

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

# ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

K O M I T E T   R E D A K C Y J N Y

WITOLD NOWACKI – PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER   MICHAŁ BROSZKO

WACŁAW OLSZAK   BOHDAN STEFANOWSKI

STANISŁAW TURSKI   WITOLD WIERZBICKI

JERZY NOWIŃSKI – SEKRETARZ NAUKOWY

T O M   V

WRZESIEŃ 1953

ZESZYT 3

W A R S Z A W A

# DRGANIA WŁASNE I WYBOCZENIE PŁYT PROSTOKĄTNYCH PODPARTYCH SWOBODNIE NA OBWODZIE I PUNKTOWO W OBRĘBIE PŁYTY

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Jednym z powszechnie stosowanych środków mających na celu zwiększenie siły krytycznej lub częstotliwości drgań własnych płyty prostokątnej jest usztywnienie płyty żebrami. Podobny skutek osiągnąć można również przez umieszczenie w obrębie płyty podpór punktowych lub liniowych, podatnych lub też niepodatnych. Zabieg taki daje się wykonać w wielu elementach konstrukcyjnych, wobec czego wydaje się rzeczą pożądaną dokonanie analizy skuteczności tego rodzaju zabiegu.

Ogólną metodę rozwiązania tego typu zagadnień, zwięzłą jednak do wyboczenia, podał autor przed trzema laty, [1]. W roku ubiegłym temat ten podjął S. Woźniowski-Krieger podając analogiczne rozwiązanie dla przypadku wyboczenia płyty wszechstronnie ściskanej, podpartej na brzegach w sposób swobodny oraz punktowo w środku płyty, [2].

Przedmiotem niniejszej pracy jest zagadnienie ogólniejsze, mianowicie problem zbadania wpływu podpory punktowej na częstość drgań własnych płyty przy jednoczesnym ściskaniu płyty. Tak postawione zagadnienie pozwala w przypadkach granicznych zająć się wyboczeniem płyty oraz drganiami swobodnymi płyty bez udziału sił ściskających. Szczególną uwagę zwrócono na zagadnienie wyboczenia płyty jako na zagadnienie praktycznie ważniejsze.

1. Niech dana będzie płyta prostokątna na krawędziach swobodnie podparta, podlegająca działaniu sił  $q$  jednostajnie rozłożonych na krawędziach  $x=0$  i  $x=a$  przy jednoczesnym działaniu siły wymuszającej  $P \sin \omega t$  (rys. 1) w punkcie  $(\xi, \eta)$ . Podzielmy płytę przekrojem  $y=\eta$  na dwa obszary (I i II).

W każdym z nich powinno być spełnione równanie różniczkowe odkształcenia płyty

$$(1.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 \bar{w}_j + q \frac{\partial^2 \bar{w}_j}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}_j}{\partial t^2} = 0 \quad (j = I, II).$$

W równaniu tym oznacza  $\bar{w}(x, y, t)$  ugięcie płyty,  $N$  sztywność zginania, a  $\mu$  masę płyty odniesioną do jednostki pola jej płaszczyzny środkowej.

Zakładając drgania harmoniczne płyty, a więc przyjmując  $\bar{w}(x, y, t) = w(x, y) \sin \omega t$ , otrzymamy

$$(1.2) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w_j + q \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} - \mu \omega^2 w_j = 0.$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego przyjmujemy w postaci

$$(1.3) \quad \begin{cases} w_I(x, y) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Y_{n,I}(y) \sin a_n x, \\ w_{II}(x, y') = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Y_{n,II}(y') \sin a_n x. \end{cases} \quad \left( a_n = \frac{n\pi}{a} \right),$$

Tak uczynione założenie spełnia warunki brzegowe zadania ( $w_j = 0$ ,  $\nabla^2 w_j = 0$ ) na krawędziach  $x = 0$  oraz  $x = a$ .

Łatwo wykazać, że funkcje

$$(1.4) \quad \begin{cases} Y_{n,I}(y) = A_n \sinh \lambda_n y + B_n \sinh \varepsilon_n y, \\ Y_{n,II}(y') = A'_n \sinh \lambda_n y' + B'_n \sinh \varepsilon_n y', \end{cases}$$

gdzie

$$\lambda_n, \varepsilon_n = \sqrt{a_n^2 \pm \sqrt{k^2 a_n^2 + c^2}},$$

$$k^2 = \frac{q}{N}, \quad c^2 = \mu \frac{\omega^2}{N}$$

spełniają zarówno warunki brzegowe ( $w_j = 0$ ,  $\nabla^2 w_j = 0$ ) na brzegach  $y = 0$  i  $y' = 0$ , jako też równanie różniczkowe (1.2). Stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $A'_n$  i  $B'_n$  znajdziemy z czterech warunków brzegowych dla  $y = \eta$ .

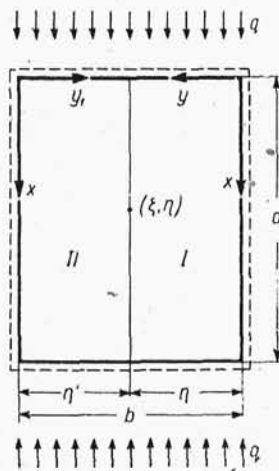
Do dyspozycji stoją dwa warunki ciągłości płyty

$$(1.5.1) \quad w_I(x, \eta) = w_{II}(x, \eta'), \quad \frac{\partial w_I(x, \eta)}{\partial y} = - \frac{\partial w_{II}(x, \eta')}{\partial y'},$$

oraz dwa warunki statyczne

$$(1.5.2) \quad \frac{\partial^2 w_I(x, \eta)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_{II}(x, \eta')}{\partial y'^2},$$

$$N \left[ \frac{\partial^3 \bar{w}_I}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \bar{w}_{II}}{\partial y'^3} \right]_{y=\eta} = -p(x) \sin \omega t.$$



