n^4 - S a_1 a_n^2 + \beta_{11} + \beta_{14}) A_{1,n} + (\beta_{12} + \beta_{13}) A_{2,n} = 0,$$

$$(\beta_{21} + \beta_{24}) A_{1,n} + (a_1 E J_1 a_n^4 - S a_1 a_n^2 + \beta_{22} + \beta_{23}) A_{2,n} = 0.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań daje

$$(1.26) \quad \begin{cases} S_{kr} = \frac{E J_1}{b^2} \left(\frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} k_4 \right), \\ k_4 = \frac{Ib}{2 J \pi^4 a_1} [\gamma_{11} + \gamma_{22} - \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4 \gamma_{12}^2}]. \end{cases}$$

Zważywszy, że dla swobodnego podparcia podłużnic jest

$$\beta_{11} = \frac{344}{209} \gamma, \quad \beta_{12} = -\frac{331}{209} \gamma, \quad \beta_{13} = \frac{144}{209} \gamma, \quad \beta_{14} = -\frac{36}{209} \gamma,$$

$$\beta_{22} = \frac{488}{209} \gamma, \quad \beta_{23} = -\frac{367}{209} \gamma, \quad \gamma = 750 \frac{EI}{b^3},$$

$$\gamma_{11} = \beta_{11} + \beta_{14}, \quad \gamma_{22} = \beta_{22} + \beta_{23}, \quad \gamma_{12} = \beta_{12} + \beta_{13},$$

otrzymamy

$$(1.27) \quad k_4 = \frac{19,4772}{\pi^4} \frac{I b}{J_1 a_1}.$$

Dla utwierdzenia zupełnego podłużnic otrzymamy

$$\beta_{11} = \frac{656}{209} \gamma, \quad \beta_{12} = -\frac{415}{209} \gamma, \quad \beta_{13} = \frac{168}{209} \gamma, \quad \beta_{14} = -\frac{48}{209} \gamma,$$

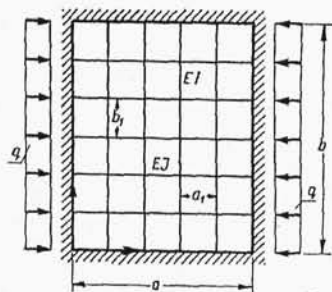
$$\beta_{22} = \frac{512}{209} \gamma, \quad \beta_{23} = -\frac{379}{209} \gamma, \quad \gamma = 750 \frac{EI}{b^3},$$

$$\gamma_{11} = \beta_{11} + \beta_{14}, \quad \gamma_{22} = \beta_{22} + \beta_{23}, \quad \gamma_{12} = \beta_{12} + \beta_{13},$$

oraz

$$(1.27.1) \quad k'_4 = \frac{99,908}{\pi^4} \frac{I b}{J_1 a_1}.$$

Przy większej ilości poprzecznic rozwiązanie układu równań (1.20) natrafia na znaczne trudności rachunkowe. W przypadku większej ilości poprzecznic o jednakowym przekroju, ułożonych w równych odstępach i ściskanych jednakową siłą S , uzyskać możemy wybitne uproszczenia rozwiązania traktując ruszt jako płytę ortotropową o zerowej sztywności na skręcanie (rys. 3).



Rys. 3

Równanie powierzchni ugięcia takiej płyty dla $q > q_{kr}$ ma postać, [2] i [3],

$$(1.29) \quad D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Tutaj w jest rzędną powierzchni ugięcia, D_x i D_y sztywnościami zginania płyty w kierunku osi x i y oraz q_x obciążeniem ściskającym w kierunku osi x , jednostajnie rozłożonym na krawędziach $x=0$ i $x=a$.

Przejście od płyty do rusztu charakteryzują następujące związki:

$$(1.30) \quad EJ = b_1 D_x, \quad EI = a_1 D_y, \quad S = q b_1.$$

Równanie (1.29) napisać możemy w postaci

$$(1.31) \quad \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{S}{b_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Rozwiązania równania (1.31) poszukujemy w postaci

$$(1.32) \quad w(x, y) = X(x) Y(y).$$

Wstawiając (1.32) do równania (1.31) otrzymamy

$$(1.33) \quad \frac{EJ}{b_1} \frac{X^{IV}}{X} + \frac{S}{b_1} \frac{X''}{X} + \frac{EI}{a_1} \frac{Y^{IV}}{Y} = 0.$$

Jest rzeczą widoczną, że równania (1.33) rozdzielić można na układ dwu równań powiązanych ze sobą parametrem λ :

$$Y^{IV} - \frac{\lambda^4 a_1}{EI} Y = 0, \quad X^{IV} + \frac{S}{EJ} X'' + \frac{\lambda^4 b_1}{EJ} X = 0.$$

lub

$$(1.34) \quad Y^{IV} - \omega^4 Y = 0, \quad X^{IV} + \frac{S}{EJ} X'' + \omega^4 \frac{b_1}{a_1} \frac{I}{J} X = 0,$$

gdzie $\omega^4 = \lambda^4 a_1 / EI$.

Zajmijmy się pierwszym z tych równań. Postać tego równania jest analogiczna do równania różniczkowego drgań swobodnych pręta. Stąd wniosek, że dla $q > q_{kr}$ podłużnice przyjmą postać identyczną z postaciami drgań własnych pręta o długości b i sztywności EI/a_1 .

Ponieważ wyboczenie rusztu w kierunku osi y nastąpi przy jednej półfali, interesować nas będzie najmniejsza wartość parametru $\omega = \omega_1$.

Z teorii drgań prętów mamy kolejno:

$b \omega_1 = \pi$ dla pręta w przekrojach $y = 0$ i $y = b$ swobodnie podpartego,

$b \omega_1 = 4,730$ dla pręta w przekrojach $y = 0$ i $y = b$ zupełnie utwierdzonego,

$b \omega_1 = 3,927$ dla pręta w przekroju $y = 0$ zupełnie utwierdzonego, a w przekroju $y = b$ swobodnie podpartego,

$b \omega_1 = 1,875$ dla pręta w przekroju $y = 0$ zupełnie utwierdzonego, a w przekroju $y = b$ swobodnego.

Wprowadzając oznaczenie $\nu_1 = b \omega_1$ napiszemy drugie z równań (1.34) w postaci

$$(1.35) \quad X^{IV} + \frac{S}{EJ} X'' + \nu_1^4 \frac{b_1}{a_1} \frac{I}{J b^4} X = 0.$$

Oznaczając

$$(1.36) \quad \varphi = \frac{S}{EJ}, \quad \gamma^2 = \frac{\nu_1^4 b_1 I}{b^4 a_1 J},$$

otrzymamy rozwiązanie równania (1.35) w postaci

$$(1.37) \quad X = A \sin ax + B \cos ax + C \sin \beta x + D \cos \beta x,$$

gdzie

$$(1.38) \quad a, \beta = \sqrt{\varphi/2 \pm \sqrt{\varphi^2/4 - \gamma^2}}.$$

Z (1.38) wynika, że

$$(1.39) \quad a\beta = \gamma, \quad a^2 + \beta^2 = \varphi.$$

Dla zadanych warunków brzegowych w przekrojach $x=0$ i $x=a$ otrzymamy układ czterech równań jednorodnych względem A, \dots, D . Przyrównanie do zera wyznacznika układu daje równanie przestępne jako warunek wyboczenia.

W równaniu tym, dzięki pierwszemu związkowi (1.39), wyeliminujemy parametr β , tak że równanie będzie funkcją samego a . Najmniejszy pierwiastek tego równania daje najmniejszą wartość siły krytycznej, którą obliczymy z drugiego wzołu (1.39).

Zauważmy, że równanie (1.35) jest identyczne z równaniem różniczkowym wyboczenia pręta o sztywności EJ , leżącym na sprężystym podłożu o module $C = r_1^4 b_1 I / a_1 J b^4$.