Rys. 1

Pierwszy z dwu ostatnich warunków wskazuje na równość momentów zginających:  $m_y(x, \eta) = m_{y'}(x, \eta')$ . Drugi z nich dotyczy równowagi sił tnących, działających bezpośrednio na lewo i na prawo od przekroju  $y = \eta$ , z obciążeniem  $p(x) \sin \omega t$  działającym w tym przekroju. W naszym przypadku mamy do czynienia z siłą skupioną  $P \sin \omega t$ . Wyrazimy ją za pomocą szeregu Fouriera

$$p(x) = \frac{2P}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Z warunków brzegowych (1.5.1) - (1.5.2) uzyskamy

$$(1.6) \quad \begin{cases} A_n = -\frac{2P}{aN} \frac{1}{(\lambda^2 - \varepsilon^2) \lambda} \frac{\sin a_n \xi}{\cosh \lambda \eta (1 + \operatorname{tgh} \lambda \eta \operatorname{ctgh} \lambda \eta')} , \\ B_n = \frac{2P}{aN} \frac{1}{(\lambda^2 - \varepsilon^2) \varepsilon} \frac{\sin a_n \xi}{\cosh \varepsilon \eta (1 + \operatorname{tgh} \varepsilon \eta \operatorname{ctgh} \varepsilon \eta')} , \\ A'_n = A_n \frac{\sinh \lambda \eta}{\sinh \lambda \eta'} , \quad B'_n = B_n \frac{\sinh \varepsilon \eta}{\sinh \varepsilon \eta'} . \end{cases}$$

Wstawiając stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $A'_n$  i  $B'_n$  do wzorów (1.3) otrzymujemy powierzchnię ugięcia płyty w obszarze I i II. Znajomość ugięcia pozwoli na bezpośrednie wyznaczenie wszelkich wielkości statycznych, mianowicie momentów zginających i skręcających oraz sił tnących płyty.

Ugięcie płyty w punkcie  $(\xi, \eta)$ , tj. w punkcie zaczepienia siły wymuszającej, wyniesie

$$(1.7) \quad \bar{w}(\xi, \eta, t) = \frac{2P \sin \omega t}{Na} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{(\lambda^2 - \varepsilon^2)} \left[ \frac{\operatorname{tgh} \varepsilon \eta}{\varepsilon (1 + \operatorname{tgh} \varepsilon \eta \operatorname{ctgh} \varepsilon \eta')} - \frac{\operatorname{tgh} \lambda \eta}{\lambda (1 + \operatorname{tgh} \lambda \eta \operatorname{ctgh} \lambda \eta')} \right].$$

Dobieramy teraz częstość drgań własnych  $\omega$  tak, aby w punkcie  $(\xi, \eta)$  niezależnie od czasu  $t$  ugięcie  $\bar{w}(\xi, \eta, t)$  było równe zeru.

Warunek zerowej wartości ugięcia daje

$$(1.8) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{(\lambda^2 - \varepsilon^2)} \left[ \frac{\operatorname{tgh} \varepsilon \eta}{\varepsilon (1 + \operatorname{tgh} \varepsilon \eta \operatorname{ctgh} \varepsilon \eta')} - \frac{\operatorname{tgh} \lambda \eta}{\lambda (1 + \operatorname{tgh} \lambda \eta \operatorname{ctgh} \lambda \eta')} \right] = 0.$$

W parametrach  $\varepsilon$  i  $\lambda$  ukryta jest wartość  $\omega$  odpowiadająca warunkowi  $\bar{w}(\xi, \eta, t) = 0$ .

Wyznaczone z równania (1.8) kolejne częstotliwości drgań  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  są częstotliwościami drgań własnych płyty podpartej dookoła swobodnie i w sposób punktowy w punkcie  $(\xi, \eta)$ . Niech prosty przykład uzmysłowi skuteczność takiej podpory punktowej.

Obierzmy płytę kwadratową z podporą punktową w środku płyty. Równanie (1.8) przyjmie tu postać

$$(1.9) \quad \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}} \left( \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2 - \sqrt{\beta^2 n^2 + \delta^2}}}{\sqrt{n^2 - \sqrt{\beta^2 n^2 + \delta^2}}} - \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2 + \sqrt{n^2 \beta^2 + \delta^2}}}{\sqrt{n^2 + \sqrt{\beta^2 n^2 + \delta^2}}} \right) = 0,$$

gdzie

$$\beta^2 = \frac{a^2 q}{\pi^2 N}, \quad \delta^2 = \frac{\mu \omega^2 a^4}{\pi^4 N}.$$

Dla kolejnych wartości  $\beta = 1, \beta = 2$  oraz  $\beta = 3$ , a więc przy wzroście siły  $q$ , wyliczono odpowiadające częstotliwości podstawowe drgań  $\omega$

$$\omega = \frac{\delta \pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{N}{\mu}}$$

Tablica 1

$\beta$	0	1,0	2,0	3,0
$\delta$	5,33	5,16	4,48	2,27

i zestawiono je w tablicy 1.

Jest rzeczą widoczną, że wraz ze wzrostem obciążenia ściskającego  $q$  maleje częstota drgań własnych płyty. Zauważmy jeszcze, że związek (1.9) daje częstotliwość dla symetrycznej postaci drgania płyty.

Wykazać można, że przy udziale sił rozciągających częstota drgań własnych wzrasta; otrzymujemy tu  $\delta > 5,33$ .

2. W przypadku gdy częstota drgań własnych zmierza do zera, mamy do czynienia z zagadnieniem *wyboczenia płyty*. Dla  $\omega = 0$  otrzymujemy

$$(2.1) \quad \lambda_n = \sqrt{a_n^2 + a_n k}, \quad \varepsilon_n = \sqrt{a_n^2 - a_n k}, \quad \lambda_n^2 - \varepsilon_n^2 = 2 a_n k.$$

Dla  $q > q_{kr}$  ugięcie płyty w obszarze I przyjmuje postać

$$(2.2) \quad w_l(x, y) = \frac{2P}{Na} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - \varepsilon^2} \left[ \frac{\sinh \varepsilon y}{\varepsilon \cosh \varepsilon \eta (1 + \operatorname{tgh} \varepsilon \eta \operatorname{ctgh} \varepsilon \eta')} - \frac{\sinh \lambda y}{\lambda \cosh \lambda \eta (1 + \operatorname{tgh} \lambda \eta \operatorname{ctgh} \lambda \eta')} \right] \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Dobieramy siłę  $P$  w taki sposób, aby ugięcie w punkcie zaczepienia siły, tj. w punkcie  $(\xi, \eta)$ , było równe zeru. Otrzymamy

$$(2.3) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - \varepsilon^2} \left[ \frac{\operatorname{tgh} \varepsilon \eta}{\varepsilon (1 + \operatorname{tgh} \varepsilon \eta \operatorname{ctgh} \varepsilon \eta')} - \frac{\operatorname{tgh} \lambda \eta}{\lambda (1 + \operatorname{tgh} \lambda \eta \operatorname{ctgh} \lambda \eta')} \right] \sin^2 a_n \xi = 0.$$

W powyższym szeregu jedyną nieznaną wartością jest wielkość  $k$  albo wielkość  $q$ . Najmniejsza wartość  $q$  wyznaczona z równania (2.3) daje najmniejszą wartość siły krytycznej  $q_{kr}$  płyty podpartej dookoła swobodnie i ponadto punktowo w punkcie  $(\xi, \eta)$ .

Zajmijmy się przypadkiem szczególnym, mianowicie założmy, że podpora punktowa znajduje się na prostej  $y = b/2$ . Równanie (2.3) przyjmuje tu szczególnie prostą postać

$$(2.4) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 - n\beta}}{\sqrt{n^2 - n\beta}} - \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 + n\beta}}{\sqrt{n^2 + n\beta}} \right) \sin^2 a_n \xi = 0,$$

gdzie

$$\beta = \frac{a}{\pi} k, \quad q = \frac{N \pi^2 \beta^2}{a^2}.$$

Zbadajmy, jak zmienia się wartość siły krytycznej w zależności od położenia podpory punktowej na prostej  $y = b/2$  dla płyty kwadratowej ( $a = b$ ).

Dla przypadku skrajnego  $\xi = 0$  otrzymamy  $q_{kr} = 4 N \pi^2 / a^2$ . Przesuwając podporę wzdłuż prostej  $y = a/2$  zauważymy, że ze wzrostem  $\xi$  wielkość  $q_{kr}$  wzrasta. W tablicy 2 podano wartość  $\beta^2 = q_{kr} a^2 / N \pi^2$  w zależności od  $\varrho = \xi/a$ . Łatwo określić górną granicę wielkości  $\beta^2$ .

Tablica 2

$\varrho$	0.00	0.0606	0.125	0.250	0.333	0.50
$\beta^2$	4.00	4.8708	5.0535	5.4382	5.76	6.25

Dla  $\varrho = 0,5$  otrzymujemy wyboczenie płyty według dwu półfal w kierunku osi  $x$ , przy czym linia węzłowa pokrywa się z osią  $x = a/2$ . Dla tego przypadku jest

$$q_{kr} = \left[ \frac{N a^3}{\pi^2 n^2} \left( \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 \right]_{n=2} = 6,25 \frac{N \pi^2}{a^2}.$$

Jeżeli jednak skonstruować podporę w ten sposób, aby w przypadku podpory w środku płyty uniemożliwić powstawanie powierzchni ugięcia o dwu półfalach, to otrzymamy z równania (2.4) przy  $\xi = a/2$  oraz  $b = a$

$$(2.5) \quad q_{kr} = 10,272 \frac{N \pi^2}{a^2}.$$

Powyższą wartość otrzymamy dla symetrycznej postaci płyty względem prostych  $y = b/2$  oraz  $x = a/2$ . W punkcie  $(\xi, \eta)$  pochodne  $\partial w / \partial x$  i  $\partial w / \partial y$  są równe zeru.

Tak znaczna wartość siły krytycznej wskazuje na korzyści, jakie dać może punktowa podpora nieprzesuwana wymuszająca symetryczną postać wyboczenia płyty.

Warto rozważyć, jaka będzie skuteczność tego rodzaju podpory punktowej w środku płyty w zależności od stosunku boków płyty. Korzystamy tu z równania (2.4) przy założeniu  $\xi = a/2$ :

$$(2.6) \quad \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 - n\beta}}{\sqrt{n^2 - n\beta}} - \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 + n\beta}}{\sqrt{n^2 + n\beta}} \right) = 0.$$

Tablice 3 i 4 podają zestawienie wyników.

W tablicach tych obliczono trzy wartości sił krytycznych  $q_{kr}$ , i dla  $i = 1, 2, 3$ .

Wartości umieszczone w pierwszym wierszu odnoszą się do postaci symetrycznej wyboczenia płyty opatrzonej dodatkową podporą w środku. Wartości w drugim wierszu ( $\beta_2$ ) odnoszą się do antymetrycznej postaci wyboczenia płyty o węźle wzdłuż prostej  $x = a/2$ . Wreszcie w trzecim wierszu podano wartości ( $\beta_3$ ) odnoszące się do płyty podpartej jedynie na brzegach.

Widzimy, że działanie podpory punktowej jest najskuteczniejsze dla płyty kwadratowej; dla  $\nu \geq 1$  działanie to maleje i dla  $\nu \rightarrow \infty$  albo  $\nu \rightarrow 0$  stopniowo zanika.

W praktyce konstrukcyjnej stosuje się nader często żebra wzmacniające, mające na celu zwiększenie wartości siły krytycznej. Porównajmy działanie takiego żebra wzmacniającego z działaniem podpory punktowej. Załóżmy, że na żebro nie działa siła osiowa oraz że umieszczone ono będzie w sposób symetryczny względem powierzchni środkowej płyty.