Zajmiemy się tu szczegółowo przypadkiem swobodnego podparcia poprzecznic w przekrojach $x=0$ i $x=a$. Rozwiązaniem równania będzie tu

$$(1.40) \quad X(x) = A \sin a_n x \quad \left(a_n = \frac{n\pi}{a} \right).$$

Wstawiając (1.40) do (1.35) otrzymamy związek

$$(1.41) \quad a_n^4 - \frac{S}{EJ} a_n^2 + \frac{r_1^4 b_1 I}{b^4 a_1 J} = 0,$$

z którego po prostych przekształceniach otrzymamy siłę krytyczną w postaci

$$(1.42) \quad S = \frac{\pi^2 EJ}{b^2} \left(\frac{n^2}{\varrho^2} + \bar{k} \frac{\varrho^3}{n^2} \right),$$

gdzie

$$\bar{k} = \left(\frac{r_1}{\pi} \right)^4 \frac{I b_1}{J a_1}.$$

Dla r poprzecznic jest

$$(1.43) \quad \bar{k} = \left(\frac{r_1}{\pi} \right)^4 \frac{I b}{J a_1 (r+1)}.$$

Zatrzymamy się na przypadku rusztu, którego podłużnice są na brzegach $y=0$ i $y=b$ swobodnie podparte. Wtedy

$$(1.43.1) \quad \nu_1 = \pi, \quad \bar{k} = \frac{Ib}{Ja_1(r+1)}.$$

W tablicy 1 podajemy wartości \bar{k} dla $r=1, 2, 3, 4$, wyliczone ze wzoru (1.43.1), oraz wartości k , wyliczone dla tego samego przypadku (uprzednio przedstawionym sposobem). Zauważmy przy tym, że budowa wzorów dla S , otrzymana obiema metodami, jest, z uwzględnieniem współczynników k , identyczna.

Tablica 1

r	1	2	3	4
$\bar{k} \frac{Ja_1}{Ib}$ [wzór (1.43.1)]	$1/2 = 0,50$	$1/3 = 0,333$	$1/4 = 0,25$	$1/5 = 0,20$
$k \frac{Ja_1}{Ib}$ [wzory (1.18), (1.22), (1.25) i (1.27)]	$\frac{48}{\pi^4} = 0,49277$	$\frac{32,4}{\pi^4} = 0,33262$	$\frac{24,337}{\pi^4} = 0,24985$	$\frac{19,4772}{\pi^4} = 0,19995$

Stwierdzamy, że nawet w skrajnym przypadku jednej poprzecznicy otrzymujemy niezbyt różniące się między sobą wartości k i \bar{k} . Jest rzeczą widoczną, że ze wzrostem ilości poprzecznic różnice między wynikami uzyskanymi za pomocą obu metod szybko maleją.

Dla rusztu swobodnie podpartego wzdłuż brzegów $x=0$ i $x=a$, a wzdłuż brzegów $y=0$ i $y=b$ utwierdzonego zupełnie nie używamy tak nieznacznych różnic jak w przypadku rusztu z wszystkimi brzegami swobodnie podpartymi.

Tablica 2

r	1	2	3	4
$\bar{k} \frac{Ja_1}{Ib}$ [wzór (1.43)]	$\frac{1}{2} \left(\frac{4,73}{\pi} \right)^4 = 2,7252$	$\frac{1}{3} \left(\frac{4,73}{\pi} \right)^4 = 1,8167$	$\frac{1}{4} \left(\frac{4,73}{\pi} \right)^4 = 1,3627$	$\frac{1}{5} \left(\frac{4,73}{\pi} \right)^4 = 1,090$
$k \frac{Ja_1}{Ib}$ [(wzory (1.18.1), (1.22.1), (1.25.1) i (1.27.1)]	$\frac{192}{\pi^4} = 1,9711$	$\frac{162}{\pi^4} = 1,6631$	$\frac{124,35}{\pi^4} = 1,2766$	$\frac{99,908}{\pi^4} = 1,026$

Jednak i tu jest rzeczą widoczną, że dla $r \geq 4$ z powodzeniem zastąpić można ruszt modelem płyty ortotropowej o zerowej sztywności na skręcanie. Wykonane przeliczenia wykazują, że dla rusztów o innych niż tu podano warunkach brzegowych na krawędziach $x=0$,

$x=a$, $y=0$ i $y=b$ otrzymamy dostatecznie dokładne wyniki, zastępując ruszt o czterech poprzecznicach płytą ortotropową o zerowej wartości sztywności na skręcanie.

Rozpatrzmy jeszcze szczególny przypadek rusztu na wszystkich brzegach swobodnie podpartego, w którym $I/a_1 = J/b_1$. Wtedy $k=1$ oraz

$$S = \frac{E J \pi^2}{b^2} \left(\frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} \right).$$

Najmniejszą wartością siły krytycznej będzie

$$(1.44) \quad S = \frac{2 E J \pi^2}{b^2} \quad \text{dla} \quad \varrho = 1, 2, 3, \dots \infty.$$

Model płyty ortotropowej nakłada jednak znaczne ograniczenia na rozwiązania. W przypadku rusztu o różnych odstępach poprzecznic i podłużnic, o różnych przekrojach prętów i wreszcie przy różnych siłach ściskających duże usługi oddać może metoda energetyczna.

Jako podstawę rozwiązania przyjmiemy kryterium energetyczne, sformułowane przez Timoszenkę i Bryana, [5] i [6]. Opiera się ono na zasadzie prac wirtualnych i głosi, że układ znajduje się w równowadze przy dowolnym wirtualnym przemieszczeniu, gdy zmiana całkowitej energii jest równa zero

$$(1.45) \quad \delta \Pi = \delta (V + T) = 0.$$

Tutaj V jest pracą odkształcenia, a T pracą sił podłużnych. Ze związku (1.45) wynika bezpośrednio, że $\Pi = V + T = \text{ekstremum}$. Tak postawione zadanie wariacyjne rozwiążemy stosując metodę W. Ritza, [7].

Powierzchnię ugięcia rusztu przyjmiemy w postaci podwójnego szeregu

$$(1.46) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} X_n(x) Y_m(y).$$

Funkcje $X_n(x)$ i $Y_m(y)$ przyjmiemy tak, aby spełniały równania różniczkowe

$$(1.47) \quad X_n^{IV} - \alpha_n^4 X_n = 0, \quad Y_m^{IV} - \beta_m^4 Y_m = 0.$$

Przyjęte w ten sposób funkcje przedstawiają postacie własnych drgań poprzecznic i podłużnic. Poczyniono tu założenie, że poprzecznice są podparte w obrębie każdej z czterech krawędzi rusztu w jednakowy sposób.

W myśl założenia (1.46) ugięcie i -tej poprzecznicy wyrazić można wzorem

$$w_{y=y_i} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{ni} X_n(x),$$

gdzie

$$B_{ni} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} Y_m(y_i),$$

a ugięcie i -tej podłużnicy wzorem

$$w_{x=x_i} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mi} Y_m(y)$$

gdzie

$$A_{mi} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} X_n(x_i).$$

Całkowita energia układu przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=r} E J_i \int_0^a \left(\frac{d^2 w_{y=y_i}}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p} E I_i \int_0^b \left(\frac{d^2 w_{x=x_i}}{dy^2} \right)^2 dy - \\ (1.48) \quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=r} S_i \int_0^a \left(\frac{dw_{y=y_i}}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Dla obliczeń urywamy szereg (1) na skończonej wartości m i n . Od ilości przyjętych wyrazów szeregu zależy dokładność wyników. Wstawiając (1.46) zauważymy, że Π jest funkcją współczynników a_{mn} . Współczynniki te należy dobrać w ten sposób, aby $\Pi(a_{mn})$ osiągało ekstremum. Uzyskamy to ze związku

$$(1.49) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = 0.$$

Prowadzi on do układu $m \cdot n$ równań liniowych jednorodnych zawierających współczynnik a_{mn} .

Wypiszemy równanie (1.49) dla wskaźników (j, k) :

$$\begin{aligned}
 (1.50) \quad & \sum_{i=1}^{i=r} E J_i \int_0^a \left[\sum_1^n B_{ni} X_n''(x) \right] Y_j(y_i) X_k''(x) dx + \\
 & + \sum_{i=1}^{i=p} E I_i \int_0^b \left[\sum_1^m A_{mi} Y_m''(y_i) \right] X_k(x_i) Y_j''(y) dy - \\
 & - \sum_{i=1}^{i=r} S_i \int_0^a \left[\sum_1^m B_{mi} X_n'(x) \right] Y_j(y_i) X_k'(x) dx = 0 \\
 & (n = 1, 2, \dots, k, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, j, \dots, m).
 \end{aligned}$$

Ponieważ funkcje właściwe (1.47) są ortogonalne, zatem

$$\int_0^a X_n X_k dx = 0, \quad \int_0^b Y_m Y_j dy = 0.$$

Również

$$\int_0^a X_n'' X_k'' dx = 0,$$

gdyż

$$(1.51) \quad \int_0^a X_n'' X_k'' dx = \left[X_n'' X_k' - X_n''' X_k \right]_0^a + \int_0^a X_n^{IV} X_k dx.$$

Pierwszy człon jest równy zeru ze względu na warunki brzegowe, a drugi równa się

$$a_n^4 \int_0^a X_n X_k dx = 0.$$

Podobnie

$$\int_0^b Y_m Y_j dy = 0, \quad \int_0^b Y_m'' Y_j'' dy = 0.$$

Funkcje X_n i Y_m znormalizujemy w ten sposób, aby było

$$(1.52) \quad \int_0^a X_n^2 dx = \frac{a}{2}, \quad \int_0^b Y_m^2 dy = \frac{b}{2}.$$

Ze związku (1.51) dla $n = k$ mamy

$$\int_0^a X_n''^2 dx = \int_0^a X_n^{IV} X_n dx = a_n^4 \frac{a}{2}.$$

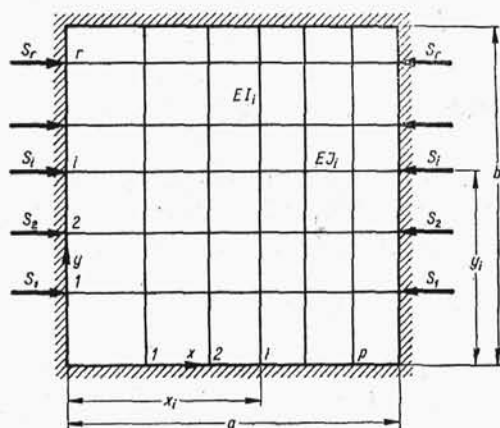
Analogicznie

$$\int_0^b Y_m''^2 dx = \int_0^b Y_m^{IV} Y_m dx = \beta_m^4 \frac{b}{2}.$$

Tak więc układ równań (1.50) przyjmie postać

$$(1.53) \quad \sum_{i=1}^{i=r} E J_i B_{ki} Y_j(y_i) \frac{a}{2} a_k^4 + \sum_{i=1}^{i=p} E I_i A_{ji} X_k(x_i) \frac{b}{2} \beta_j^4 - \\ - \sum_{i=1}^{i=r} S_i \int_0^a \left[\sum_{i=1}^m B_{ni} X_n'(x) \right] Y_j(y_i) X_k'(x) dx = 0$$

($n = 1, 2, \dots, k, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, j, \dots, m$).



Rys. 4

Szczegółowiej rozpatrzmy przypadek szczególny jednakowych poprzecznic ($J_i = J$) i podłużnic ($I_i = I$) oraz jednakowych sił podłużnych ($S_i = S$). Ponadto niech poprzecznice i podłużnice będą na końcach swobodnie podparte.

Wtedy

$$Y_j = \sin \frac{j \pi y}{b}, \quad \beta_j = \frac{j \pi}{b},$$

$$X_k = \sin \frac{k \pi x}{a}, \quad \alpha_k = \frac{k \pi}{a}.$$

Układ równań (1.53) przyjmie postać

$$(1.54) \quad EJ a d_k^4 + EI b \beta_j^4 \frac{\sum_{i=1}^{i=p} A_{ij} \sin \frac{k \pi x_i}{a}}{\sum_{i=1}^{i=r} B_{ki} \sin \frac{j \pi y_i}{b}} - S a_k^2 a = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m).$$

Stąd wyznaczymy siłę krytyczną

$$(1.55) \quad S = \frac{EJ \pi^2}{b^2} \left[\frac{k^2}{\varrho^2} + \gamma_{kj} \frac{Ib}{Ja} \frac{j^4}{k^2} \varrho^2 \right],$$

gdzie

$$\varrho = \frac{a}{b}, \quad \gamma_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} A_{ij} \sin \frac{k \pi x_i}{a}}{\sum_{i=1}^{i=r} B_{ki} \sin \frac{j \pi y_i}{b}}.$$

Z wyrażenia (1.55) wynika, że najmniejszą wartość siły krytycznej otrzymamy dla $j=1$.

Znaczne uproszczenia uzyskamy dla przypadku szczególnego, z zasady spełnionego w rusztach, mianowicie dla przypadku równych odstępów między poprzecznicami $[b = (r+1) b_1]$ i podłużnicami $[a = (p+1) a_1]$.

Występujące w wyrażeniu

$$\gamma_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} A_{ij} \sin \frac{k \pi x_i}{a}}{\sum_{i=1}^{i=r} B_{ki} \sin \frac{j \pi y_i}{b}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} A_{ij} \sin \frac{k \pi i}{p+1}}{\sum_{i=1}^{i=r} B_{ki} \sin \frac{j \pi i}{r+1}}$$

sumy posiadają postać

$$\sum_{i=1}^{i=t} \sin \frac{n \pi i}{t+1} \sin \frac{m \pi i}{t+1} \quad (t = r, p).$$

Napiszemy powyższą sumę w postaci równorzędnej

$$(1.56) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=t} \left[\cos \frac{(n-m) \pi i}{t+1} - \cos \frac{(n+m) \pi i}{t+1} \right].$$

Dla $m \neq n$ suma ta jest równa zero, gdy jednocześnie $(n-m)$ i $(n+m)$ są wielokrotnościami $2(t+1)$ lub gdy $(n-m)$ oraz $(n+m)$ jednocześnie nie są wielokrotnościami $2(t+1)$.

Dalej mamy

$$\sum_{i=1}^{i=t} \sin \frac{n \pi i}{t+1} \sin \frac{m \pi i}{t+1} = -\frac{t+1}{2},$$

gdy tylko $m+n$ jest wielokrotnością $2(t+1)$, a

$$\sum_{i=1}^{i=t} \sin \frac{n \pi i}{t+1} \sin \frac{m \pi i}{t+1} = \frac{t+1}{2},$$

gdy jedynie $(m+n)$ jest wielokrotnością $2(t+1)$.

Wreszcie dla $m=n$ mamy

$$\sum_{i=1}^{i=t} \sin^2 \frac{n \pi i}{t+1} = \frac{t+1}{2},$$

gdy n nie jest wielokrotnością $(t+1)$, oraz

$$\sum_{i=1}^{i=t} \sin^2 \frac{n \pi i}{t+1} = 0,$$

gdy n jest wielokrotnością $(t+1)$.

Tak więc w przypadku gdy ruszt składa się z kilku poprzecznic i podłużnic oraz gdy z szeregu (1.46) bierzemy tylko tyle członów, aby był spełniony warunek $(m+n) < 2(t+1)$, sumy występujące w wyrażeniu dla γ_{kj} sprowadzają się do jednego członu $\gamma_{kj} = p+1/(r+1)$.