Tablica 3  $q_{kr} = \frac{N \pi^2}{b^2} \frac{\beta_i^2}{\nu^3} \quad (i = 1, 2, 3)$

$\nu = a/b$	1,0	1,25	1,5	2,0	3,0	$\infty$
$\beta_1^2/\nu^2$	10,272	7,5383	6,0910	8,3261	5,2144	4,00
$\beta_2^2/\nu^2$	6,25	5,240	4,330	4,00	4,460	4,00
$\beta_3^2/\nu^2$	4,00	4,2025	4,460	4,00	4,00	4,00

Tablica 4  $q_{kr} = \frac{N \pi^2}{a^2} \beta_i^2 \quad (i = 1, 2, 3)$

$1/\nu = b/a$	1,0	1,25	1,50	2,00	3,00	$\infty$
$\beta_1^2$	10,272	9,024	8,2369	5,1302	2,4025	1,00
$\beta_2^2$	6,25	5,382	4,937	4,500	4,230	—
$\beta_3^2$	4,00	2,700	2,090	1,573	1,231	1,00

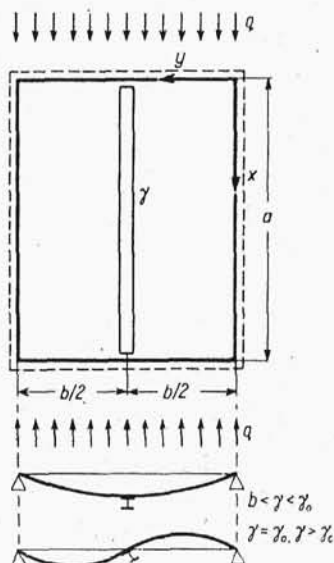
Rozważmy przypadek bardzo prosty odnoszący się do płyty wzmocnionej żebrem wzdłuż osi  $y = \eta$ . Wielkość siły krytycznej wyznacza się tu z równania

$$(2.7) \quad \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 + n\beta}}{\sqrt{n^2 + n\beta}} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n\beta - n^2}}{\sqrt{n\beta - n^2}} = 4 \frac{\beta a^2}{\gamma \pi^2 b n^3},$$

w którym  $\gamma = EI/bN$ , a  $EI$  jest sztywnością na zginanie żebra. Ograniczamy się do przypadku płyty kwadratowej. Dla  $\gamma = 0$ , tj. w przypadku braku żebra, otrzymamy  $q_{kr} = 4N\pi^2/a^2$ . Wraz ze wzrostem  $\gamma$  staje się  $q_{kr} > 4N\pi^2/a^2$ . Dla  $\gamma = 2,794 = \gamma_0$  znajdziemy  $q_{kr} = 6,25N\pi^2/a^2$ . Jest to przypadek, w którym możliwe są dwie postacie wyboczenia belki, symetryczna lub antymetryczna o dwu półfalach



w kierunku osi  $y$ . Wielkość  $\gamma_0$  określa się w teorii wyboczenia płyt jako sztywność wystarczającą (dostateczną) żebra. Dla  $\gamma > \gamma_0$



Rys. 2

nie otrzymamy zwiększenia siły krytycznej. Niezależnie od wielkości  $\gamma$  otrzymamy postać wyboczenia płyty z węzłem pokrywającym się z prostą  $y = b/2$ . Porównanie wyników uzyskanych dla płyty z dodatkową podporą i dla płyty wzmocnionej żebrem wykazują, że działanie podpory punktowej może rywalizować z usztywnieniem żebrem. Punktowa konstrukcja podparcia wymaga ponadto mniejszej ilości materiału niż żebro stężące.

Skuteczność działania podpór punktowych zwiększać się będzie wraz ze wzrostem ich liczby. Rozważmy przypadek dwu podpór punktowych leżących na prostej  $y = \eta$ .

Rozważmy kolejno dwa stany. Niech w punkcie  $(\xi_1, \eta)$  działa na płytę ściskająca siłami  $q$  siła  $P_1$ , a w punkcie  $(\xi_2, \eta)$  siła  $P_2$ . Siły te dobieramy tak, aby ugięcia w punktach  $(\xi_1, \eta)$  i  $(\xi_2, \eta)$  były równe zeru.

Zatem

$$(2.7) \quad \begin{cases} P_1 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin^2 a_n \xi_1 + P_2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin a_n \xi_1 \sin a_n \xi_2 = 0, \\ P_1 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin a_n \xi_1 \sin a_n \xi_2 + P_2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin^2 a_n \xi_2 = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.8) \quad Q_n = \frac{1}{\lambda^2 - \varepsilon^2} \left( \frac{\operatorname{tgh} \varepsilon \eta}{\varepsilon (1 + \operatorname{tgh} \varepsilon \eta \operatorname{ctgh} \varepsilon \eta')} - \frac{\operatorname{tgh} \lambda \eta}{\lambda (1 + \operatorname{tgh} \lambda \eta \operatorname{ctgh} \lambda \eta')} \right).$$

Układ równań (2.7) będzie niesprzeczny, gdy wyznacznik tego układu będzie równy zeru.

Zatem

$$(2.9) \quad \begin{vmatrix} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin^2 a_n \xi_1 & \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin a_n \xi_1 \sin a_n \xi_2 \\ \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin a_n \xi_1 \sin a_n \xi_2 & \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin^2 a_n \xi_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Najmniejszy pierwiastek  $\beta_{min}$  uzyskany z powyższego wyznacznika określa najmniejszą wartość siły krytycznej. Podany sposób wyznaczenia sił krytycznych rozszerzyć można na dowolną ilość podpór punktowych dowolnie rozłożonych w obrębie płyty.

O skutecznym działaniu kilku podpór wnosić można z następujących przykładów:

(a) płyta kwadratowa podparta jest swobodnie na obwodzie a ponadto w jednym punkcie o współrzędnych  $\xi = a/2$  i  $\eta = a/2$ ; siła krytyczna  $q_{kr} = 10,272 \frac{N\pi^2}{a^2}$ ;

(b) płyta kwadratowa podparta jest swobodnie na obwodzie a ponadto w dwu punktach o współrzędnych  $\xi = a/3$  i  $\eta = a/2$  oraz  $\xi = 2/3 a$  i  $\eta = a/2$ .

Tutaj

$$q_{kr} = 14,06 \frac{N\pi^2}{a^2}.$$

Zauważmy, że dla podpory liniowej wzdłuż prostej  $y = a/2$  oraz przy symetrycznej postaci wyboczenia (którą również zakładaliśmy w poprzednich dwu przykładach) siła krytyczna jest równa

$$q_{kr} = 15,38 \frac{N\pi^2}{a^2}.$$

Jak widać, różnica w stosunku do trzech podpór punktowych jest nieznaczna.

Rozważmy jeszcze przypadek podpory sprężystej. Oznaczmy przez  $f$  skrócenie (albo wydłużenie) podpory wywołane stanem  $P = 1$ . Z warunku, aby dla  $q > q_{kr}$  względne przesunięcie płyty i podpory sprężystej w punkcie zaczeplenia siły  $P$  było równe zeru, otrzymamy

$$\frac{2P}{Na} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin^2 \alpha_n \xi + Pf = 0.$$

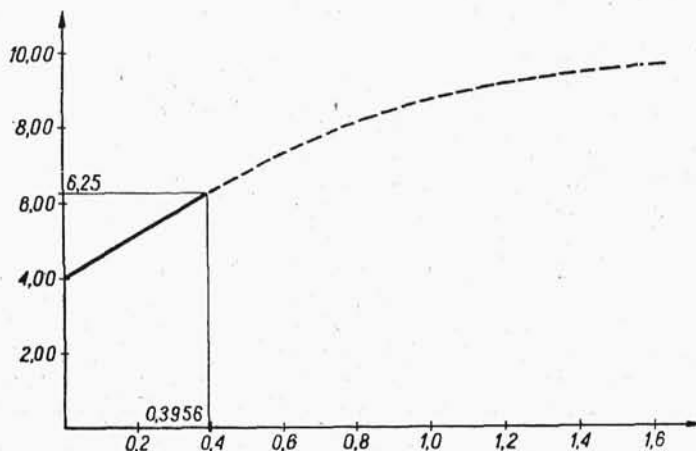
Warunek wyboczenia przyjmie zatem postać

$$(2.10) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin^2 \alpha_n \xi + \frac{fNa}{2} = 0.$$

Będzie rzeczą interesującą ocenić wpływ sztywności podpory sprężystej na wartość siły krytycznej. Omówimy ten wpływ na przykładzie płyty kwadratowej z podporą punktową w środku płyty. W tym przypadku równanie (2.10) przyjmuje postać

$$(2.11) \quad \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2 - n\beta}}{\sqrt{n^2 - n\beta}} - \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2 + n\beta}}{\sqrt{n^2 + n\beta}} \right) + \frac{N\pi^2}{a} f = 0.$$

Badać będziemy  $q_{kr}$  w zależności od parametru  $a/N\pi^2 f$ . W braku podpory sprężystej ( $f = \infty$ ) otrzymujemy  $q_{kr} = 4N\pi^2/a^2$ ; ze sztywnością podpory wzrastać będzie również siła krytyczna. Dla  $a/N\pi^2 f = 0,396$  otrzymujemy  $q_{kr} = 6,25 N\pi^2/a^2$ ; dla tej wartości możliwa jest



Rys. 3

zarówno symetryczna, jak i antymetryczna postać wyboczenia płyty (rys. 4). Jeżeli podporę skonstruujemy tak, aby możliwa była jedynie symetryczna postać wyboczenia, to z dalszym wzrostem sztywności wzrośnie również siła krytyczna i dla  $f = 0$  (podpora niepodatna) otrzymamy  $q_{kr} = 10,272 N\pi^2/a^2$ . Na rysunku 3 przedstawiono przebieg  $q_{kr}$  w zależności od zmiennej  $a/N\pi^2 f$ , a na rys. 4 kolejne postacie wyboczenia płyty.

Trudności rachunkowe wzrosną niewspółmiernie przy większej ilości podpór punktowych sprężystych; metoda rozwiązania jest jednak analogiczna jak dla podpór punktowych niepodatnych.

Dla  $r$  podpór liniowych sprężystych położonych na prostej  $y = \eta$  otrzymamy układ równań liniowych ( $i = 1, 2, \dots, r$ ).

$$(2.12) \quad \sum_{k=1}^{k=r} P_k \left( \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} Q_n(\eta, \beta) \sin \alpha_n \xi_i \sin \alpha_n \xi_k \right) + \frac{N\pi^2}{a^2} f_i = 0.$$

Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu równań daje żądane kryterium wyboczenia płyty.

Przy większej ilości podpór sprężystych o jednakowej charakterystyce, leżących na prostej  $y = \eta$ , można zastąpić działanie sił skupionych liniowym sprężystym ośrodkiem. Zajmijmy się tym zagad-

nieniem w przypadku, gdy liniowa podpora sprężysta umieszczona jest wzdłuż prostej  $\eta = b/2$ , a postać wyboczenia płyty jest symetryczna względem tej prostej.

Powierzchnię ugięcia przyjmujemy w postaci

$$w(x, y) = (A \sinh \lambda \eta + B \sinh \varepsilon \eta) \sin \frac{n\pi x}{a} = Y(\eta) \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Dla  $y = \eta$  powinno być w myśl założenia

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=\eta} = 0.$$

Stąd

$$B = -\frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\cosh \lambda \eta}{\cosh \varepsilon \eta} A.$$

Różnica sił tnących, działających bezpośrednio na lewo i na prawo od przekroju  $y = \eta$  powinna równoważyć się z obciążeniem wywołanym podporą liniową. Stąd

$$T_p - T_l + p = 0$$

albo

$$2N \left[ \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right]_{y=\eta} = p.$$

Zważywszy, że  $p = 1/f_0 [w(x, \eta)]$ , gdzie  $f_0$  jest charakterystyką podpory sprężystej, otrzymamy

$$(2.13) \quad 2N Y'''(\eta) = \frac{1}{f_0} Y(\eta).$$

Ale

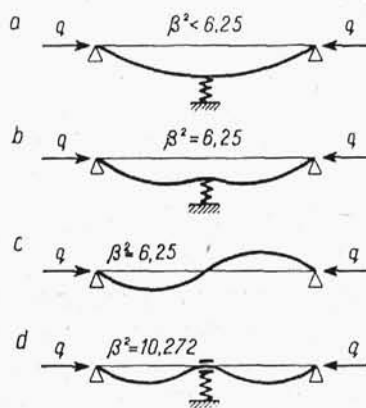
$$Y'''(\eta) = A \lambda \cosh \lambda \eta (\lambda^2 - \varepsilon^2), \quad Y(\eta) = A [\sinh \lambda \eta - \lambda/\varepsilon (\cosh \lambda \eta \tanh \varepsilon \eta)].$$