Zważywszy, że $b = (r+1)b_1$ oraz $a = (p+1)a_1$, otrzymamy z równania (1.55)

$$(1.57) \quad S = \frac{EJ\pi^2}{a^2} \left(\frac{k^2}{\varrho^2} + \bar{k} \frac{\varrho^2}{k^2} \right),$$

gdzie

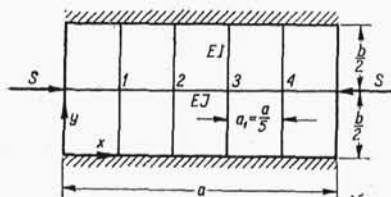
$$\bar{k} = \frac{Ib_1}{Ja_1},$$

zgodnie ze wzorem (1.43) uzyskanym z rozpatrywania rusztu jako płyty ortotropowej o zerowej sztywności na skręcanie.

Nasuwa się jeszcze pytanie zasadnicze: przy ilu podłużnicach traktować można poprzecznicę jako spoczywającą na sprężystym podłożu? Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy się uciec do ścisłego rozwiązania konkretnego przykładu i porównać wyniki z uprzednio uzyskanymi rezultatami, [4].

Wyznamy zatem siłę krytyczną rusztu składającego się z jednej poprzecznic i czterech podłużnic, a wyniki uzyskane porównajmy z wynikami uzyskanymi ze wzorów (1.17). Jako nadliczbowe tego czterokrotnie niewyznaczalnego układu przyjmijmy siły X_i ($i=1, 2, 3, 4$) wzajemnego oddziaływania poprzecznic.

Z przyrównania do zera względnych przesunięć pionowych w punktach 1, 2, 3, 4 otrzymamy układ równań



Rys. 5

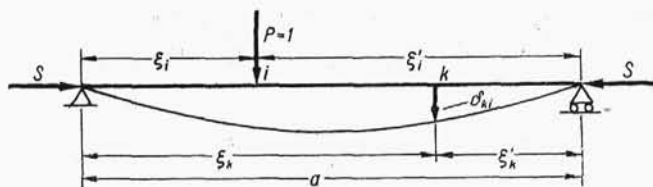
$$\sum_{i=1}^{i=4} X_i \delta_{ik} = 0 \quad (k=1, 2, 3, 4).$$

Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu równań jest warunkiem wyboczenia. Rozpatrzeć należy dwa przypadki wyboczenia: jeden o symetrycznej,

drugi o antymetrycznej postaci ugięcia poprzecznic. W pierwszym przypadku jest $X_1 = X_4$, $X_2 = X_3$; w drugim $X_1 = -X_4$, $X_2 = -X_3$.

Tak więc dla symetrycznej postaci wyboczenia mamy

$$(1.59) \quad \begin{cases} X_1(\delta_{11} + \delta_{14}) + X_2(\delta_{12} + \delta_{13}) = 0, \\ X_1(\delta_{21} + \delta_{24}) + X_2(\delta_{22} + \delta_{23}) = 0. \end{cases} \quad (\delta_{21} = \delta_{13})$$



Rys. 6

Tutaj wielkość δ_{ki} jest przesunięciem punktu k belki (poprzecznic) na dwu podporach swobodnie podpartej, ściskanej siłą S i obciążoną siłą pionową $P=1$ w punkcie i . Przesunięcia te otrzymamy z linii ugięcia belki ściskowej (rys. 6)

$$(1.60) \quad \begin{cases} \delta_{ki} = \frac{\sin \mu \xi_k' \sin \mu \xi_i}{S \mu \sin \mu a} - \frac{\xi_k' \xi_i}{S a} & \text{dla } \xi_k > \xi_i, \\ \delta_{ki} = \frac{\sin \mu \xi_i' \sin \mu \xi_k}{S \mu \sin \mu a} - \frac{\xi_i' \xi_k}{S a} & \text{dla } \xi_k < \xi_i. \end{cases}$$

Wyrażenia (1.60) napisać możemy również w postaci szeregu

$$(1.60.1) \quad \delta_{ki} = \frac{2a^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_k \sin a_n \xi_i}{n^4 - sn^2} \quad \text{dla } \xi_k \gtrless \xi_i.$$

Tutaj przyjęto oznaczenia

$$\mu^2 = \frac{S}{EJ}, \quad s = \frac{Sa^2}{EJ\pi^2}.$$

Wielkość δ_{11} z równania (1.59) składa się z dwu części, z ugięcia punktu 1 poprzeczniczy i ugięcia punktu 1 podłużniczy, wywołanych w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym stanem $X_1 = 1$. Podobnie rzecz ma się z wielkością δ_{22} .

Wyznacznik układu równań (1.59) przyjmie postać

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \frac{\pi^2}{2r}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} + \frac{\pi^2}{2r} \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie

$$a_{11} = 2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{5} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{3n\pi}{10}}{n^4 - n^2 s},$$

$$a_{22} = 2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi}{5} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{10}}{n^4 - n^2 s},$$

$$a_{12} = 2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{5} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{10}}{n^4 - n^2 s}.$$

Tutaj

$$r = \frac{a\beta_{11}}{S_E}, \quad S_E = \frac{EJ\pi^2}{a^2}.$$

Wielkość β_{11} jest reakcją środkowej podpory podłużnicy (traktowanej jako belka dwuprzęsłowa) dla stanu $w = -1$ na środkowej podporze.

Po prostych przekształceniach otrzymamy z wyznacznika układu równań (1.59) następujący związek:

$$r = \frac{\pi^2}{a_{12} \sqrt{5} - (a_{11} + a_{22})}$$

albo

$$(1.61) \quad r = \frac{\pi^2}{2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{5} \cos \frac{n\pi}{10} \left(\sqrt{5} + 5 - 8 \cos^2 \frac{n\pi}{10} \right)}{n^4 - n^2 s}}.$$

Dla antymetrycznej postaci wyboczenia otrzymamy układ równań:

$$(1.62) \quad \begin{cases} X_1 (\delta_{11} - \delta_{14}) + X_2 (\delta_{12} - \delta_{13}) = 0, \\ X_1 (\delta_{21} - \delta_{24}) + X_2 (\delta_{22} - \delta_{23}) = 0. \end{cases} \quad (\delta_{24} = \delta_{13})$$

Rozwiązanie tego układu równań daje

$$(1.63) \quad r = \frac{\pi^2}{\bar{a}_{12} \sqrt{5} - (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22})},$$

gdzie

$$\bar{a}_{11} = -2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{5} \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{3n\pi}{10}}{n^4 - n^2 s},$$

$$\bar{a}_{22} = -2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi}{5} \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{10}}{n^4 - n^2 s},$$

$$\bar{a}_{12} = -2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{5} \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{10}}{n^4 - n^2 s}.$$

Związek (1.63) przekształcimy na

$$(1.64) \quad r = \frac{\pi^2}{2 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{5} \sin \frac{n\pi}{10} \cos \frac{n\pi}{2} \left(3 - \sqrt{5} - 8 \cos^2 \frac{n\pi}{10} \right)}{n^4 - n^2 s}}.$$

Na rysunku 8 naniesiono s na podstawie związków (1.61) i (1.64) jako funkcje r . Krzywe te przecinają się tworząc przedziały, w których mamy do czynienia z symetryczną względnie antymetryczną postacią wybożenia.

Linia pełną wykreślono najmniejsze wartości s w zależności od parametru r charakteryzującego właściwości sprężyste poprzecznic i podłużnic.

Linia AB charakteryzuje symetryczną postać wybożenia o jednej półfali, linia CD o trzech półfalach, linia BC i DE charakteryzuje antymetryczną postać wybożenia o dwu i czterech półfalach.

Przy potraktowaniu tego samego rusztu jako składającego się z jednej poprzecznicy i ciągłego rozmieszczenia podłużnic otrzymamy siłę krytyczną ze wzoru (1.17)

$$S = EJ a_n^2 + \frac{\beta_{11}}{a_1 a_n}.$$

Równanie to możemy napisać w postaci

$$(1.65) \quad s = n^2 + \frac{ra}{n^2 \pi^2 a_1}.$$

Dla rozważanego tu przypadku czterech poprzecznic jest $a_1 = a/5$.
Zatem

$$(1.65.1) \quad s = n^2 + \frac{5r}{n^2 \pi^2}.$$

Wstawiając kolejno $n = 1, 2, 3, 4$, otrzymamy proste

$$s = 1 + \frac{5r}{\pi^2}, \quad s = 4 + \frac{5r}{4\pi^2}, \quad s = 9 + \frac{5r}{9\pi^2}, \quad s = 16 + \frac{5r}{16\pi^2}.$$

Proste te naniesiono na rys. 7. Najmniejsze wartości s otrzymamy z linii łamanej $A'B'C'D'$. Spostrzegamy tu dużą zgodność wyników dla wybożenia według jednej i dwu półfal. Dla $r = 100$ otrzymano z równania (1.61) wartość $s = 14,4$, z równania (1.65.1) wartość $s = 14,64$.