Z równania (2.13) otrzymujemy zatem ostatecznie warunek wyboczenia

$$(2.14) \quad \frac{\tanh \lambda \eta}{\lambda} - \frac{\tanh \varepsilon \eta}{\varepsilon} = 4Nkaf_0.$$

Dla przypadku szczególnego płyty kwadratowej ( $a = b$ ) otrzymujemy

$$(2.14.1) \quad \frac{\tanh \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2 + n\beta}}{\sqrt{n^2 + n\beta}} - \frac{\tanh \frac{\pi}{2} \sqrt{n\beta - n^2}}{\sqrt{n\beta - n^2}} = \frac{4N\pi^3}{a^3} \beta n f_0.$$



Rys. 4

Mamy tu do czynienia ze wzorem analogicznym do wzoru (2.7). Dla  $f_0 \rightarrow 0$  otrzymujemy podobnie jak w przypadku żebra nieskończone sztywnego identyczny warunek wyboczenia.

Można by jeszcze zagadnienie uogólnić uwzględniając obok liniowej podpory sprężystej również istnienie żebra o sztywności  $EI$ .

Otrzymamy wtedy warunek zrównoważenia sił tnących z obciążeniem  $p$  w postaci

$$2N \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=\eta} = EI \frac{d^4 w(x, \eta)}{dx^4} + \frac{1}{f_0} w(x, \eta)$$

albo

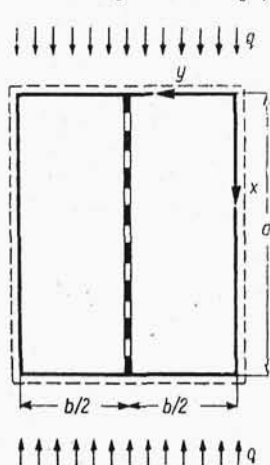
$$(2.15) \quad \frac{\operatorname{tgh} \lambda \eta}{\lambda} - \frac{\operatorname{tg} \bar{\varepsilon} \eta}{\bar{\varepsilon}} = \frac{4Nka}{\frac{1}{f_0} + EI\alpha^4},$$

gdzie

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{n\beta - n^2}, \quad \alpha = \frac{n\pi}{a}.$$

Tak więc w braku żebra otrzymujemy wzór (2.14), w braku sprężystej liniowej podpory wzór (2.7).

Intuicja wskazuje, że jeszcze skuteczniejszym środkiem od podpór

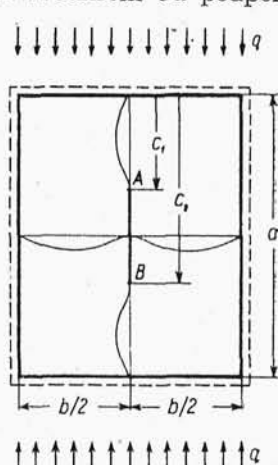


Rys. 5

punktowych są podpory liniowe, wzdłuż których ugięcie płyty będzie równe zero.

Rozpatrzmy przypadek szczególny płyty prostokątnej z liniową podporą o długości  $c_2 - c_1$  według rys. 6.

Ugięcie płyty w punkcie  $(x, b/2)$  wywołane siłą  $P = 1$ , działającą w punkcie  $(\xi, b/2)$  oznaczmy przez  $w(x, \xi; \beta)$ , przy czym



Rys. 6

$$w(x, \xi; \beta) = \frac{2}{Na} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} Q_n(\beta) \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

gdzie  $Q_n(\beta)$  określa wzór (2.8). Dla  $q > q_{kr}$  płyta dozna wygięcia. Wywoła to powstanie reakcji podporowej  $P(\xi)$  wzdłuż odcinka AB. Ugięcie w punkcie  $(x, b/2)$  wyraża wzór całkowy

$$w(x, b/2) = \frac{2}{Na} \int_{c_1}^{c_2} P(\xi) \left( \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\beta) \sin a_n \xi \sin a_n x \right) d\xi.$$

Z warunku  $w(x, b/2) = 0$  na odcinku  $AB$  otrzymamy

$$(2.16) \quad \int_{c_1}^{c_2} P(\xi) \left( \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Q_n(\beta) \sin a_n \xi \sin a_n x \right) d\xi = 0 \quad (c_1 \leq \xi \leq c_2).$$

W równaniu tym mamy nieznaną funkcję  $P(\xi)$  i nieznaną, a poszukiwany parametr  $\beta$ .

Rozwiązanie tego równania całkowego uzyskać można drogą przybliżoną, mianowicie przez zastąpienie całki sumą i sprowadzenie równania całkowego do układu równań liniowych, w których występują nieznanne wielkości  $P_i$  i parametr  $\beta$ .

Przyrównanie wyznacznika tego układu równań do zera daje poszukiwany warunek wyboczenia płyty i pozwala na znalezienie wartości  $\beta_{min}$ .

Jest rzeczą widoczną, że ta droga rozwiązania pokrywa się z wyznaczeniem siły krytycznej dla podpór punktowych rozmieszczonych na odcinku  $AB$ . Im więcej tych podpór weźmiemy pod uwagę, tym wynik będzie dokładniejszy.

Łatwo podać rozwiązanie dla podpory liniowej o długości  $a$ . Zakładając reakcję podporową w postaci szeregu trygonometrycznego

$$P(\xi) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} p_m \sin \frac{m\pi\xi}{a},$$

wstawiając powyższe wyrażenie do równania (2.16) i wykonując całkowanie otrzymamy związek

$$\sin a_n x Q_n(\beta) = 0.$$

Ponieważ związek ten powinien być spełniony dla dowolnego  $x$ , przeto mamy  $Q_n(\beta) = 0$  czyli

$$(2.17) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n\beta - n^2}}{\sqrt{n\beta - n^2}} - \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n\beta + n^2}}{\sqrt{n\beta + n^2}} = 0,$$

zgodnie ze znanym rozwiązaniem H. Reissnera dla płyty utwierdzonej zupełnie wzdłuż prostej  $y = b/2$ , a na pozostałych bokach swobodnie podpartej.

3. Rozpatrzmy z kolei drgania swobodne bez udziału sił  $q$ . Wychodzimy w tym przypadku z równania powierzchni ugięcia płyty wywołanej obciążeniem wymuszającym drgania  $P \sin \omega t$ .

Dla punktów leżących na prostej  $y = \eta$  ugięcie to przyjmie postać

$$(3.1) \quad w(\xi, \eta, t) = \frac{2P \sin \omega t}{Na} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - \varepsilon^2} \left( \frac{\operatorname{tgh} \varepsilon \eta}{\varepsilon (1 + \operatorname{tgh} \varepsilon \eta \operatorname{ctgh} \varepsilon \eta')} - \frac{\operatorname{tgh} \lambda \eta}{\lambda (1 + \operatorname{tgh} \lambda \eta \operatorname{ctgh} \lambda \eta')} \right) \sin^2 a_n \xi,$$

gdzie

$$\lambda = \sqrt{a_n^2 + c}, \quad \varepsilon = \sqrt{a_n^2 - c}, \quad \lambda^2 - \varepsilon^2 = 2c,$$

a

$$c = \omega \sqrt{\frac{\mu}{N}}.$$

Szukajmy teraz takiej wartości  $\omega$ , dla której niezależnie od czasu  $t$  ugięcie w punkcie  $(\xi, \eta)$  będzie równe zero. Częstość taką, odpowiadającą drganiom własnym płyty swobodnie podpartej na obwodzie i ponadto w punkcie  $(\xi, \eta)$ , wyznaczymy ze związku

$$(3.2) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - \varepsilon^2} \left( \frac{\operatorname{tgh} \varepsilon \eta}{\varepsilon (1 + \operatorname{tgh} \varepsilon \eta \operatorname{ctgh} \varepsilon \eta')} - \frac{\operatorname{tgh} \lambda \eta}{\lambda (1 + \operatorname{tgh} \lambda \eta \operatorname{ctgh} \lambda \eta')} \right) \sin^2 a_n \xi = 0.$$

Dla przypadku szczególnego podpory w środku płyty mamy

$$(3.3) \quad \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 - \delta}}{\sqrt{n^2 - \delta}} - \frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 + \delta}}{\sqrt{n^2 + \delta}} \right) = 0,$$

gdzie

$$\delta = \frac{ca^2}{\pi^2}, \quad \omega^2 = \frac{N\pi^4}{\mu a^4} \delta^2.$$

W tablicy 5 podajemy podstawową częstość drgań własnych płyty z dodatkową podporą punktową w środku, w zależności od stosunku boków  $\nu = a/b$ .

Tablica 5

$\nu = a/b$	1,0	1,5	2,0
$\delta$	5,33	7,41	9,23

Punktem wyjścia uzyskanych rozwiązań było działanie siły wymuszającej  $P \sin \omega t$ . Jeśli siła ta działać będzie w środku płyty, to powierzchnia ugięcia wywołana tą siłą będzie symetryczna. Równanie (3.3), z którego

wyznaczyć należy  $\omega_1$  da w konsekwencji jedynie postacie symetryczne drgań własnych. Tak więc wartości  $\omega_1$  umieszczone



w tablicy przedstawiają najniższą częstość drgań własnych płyty, dla której w sposób konstrukcyjny zapewniono istnienie warunków dodatkowych  $\partial w / \partial y = \partial w / \partial x = 0$  w punkcie  $(\xi = a/2, \eta = b/2)$ .

Przy wyprowadzeniu wzorów (3.2) i (3.3) przyjęto, że  $n > \delta$ . Zdarzyć się może, że nie we wszystkich członach szeregów (3.2) i (3.3) założenie powyższe będzie spełnione. Jeśli założenie to nie będzie spełnione, należy zamiast

$$\frac{\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{n^2 - \delta}}{\sqrt{n^2 - \delta}}$$

wstawić

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi b}{2a} \sqrt{\delta - n^2}}{\sqrt{\delta - n^2}}.$$

Interesującą rzeczą będzie ocenienie wpływu podpory punktowej w zależności od jej położenia. Dla przykładu obliczono wartości  $\omega_1$  dla podpór punktowych płyty kwadratowej leżących na prostej  $\eta = b/2$ . Wynik przeliczeń naniesiono na rys. 7. Odnoszą się one do symetrycznej względem prostej  $\eta = b/2$  postaci drgań własnych płyty.

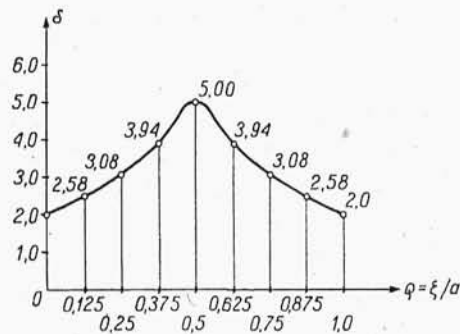
Z powyższych rozważań widać, jak dogodnym środkiem dla podwyższenia częstości drgań własnych płyty może się okazać konstruowanie dodatkowych podpór punktowych.

Środek ten może mieć praktyczne znaczenie w tych przypadkach, w których częstość drgań wymuszających jest bliska częstości drgań własnych płyty podpartej na samych tylko brzegach.

Podaną metodę wyznaczenia częstości drgań własnych można bez trudu rozszerzyć na dowolną liczbę podpór punktowych w obrębie płyty.

Podane w tej pracy rozwiązania dotyczyły jedynie płyty podpartej swobodnie na wszystkich brzegach i ściskanej jednokierunkowo. Nic nie stoi na

przeszkodzie, aby podaną tutaj metodę rozwiązania rozszerzyć na obciążenie dwukierunkowe działające w płaszczyźnie płyty i na inne sposoby utwierdzenia krawędzi płyty.