Procentowa różnica wynosi tu

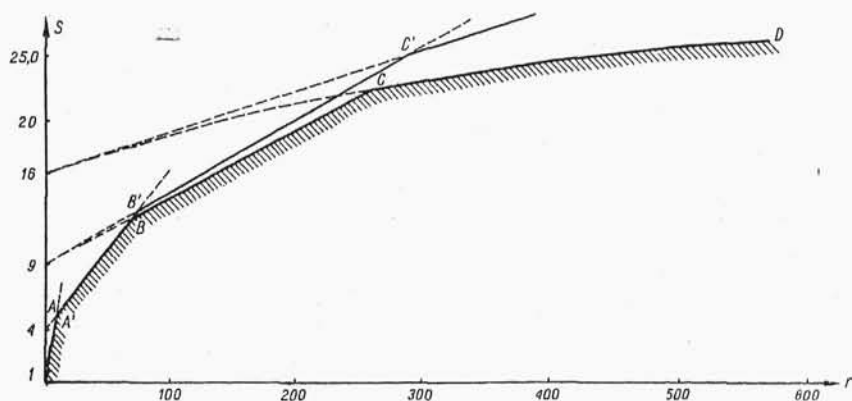
$$\frac{14,64 - 14,4}{14,40} = 1,67\%.$$

Jeżeli poprzestać na tej dokładności, to mamy

$$r = \frac{a \beta_{11}}{S_E} \leq 100.$$

Zważywszy, że $\beta_{11} = \nu EI/b^3$, otrzymamy w przypadku rusztu według rys. 5, ($\nu = 48$):

$$(1.66) \quad r = \frac{48 I}{J \pi^2} \left(\frac{a}{b} \right)^3 \leq 100.$$



Rys. 7

W poniższej tabeli naniesiono stosunek J/I w zależności od $\varrho = a/b$.

$\varrho = a/b$	1	2	3	4	10
$\frac{J}{I} \geq$	0,0486	0,3891	1,3131	3,1126	48,6340

Dla utwierdzenia zupełnego podłużnic należy we wzorze (1.66) wstawić $\nu = 192$.

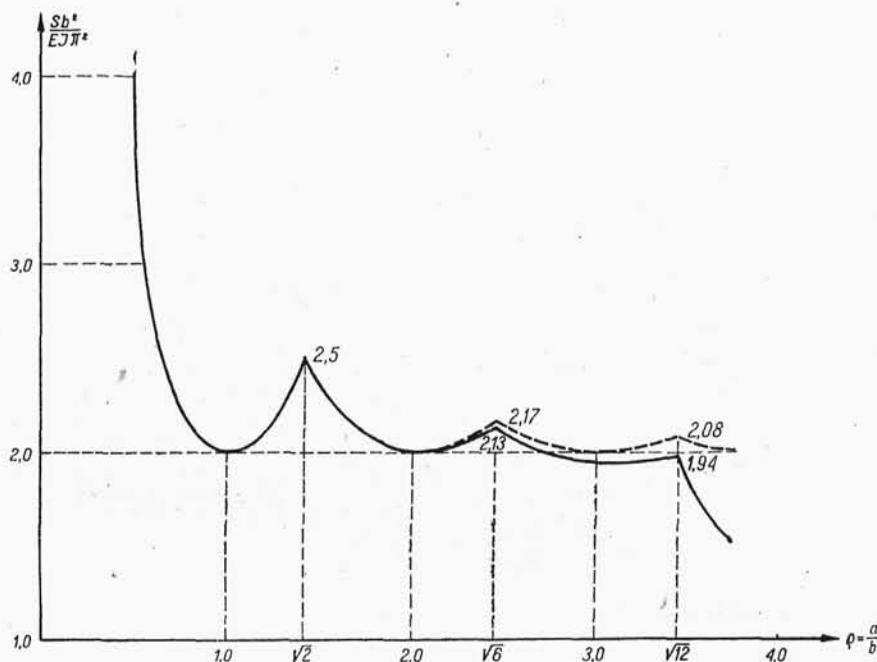
Dla rusztu o dwu poprzecznicach i czterech podłużnicach swobodnie podpartych jest $\nu = 32,4$; dla podłużnic zupełnie utwierdzonych $\nu = 162$. Odpowiednio zmienia się i granica stosunku \bar{J}/I .

Doprowadzimy teraz funkcję $s = f(r)$ do postaci $S = f_1(\varrho)$. Przyjmijmy ponadto, że $48 Ib/\pi^4 J a_1 = 1$, $a_1 = a/5$.

Wtedy

$$s = \frac{S b^3}{E J \pi^2}, \quad r = \frac{\pi^2}{5} \varrho.$$

Na rysunku 8 naniesiono krzywe $S = f_1(\varrho)$; dla porównania narysowano funkcję $S = f_2(\varrho)$ według wzoru (1.18) (najniższą krzywą z rysunku 2). Otrzymujemy tu dużą zgodność wyników dla wyboczenia według jednej względnie dwu półfal.



Rys. 8

Reasumując stwierdzić trzeba, że dla $r \leq 100$ można już przy czterech podłużnicach traktować poprzecznice rusztu z dostatecznym dla celów praktycznych przybliżeniem (dokładność $< 2,0\%$) jako belkę spoczywającą na ciągłym sprężystym podłożu. Warunek $r \leq 100$ jest w konstrukcjach budowlanych na ogół spełniony.

Z powyższych rozwiązań wynika, że już przy czterech podłużnicach można traktować poprzecznice, z dostatecznym dla celów technicznych przybliżeniem, jako belkę spoczywającą na sprężystym podłożu.

Przeliczenia dla innych stosunków $48 I b / \pi^4 J_1 a_1$ oraz dla dwu poprzecznic wskazują na dużą zgodność wyników uzyskanych w sposób ścisły i w sposób przybliżony.

2. Zajmijmy się rusztem złożonym ze znacznej ilości podłużnic ściskanych i kilku poprzecznic. Niech podłużnice rozmieszczone będą w jednakowym odstępnie a_1 i niech posiadają jednakowe przekroje.

Przy wyznaczaniu siły krytycznej S_k układu wychodzimy z równań różniczkowych ugięcia poprzecznic dla $S > S_k$:

$$(2.1) \quad a_1 E J_k \frac{d^4 w_k}{dx^4} + \sum_{i=1}^{i=r} \beta_{ki} w_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

W powyższym układzie wielkości β_{ki} są funkcjami siły podłużnej S .

Zajmijmy się przypadkiem szczególnym swobodnego podparcia wszystkich poprzecznic. Ponieważ wyboczenie nastąpi przy jednej półfali w kierunku osi x , założyć możemy

$$(2.2) \quad w_i = A_i \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Wstawiając (2.2) do (2.1) otrzymamy

$$(2.3) \quad a_1 \frac{E J_k \pi^4}{a^4} A_k + \sum_{i=1}^{i=r} \beta_{ki}(s) A_i = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, r).$$

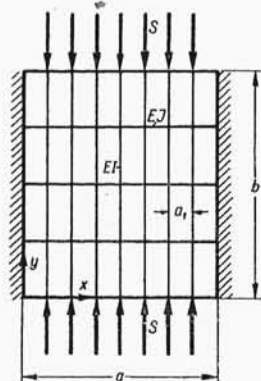
Przyrównanie do zera wyznacznika powyższego układu równań jednorodnych prowadzi do równania przestępnego. Najmniejszy pierwiastek tego równania daje wartość najmniejszej siły krytycznej.

Mimo formalnie prostego algorytmu, rozwiązanie uzyskane w podany tu sposób nadaje się jedynie do przypadku jednej, dwóch i najwyżej czterech poprzecznic. Trudności polegają na skomplikowanej postaci funkcji $\beta_{ki}(s)$ i wyznacznika układu. Dla większej ilości poprzecznic posłużyć się można metodą energetyczną lub modelem płyty ortotropowej o zerowej sztywności skręcania.

Ograniczymy się do rozpatrzenia rusztu z jedną i z dwiema poprzeczniami w założeniu swobodnego podparcia podłużnic wzdłuż prostych $y = 0$ i $y = b$.

Punktem wyjścia dla wyznaczenia wartości β_{ik} będzie linia wpływa ugięcia (funkcja Greena) według wzoru (1.60).

Korzystając z powyższych wzorów wyznaczyć można współczynniki δ_{ik} (ugięcia punktu i podłużnicy wywołane obciążeniem $P = 1$ działającym w punkcie k). Wielkości β_{ik} są wyrazami macierzy sprzężonej z macierzą wielkości δ_{ik} .



Rys. 9

Niech dany będzie ruszt o jednej poprzecznicy o sztywności EJ . Niech poprzecznicą tą leży w odległości $y = b/2$ od osi x . Układ równań (2.3) ograniczy się do jednego równania

$$(2.4) \quad \frac{EJ a_1 \pi^4}{a^4} + \beta_{11}(s) = 0.$$

Tutaj

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad \delta_{11} = \frac{\sin^2 \frac{\mu b}{2}}{S \mu \sin \mu b} - \frac{b}{4S},$$

gdzie

$$\mu^2 = \frac{S}{EJ}.$$

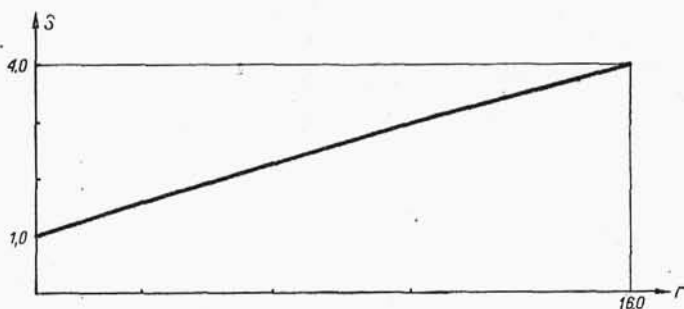
Wprowadzając oznaczenia

$$r = \frac{J a_1 \pi^2 b^3}{I a^4}, \quad s = \frac{S b^2}{EI \pi^2}, \quad b \mu = \pi \sqrt{s}$$

napisać możemy związek (2.4) w postaci

$$(2.5) \quad r = \frac{4s}{1 - \frac{2}{\pi \sqrt{s}} \operatorname{tg} \frac{\pi \sqrt{s}}{2}}.$$

Dla $r=0$, a więc w braku poprzecznicy, otrzymamy $s=1$, tzn. $s = EI \pi^2 / b^2$.



Rys. 10

Dla $r=16$ jest $s=4$; otrzymujemy to wygięcie według dwu półfal, z zerową wartością ugięcia na prostej $y = b/2$. Jest rzecz interesująca, że dla $r > 16$ nie otrzymamy już zwiększenia siły krytycznej. Wykres $s = f(r)$ przedstawiono na rys. 10.

Rozważmy ruszt o dwu jednakowych poprzecznicach. Niech poprzecznice dzielą bok b na trzy równe części.

Otrzymamy układ równań

$$(2.6) \quad \begin{cases} \left(\frac{a_1 EJ \pi^4}{a^4} + \beta_{11} \right) A_1 + \beta_{12} A_2 = 0, \\ \beta_{21} A_1 + \left(\frac{a_1 EJ \pi^4}{a^4} + \beta_{22} \right) A_2 = 0. \end{cases}$$

Rozpatrzeć należy dwa przypadki, wyboczenie symetryczne i antymetryczne. W pierwszym przypadku jest $A_1 = A_2$, w drugim $A_1 = -A_2$. Ponadto ze względu na symetrię układu jest $\beta_{11} = \beta_{22}$.

Dla symetrycznej postaci wyboczenia mamy

$$(2.7) \quad \frac{a EJ \pi^4}{a_1} + \frac{1}{\delta_{11} + \delta_{12}} = 0.$$

Zważywszy, że w myśl wzorów (1.60) jest

$$\frac{S}{b} (\delta_{11} + \delta_{12}) = \frac{\sin \mu b/3 \cos \mu b/6}{b \mu \cos \mu b/2} \frac{1}{3},$$

otrzymamy po prostych przekształceniach

$$(2.8) \quad r = \frac{s}{\frac{1}{3} - \frac{\sin \pi \sqrt{s}/3 \cos \pi \sqrt{s}/6}{\pi \sqrt{s} \cos \pi \sqrt{s}/2}}.$$

Dla postaci antymetrycznej wyboczenia jest

$$(2.8.1) \quad \frac{a EJ \pi^4}{a^4} + \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}} = 0,$$

co prowadzi do związku

$$(2.9) \quad r = \frac{s}{\frac{1}{9} - \frac{\sin \pi \sqrt{s}/3 \sin \pi \sqrt{s}/6}{\pi \sqrt{s} \sin \pi \sqrt{s}/2}}.$$

Na rysunku 11 przedstawiono $s = f(r)$.

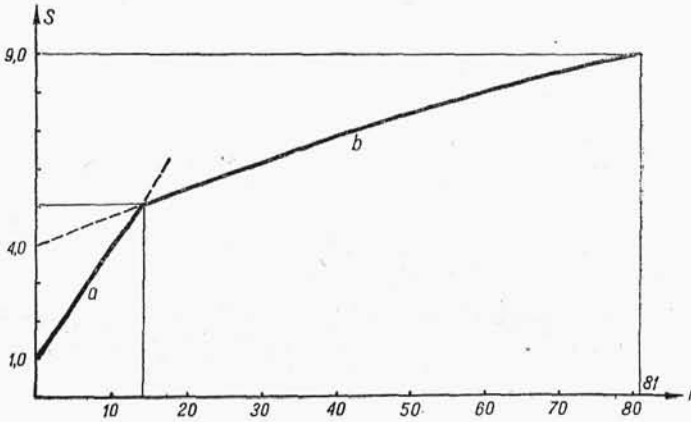
Dla $r = 81$ otrzymujemy $s = 9$. Odpowiada to wyboczeniu symetrycznemu według trzech półfal. Dla $r > 81$ nie otrzymamy już wzrostu siły krytycznej S .

Dla czterech poprzecznic otrzymamy układ równań

$$(2.10) \quad a_1 \frac{EJ \pi^4}{a^4} A_k + \sum_{i=1}^{i=4} \beta_{ki} A_i = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Układ ten napisać możemy również w postaci

$$(2.11) \quad \sum_{i=1}^{i=4} \delta_{ki} A_i + \frac{a^4}{a_1 EJ \pi^4} A_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$



Rys. 11

Dla symetrycznej postaci wyboczenia otrzymamy $A_1 = A_1$ i $A_2 = A_3$, a dla antymetrycznej $A_1 = -A_4$ i $A_2 = -A_3$.

Rozwiązanie tego układu jest identyczne jak układu równań (1.59) i (1.62). W wyniku rozwiązania otrzymamy wzory (1.61) i (1.64) z tym, że r ma tu inne znaczenie, mianowicie $r = Ja_1 \pi^2 b^3 / Ia^4$.

Dla większej ilości poprzecznic, jednakowych i rozmieszczonych w jednakowych odstępach, najwygodniej będzie uciec się do rozwiązania przybliżonego, opartego na modelu płyty ortotropowej o zerowej sztywności na skręcanie.