Rys. 7.



Metoda powyżej przedstawiona prowadzić będzie jednak do celu w tych przypadkach, w których dwa przeciwległe boki płyty są swobodnie podparte, albowiem tylko takie założenie pozwala stosować pojedyncze szeregi trygonometryczne.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Nowacki, *O pewnych szczególnych przypadkach wyboczenia płyt*, Arch. Mech. Stos. 2 (1950).
- [2] S. Woinowsky-Krieger, *Über die Stabilität punktweise ausgesteifter Rechteckplatten*, Ing.-Arch. 1952.
- [3] W. Nowacki, *Jednoczesne zginanie i ściskanie pewnego typu płyt ciągłych*, Arch. Mech. Stos. 1 (1949).
- [4] S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, New York-London 1936.

#### Резюме

#### СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН, СВОБОДНО ОПЕРТЫХ ПО КОНТУРУ И ТОЧЕЧНО В ПРЕДЕЛАХ ПЛАСТИНЫ

Одним из общепринятых мероприятий для увеличения критической силы по отношению к частоте собственных колебаний является подкрепление пластины при помощи ребра. Подобный результат можно получить путём введения в пределах пластины точек или линий опоры — упругих или жестких. Такой прием можно провести в целом ряде конструктивных элементов. Потому, кажется, целесообразным проанализировать эффективность такого приема.

Общий метод решения подобных вопросов, суженный для случая устойчивости, был приведен автором в 1950 году в работе [1]. В 1952 году эту тему разрабатывал С. Войновски-Кригер, который приводит аналогичное решение для случая устойчивости пластины всесторонне сжимаемой, [2].

Предлагаемая работа занимается более общим вопросом, а именно исследованием влияния точечной опоры на частоту собственных колебаний пластины в случае одновременного сжатия. Такая постановка вопроса позволяет в предельных случаях заняться устойчивостью пластины без участия сжимающих сил. Особое внимание обращено на вопросы устойчивости пластины, являющиеся практически более важными.

В п. 1 определяется влияние сжимающих сил на частоту колебаний. Из зависимости (1.8) можно получить частоту

собственных колебаний пластины с жесткой опорой в одной точке  $(\xi, \eta)$ . Оказывается что, по мере роста сжимающей силы, частота колебаний уменьшается и для  $q \rightarrow q_{kp}$  стремится к нулю.

В п. 2 рассматривается вопрос устойчивости пластины. Минимальное значение критической силы для одной точки опоры получаем как наименьший корень суммы (2.4). Прослежено значение критической силы в зависимости от отношения  $\xi/a$ , а для частного случая точки опоры в центре пластины — в зависимости от отношения сторон  $a/b$  (таблицы 1, 2 и 4).

Установлено, что действие точки опоры в центре пластины является наиболее эффективным для квадратной пластины и уменьшается по мере увеличения отношения  $a/b$ .

Наконец рассмотрен случай двух и более точек опоры и случай линии опоры.

В п. 3 рассмотрен вопрос собственных колебаний с дополнительной опорой или добавочными опорами.

Для случая собственных колебаний пластины с одной опорой принципиальное значение имеет зависимость (3.1), из которой определяются последовательные частоты собственных колебаний.

В работе определены частоты собственных колебаний в зависимости от отношения сторон, при положении жесткой точки опоры в центре пластины (таблица 5).

В заключении приведена оценка влияния местоположения точки опоры на частоту собственных колебаний квадратной пластины (фиг. 7).

Приведенный в работе способ решения можно расширить на любые условия на двух противоположных сторонах пластины, полагая, что остальные стороны оперты свободно.

#### S u m m a r y

VIBRATIONS AND BUCKLING OF RECTANGULAR PLATES SIMPLY SUPPORTED ON THE PERIPHERY AND AT SEVERAL POINTS INSIDE

One of the common methods to increase the critical force with respect to the frequency of free vibrations is to provide an additional stiffening in the form of a fin. The same effect can be obtained by means of additional point or linear supports, elastic or rigid, inside the plate. This method can be applied in a number of structural elements. It seems therefore to be useful to discuss the effectiveness of such method.

The general way of solving this type of problems, confined to the buckling however, has been given by the author in 1950, in the paper Ref. [1]. The problem has been investigated again by S. Wołoski - Krieger, who gave an analogical solution in the case of buckling of a plate subjected to compression on the whole periphery of the plate, Ref. [2].

In this paper a more general problem of the influence of a point support on the frequency of free vibration of a plate subjected to compression is investigated. Such way of stating the problem permits to investigate the buckling phenomenon in the absence of compressive forces. Particular attention has been paid to the buckling problem as the more important for the practice.

In Sec. 1 the influence of compression forces on the frequency of free vibration is discussed. The frequencies of free vibrations of the plate with one rigid support at the point  $(\xi, \eta)$  are obtained from the relation (1.8). It is found that the frequency of vibration decreases with increasing compression and it tends to zero for  $q \rightarrow q_{cr}$ .

In Sec. 2 the buckling problem is treated. The minimum critical value for a plate with one additional point support is obtained as the minimum value of the root of the sum (2.4). The value of the critical force is investigated in function of the ratio  $\xi/a$  and for the particular case of one point support at the centre — in function of the ratio of sides  $a/b$  (Tables 1, 2 and 4). It is found that a point support at the centre is most effective for a square plate, its effectiveness decreasing with increasing ratio  $a/b$ .

Finally the cases of two and more point supports and one linear support are investigated.

In Sec. 3 the problem of free vibrations of a plate with one or more additional supports is discussed. In the case of free vibration of a plate with one support the relation (3.1), from which the frequencies of free vibrations are calculated, is of principal importance. The frequencies of free vibrations of the plate are determined in function of the ratio of sides, assuming one rigid point support at the centre (Table 5). Finally the influence of the position of the support on the frequency of free vibrations of a square plate is estimated.

The method described can be generalized for arbitrary conditions at two opposite edges, assuming that the plate is simply supported at the remaining edges.

ZARŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 czerwca 1953 r.