Wstawiając do równania różniczkowego

$$(2.12) \quad \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{S}{a_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

funkcję

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b},$$

otrzymamy

$$(2.13) \quad \frac{EJ}{b_1} \frac{\pi^4}{a^4} + \frac{EI}{b_1} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{S}{a_1} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} = 0.$$

Wprowadzając jak uprzednio oznaczenia

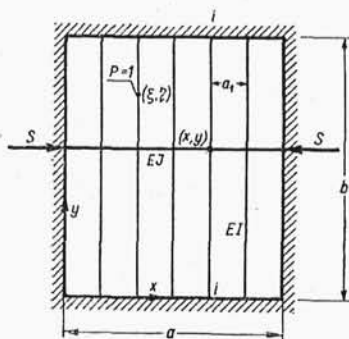
$$r = \frac{J a_1 \pi^2 b^3}{I a^4}, \quad s = \frac{S b^2}{EI \pi^2}$$

oraz zakładając cztery poprzecznicę ($b_1 = b/5$), napiszemy związek (2.10.1) w postaci

$$(2.14) \quad s = n^2 + 5r \pi^2 n^2.$$

Równanie to ma identyczną postać z równaniem (1.65.1). Stwierdzamy więc, że dla czterech i więcej poprzecznic możemy zastąpić, z dostateczną dla celów praktycznych dokładnością, układ równań (2.1) równaniem różniczkowym płyty ortotropowej o zerowej sztywności na skręcanie.

3. Dla wielu przypadków wyboczenia pomocna będzie funkcja Greena (linia wpływowa) rusztu. Niech dany będzie ruszt o szeregu podłużnic w odstępach a_1 oraz o jednej poprzecznicę. Szukamy linii wpływowej ugięcia punktu (x, y) poprzecznicę dla siły $P=1$ w punkcie (ξ, η) .



Rys. 12

Ograniczymy się do przypadku swobodnego podparcia poprzecznicę.

Równanie różniczkowe ugięcia poprzecznicę ma tu postać

$$(3.1) \quad a_1 EJ \frac{d^4 w_1}{dx^4} + S a_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \beta_{11} w_1 = r_1,$$

gdzie r_1 jest równe zeru, z wyjątkiem odciętej $x = \xi$, dla której przyjmuje ono wartość $R_1^0(\eta)$. Tutaj $R_1^0(\eta)$ jest linią wpływową reakcji podporowej w punkcie (ξ, y) podłużnicę i -i jako belki na trzech podporach niepodatnych.

Założmy

$$(3.2) \quad w_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{n,1} \sin a_n x, \quad r_1(x) = \frac{2 R_1^0(\eta)}{a} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Wstawiając powyższe szeregi do (3.1) uzyskamy

$$(3.3) \quad A_{n,1}(EJ a_1 a_n^4 - S a_1 a_n^2 + \beta_{11}) = \frac{2R_1^0(\eta)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Linia, a właściwie układ linii wpływowych, przyjmie tu postać

$$(3.4) \quad w(x, y; \xi, \eta) = \frac{2R_1^0(\eta)}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin a_n x}{[EJ a_1 a_n^4 - S a_1 a_n^2 + \beta_{11}(y)]}.$$

Dla ustalonego (x, y) otrzymamy ze związku (3.4) wszystkie gałęzie linii wpływowej ugięcia. Jest rzeczą interesującą, że linię ugięcia otrzymujemy w postaci iloczynu funkcji η i funkcji ξ .

Przy pomocy związku (3.4) wyznaczmy linię wpływową momentów zginających i sił tnących poprzeczniczy:

$$(3.5) \quad M(x, y; \xi, \eta) = -EJ \frac{d^2 w_1}{dx^2}, \quad T(x, y; \xi, \eta) = -EJ \frac{d^3 w_1}{dx^3}.$$

Interesująca jest wreszcie linia wpływowa funkcji X ; otrzymamy ją ze wzoru

$$X = q a_1 = w_1 \beta_{11} - R_1^0,$$

przy czym

$$(3.6.1) \quad X(x, y; \xi, \eta) = w_1(x, y; \xi, \eta) \beta_{11}(y) - R_1^0(\eta) \quad \text{dla } x = \xi$$

oraz

$$(3.6.2) \quad X(x, y; \xi, \eta) = w_1(x, y; \xi, \eta) \beta_{11}(y) \quad \text{dla } x \neq \xi.$$

Znajomość linii wpływowych $X(x, y; \xi, \eta)$ pozwoli na wyznaczenie linii wpływowych momentów i sił tnących w dowolnym przekroju podłużnic.

Dla zagadnień statyki rusztów położyć należy $S = 0$.

Dla rusztu o r poprzecznicach uzyskamy układ równań różniczkowych

$$(3.7) \quad a_1 EJ_k \frac{d^4 w_k}{dx^4} + a_1 S_k \frac{d^4 w_k}{dx^2} + \sum_{i=1}^{i=r} \beta_{ik} w_i = r_k \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

gdzie $r_k = R_k^0(\eta)$ dla $x = \xi$ oraz $r_k = 0$ dla $x \neq \xi$.

Podstawiając jak uprzednio

$$(3.8) \quad w_k = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,k} \sin a_n x, \quad r_k = \frac{2R_k^0(\eta)}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x$$

otrzymamy układ równań liniowych niejednorodnych

$$(3.9) \quad (a_1 E J_k a_n^4 - a_1 S_k a_n^2) A_{n,k} + \sum_{i=1}^{i=r} \beta_{ki} A_{n,i} = \frac{2R_k^0(\eta)}{a} \sin a_n \xi$$

$$(k = 1, 2, \dots, r; \quad n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Rozwiązując powyższy układ względem $A_{n,k}$ i wstawiając do pierwszego szeregu (3.8) otrzymamy linię wpływową ugięcia $w_k(x, y; \xi, \eta)$. Ogólnie stwierdzić można, że w zagadnieniach statyki ($S_k = 0$) szeregi dla w_k są silnie zbieżne i dla celów praktyki inżynierskiej wystarczy przyjąć jedynie pierwszy wyraz szeregu. W zagadnieniach jednoczesnego zginania i ściskania rusztu zbieżność szeregu zależy od stosunku S/S_{kr} .

Przy zdążaniu tego stosunku do jedności zbieżność szeregu maleje i dla $S = S_{kr}$ szereg jest rozbieżny.

Wyprowadzone zależności pozwalają na rozwiązanie szeregu przypadków wyboczenia rusztu.

Niech dowolna poprzecznicą, na przykład k -ta będzie podparta na końcach a ponadto w obrębie rusztu, w punkcie o współrzędnych (x_0, y_0) . W punkcie tym ustawiamy siłę $P = 1$ i żądamy, aby dla $S > S_k$ ugięcie w tym punkcie było równe zero.

Warunek ten wyrazimy w postaci

$$(3.10) \quad w_k(x_0, y_0; x_0, y_0) = 0.$$

Warunek powyższy prowadzi do równania, w którym niewiadomą będzie wielkość siły krytycznej S . Najmniejszy pierwiastek tego równania daje najmniejszą wartość siły krytycznej.

Zadanie uogólnić można na dowolną liczbę punktów podparcia poprzecznic w obrębie rusztu oraz na podpory podatne, sprężyste.

Dla przykładu zajmijmy się przypadkiem najprostszym, mianowicie rusztem o jednej poprzecznicy podpartej w środku rozpiętości. Założmy symetrię układu.

Wtedy przy

$$x = \xi = a/2, \quad R_1^0(\eta) = 1, \quad \beta_{11} = \frac{48EI}{b^3}$$

otrzymamy z równania (3.4) $w(a/2, b/2; a/2, b/2) = 0$ albo

$$(3.11) \quad \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4 - \lambda n^2 + \frac{48 Ib}{\pi^4 J a_1} \left(\frac{a}{b}\right)^4} = 0, \quad \lambda = \frac{S a^2}{E J \pi^2}.$$

Drogą prób wyznaczymy z powyższego szeregu wartość λ_{min} , a tym samym

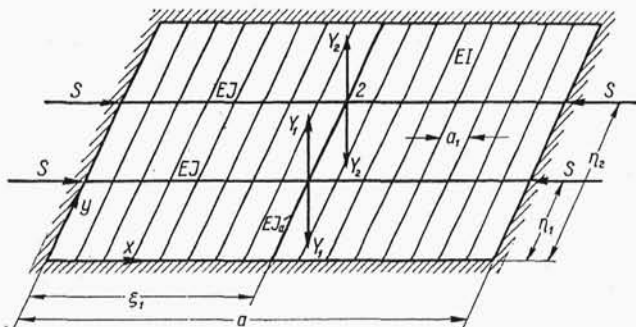
$$S_{min} = \frac{E J \pi^2}{a^2} \lambda_{min}.$$

Dla

$$\frac{48 Ib}{\pi^4 J a_1} \left(\frac{a}{b}\right)^4 = 1$$

otrzymamy

$$\lambda_{min} = 8,39, \quad S_{min} = 8,39 \frac{\pi^2 E J}{a^2}.$$



Rys. 13

Dalszym przykładem niech będzie ruszt o dwu poprzecznicach i wielu podłużnicach o sztywności EI oraz jednej o sztywności EJa . Przyjmując jako nadliczbowe układu siły wzajemnego oddziaływania Y_1 i Y_2 w punktach skrzyżowania belek uzyskamy równanie kanoniczne w postaci

$$(3.12) \quad \begin{cases} Y_1 \gamma_{11} + Y_2 \gamma_{12} = 0, \\ Y_1 \gamma_{21} + Y_2 \gamma_{22} = 0. \end{cases}$$

Układ ten będzie niesprzeczny, gdy

$$(3.13) \quad \gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = 0.$$

Wartości γ_{11} , γ_{22} i γ_{12} składają się z dwu członów:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \delta_{11} + w_1(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1), & \gamma_{22} &= \delta_{22} + w_2(\xi_2, \eta_2; \xi_2, \eta_2), \\ \gamma_{12} &= \delta_{12} + w_1(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2). \end{aligned}$$

Wielkości δ_{11} , δ_{22} i δ_{12} znajdziemy łatwo jako odpowiednie rzędne linii ugięcia podłużnicy o sztywności EJ_a , wielkości zaś $w_1(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2), \dots$ z wyprowadzonych uprzednio wzorów dla jednoczesnego zginania i ściskania rusztu.

Podobne przykłady można by mnożyć. Stwierdzić jednak trzeba, że w przypadku, gdy istnieją więcej niż dwie poprzecznice i podłużnice, o innej sztywności niż pozostałe, rozwiązanie równania przestępnego dla wyznaczenia sił krytycznych natrafia na nieomal nieprzezwyciężone trudności natury rachunkowej. Dlatego w bardziej złożonych układach uciec się należy do metody energetycznej. Przy kilku poprzecznicach o jednakowym przekroju, położonych w jednakowym od siebie odstępach, posłużyć się można teorią płyt ortotropowych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. Timoschenko, *Über die Biegung von Trägerrosten*, Z.A.M.M. 1933.
- [2] M. T. Huber, *Teoria płyt prostokątnie-różnokierunkowych*, Lwów 1921.
- [3] W. Nowacki, *Sur les problèmes de la stabilité d'une plaque orthotrope*, Arch. Mech. Stos. 1950.
- [4] B. Klemperer i H. B. Gibson, *Über die Knickfestigkeit eines auf elastischen Zwischenstützen gelagerten Balkens*.
- [5] G. H. Bryan, Proc. London Math. Soc., t. 22, 1891.
- [6] S. Timoschenko, Ann. Ponts. Chauss. 83 (1913), cz. 3.
- [7] W. Ritz, *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*, J. f. Reine u. Angew. Math., t. 135, Paryż 1911.

Резюме

ИЗ ВОПРОСОВ ПЛОСКИХ ПЕРЕКРЫТИЙ

В настоящей работе автор рассматривает вопрос одновременного действия поперечного изгиба и сжатия и проблему устойчивости плоского перекрытия. Перекрытие состоит из многих, на равных расстояниях уложенных, одинаковых балок главного направления, подпертых несколькими перекрестными балками. Считая, что силы взаимодействия балки главного направления на перекрестные связи балки разложены непрерывным образом, можно привести задачу к решению системы линейных дифференциальных уравнений (1.12) и (1.19). Это позволяет весьма просто получить не только прогиб поперечин путём интегрирования уравнений (1.12), но и критические силы путём решения соответствующей граничной задачи системы уравнений (1.19). Далее доказано, что в случае поперечин одинакового сечения,

уложенных на равных расстояниях и сжимаемых силой S , можно для более чем трёх перекрестных балок заменить систему уравнений (1.19) дифференциальным уравнением устойчивости ортотропной пластинки с нулевым значением жёсткости на кручение [уравнение (1.29)]. Далее приведено общее решение задачи продольного изгиба перекрытия при помощи энергетического метода. Доказано, что, при одинаковых сечениях перекрестных балок, при равных расстояниях между ними и равных сжимающих силах, результаты, полученные энергетическим методом, весьма близки результатам, полученным при применении модели ортотропной пластинки. Наконец проведена дискуссия над вопросом числа поперечин, необходимых для того, чтобы можно было при вопросах продольного изгиба считать поперечины лежащими на упругом основании.

Решение приведенное во второй части касается случая, в котором лонжероны, расположенные непрерывно, подвергаются сжатию (фиг. 9). Здесь дано решение для плоского перекрытия с одной, двумя и четырьмя поперечинами. Результаты, полученные для четырёх поперечин, сравниваются с результатами, полученными на модели ортотропной пластинки, причём доказано их близкое совпадение. Это позволяет заключить, что для технических целей можно при четырёх и более поперечинах заменить систему дифференциальных уравнений (2.1) одним простым дифференциальным уравнением (2.18).

В последней части приведены линии влияния (функции Грина) сжимаемого перекрытия при силе $P=1$, перемещающейся вдоль поперечин и лонжеронов. Эта функция находит применение для определения прогиба и статических величин перекрытия, обусловленных любой нагрузкой; наконец находит применение при определении критической силы плоских перекрытий, опёртых по контуру, а кроме того и в многих точках в пределах перекрытия.

S u m m a r y

SOME PROBLEMS FROM THE THEORY OF FLAT GRIDWORKS

The author discusses the problem of combined bending and compression and the problem of buckling of a flat gridwork. The gridwork consists of many evenly spaced identical beams, supported by several transversal girders. Considering the forces acting between the longitudinal and the transversal beams as continuously distri-

buted along the latler, the problem can be reduced to that of solving a system of linear differential equations (1.12) and (1.19). This permits to obtain the deflections of transversal beams by integrating Eqs. (1.12) and to find the critical forces by solving a corresponding boundary problem (1.19). Next it is shown, that in the case of transversal, evenly spaced beams of identical cross sections, compressed by a force S , the system of equations (1.19) can be replaced, for more than three transversal beams, by the equation of buckling of an orthotropic plate whose torsional rigidity (Eq. 1.29) is equal to zero. Further a general solution of the problem of buckling of the gridwork, obtained by means of the energy method, is given. It is shown that for transversal beams of identical cross sections, evenly spaced and compressed with equal forces, the results obtained by means of the energy method are very near those obtained by means of the orthotropic plate model. Finally the problem of the number of transversal beams, permitting to consider them as resting on an elastic base is discussed.

The results of Sec. 2 concern the case of compression of continuously distributed longitudinal bars (Fig. 9). Solutions for one, two and four transversal beams are given. The results obtained for four transversal beams are compared to those obtained by means of the orthotropic plate model. The agreement is found to be good. This permits to state that for technical purposes the system of differential equations (2.1) can be replaced, for four and more transversal beams, by one simple differential equation (2.18).

Finally, in the last section, the lines of influence (the function of Green) for a compressed gridwork are given, the force $P = 1$ being moved along the transversal and the longitudinal bars. This function can be used to determine the deflection and the statical quantities for any load; it can be equally used to find the critical force for a gridwork supported on the boundary and at some additional points inside.