

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

# ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

K O M I T E T   R E D A K C Y J N Y

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER   MICHAŁ BROSZKO

WACŁAW OLSZAK   BOHDAN STEFANOWSKI

STANISŁAW TURSKI   WITOLD WIERZBICKI

JERZY NOWIŃSKI - SEKRETARZ NAUKOWY

T O M   V

C Z E R W I E C   1 9 5 3

Z E S Z Y T   2

W A R S Z A W A

## POWIERZCHNIE WPLYWOWE PŁYT O KONTURZE W POSTACI WYCINKA PIERŚCIEŃ KÓŁOWEGO

W. NOWACKI i J. MOSSAKOWSKI (WARSZAWA)

Praca przedstawiona na zebraniu naukowym Wydziału IV PAN  
w dniu 16 lutego 1953 r.

Zagadnienie zginania płyt o konturze w postaci wycinka pierścienia kołowego było dotychczas, w przeciwieństwie do zagadnień zginania płyt prostokątnych, przedmiotem stosunkowo niewielkiej liczby prac. Spośród nich należy wymienić podstawową dla tego typu płyt pracę A. Nádai [1], w której została podana ogólna metoda rozwiązywania zagadnienia zginania płyt przy użyciu pojedynczych szeregów trygonometrycznych. Rozwiązania Nádai dotyczyły zginania płyty stanowiącej wycinek koła i obciążonej w sposób jednostajny na całym obszarze płyty.

Autorzy niniejszej pracy stawiają sobie za zadanie uzyskanie powierzchni ugięcia płyty oraz wyznaczenie wszelkich wielkości statycznych w przekroju, jak momentów zginających i skręcających oraz sił tnących, dla przypadku obciążenia płyty siłą skupioną. Zadanie to jest identyczne z wyznaczeniem powierzchni wpływowej (funkcji Greena) dla ugięć i wielkości statycznych przekroju. Rozwiązanie tego zadania pozwoli na konstruowanie rozwiązań dla dowolnego obciążenia płyt tego typu.

Wyznaczenie powierzchni wpływowych dla płyt o konturze w postaci wycinka pierścienia kołowego poprzedzi rozwiązanie pomocnicze, mianowicie wyznaczenie powierzchni wpływowych dla nieograniczonego klina płytowego.

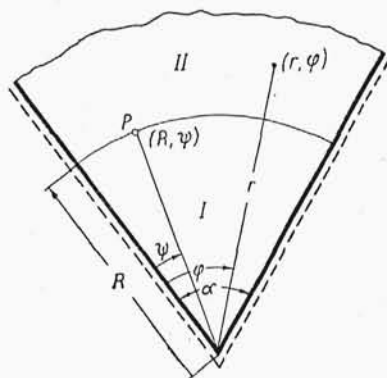
1. Rozważmy klin płytowy nieograniczony o kącie środkowym  $\alpha$ , swobodnie podparty wzdłuż krawędzi  $\varphi = 0$  oraz  $\varphi = \alpha$ .

Obciążenie płyty niech stanowi siła skupiona  $P$  działająca w punkcie  $(R, \psi)$ .

Podzielmy klin nieograniczony przekrojem krzywoliniowym  $R = \text{const.}$  na dwa obszary, obszar I i obszar II.

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty przyjmuje w obszarach I i II następującą postać:

$$(1.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w_j(r, \varphi) = 0 \quad (j = I, II).$$



Rys. 1

Powyższe równanie biharmoniczne zastąpić można układem równań

$$(1.2) \quad \begin{cases} \nabla^2 w_j(r, \varphi) = \Phi_j(r, \varphi), \\ \nabla^2 \Phi_j(r, \varphi) = 0 \end{cases} \quad (j = I, II).$$

Po wyznaczeniu ugięcia  $w_j$  wielkości statyczne w przekroju płyty wyrazimy za pomocą poniższych wzorów:

(1) moment zginający  $M_{r,j}$  o wektorze skierowanym wzdłuż stycznej do łuku o promieniu  $r$

$$(1.3) \quad M_{r,j} = -N \left[ \frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_j}{\partial \varphi^2} \right) \right],$$

(2) moment zginający  $M_{\varphi,j}$  o wektorze skierowanym wzdłuż promienia

$$(1.4) \quad M_{\varphi,j} = -N \left[ \nu \frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_j}{\partial \varphi^2} \right],$$

(3) moment skręcający

$$(1.5) \quad \begin{aligned} M_{r\varphi,j} = M_{\varphi r,j} &= -N(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial \varphi} \right) = \\ &= -N(1-\nu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_j}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_j}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

(4) siły tnące

$$(1.6) \quad T_{r,j} = -N \frac{\partial V^2 w_j}{\partial r}, \quad T_{\varphi,j} = -N \frac{1}{r} \frac{\partial V^2 w_j}{\partial \varphi}.$$

Zauważmy, że suma momentów zginających jest proporcjonalna do funkcji  $\Phi_j$ :

$$(1.7) \quad M_{r,j} + M_{\varphi,j} = -N(1+\nu) V^2 w_j = -N(1+\nu) \Phi_j.$$

W powyższych wzorach  $\nu$  jest liczbą Poissona.

Zajmijmy się równaniem różniczkowym harmonicznym

$$(1.8) \quad V^2 \Phi_j(r, \varphi) = 0.$$

Ponieważ wzdłuż brzegów  $\varphi = 0$  i  $\varphi = a$  znika krzywizna  $\partial^2 w_j / \partial r^2$  oraz moment zginający  $M_{r,j}$ , to wzdłuż tych brzegów znika również funkcja  $\Phi_j$ . Tak więc rozwiązaniem równania różniczkowego (1.8) będzie funkcja

$$(1.9) \quad \Phi_j(r, \varphi) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} F_{n,j}(r) \sin \frac{n\pi\varphi}{a}.$$

Wprowadzając zmienną niemianowaną  $\varrho = r/R$  oraz kładąc dla skrócenia  $k = \pi/a$  możemy przy pomocy związku (1.9) doprowadzić równanie (1.8) do układu równań różniczkowych liniowych zwyczajnych

$$(1.8.1) \quad \frac{d^2 F_{n,j}}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF_{n,j}}{d\varrho} - \frac{n^2 k^2}{\varrho^2} F_{n,j} = 0 \quad (j = I, II; n = 1, 2, \dots)$$

o rozwiązaniu

$$(1.10) \quad F_{n,j} = A_{n,j} \varrho^{nk} + B_{n,j} \varrho^{-nk} \quad (j = I, II).$$

W obszarze I będzie  $B_{n,I} = 0$ , gdyż dla  $\varrho = 0$  otrzymać powinniśmy jedynie skończoną (równą zero) wartość funkcji  $\Phi_I$ .

W obszarze II natomiast powinno być  $A_{n,II} = 0$ , gdyż dla  $\varrho \rightarrow \infty$  funkcja  $\Phi_{II}$  dąży do zera.

W przekroju  $r = R = \text{const.}$  (albo  $\varrho = 1$ ) do dyspozycji stoją dwa warunki brzegowe

$$(1.11.1) \quad M_{r,I}(R, \varphi) + M_{\varphi,I}(R, \varphi) = M_{r,II}(R, \varphi) + M_{\varphi,II}(R, \varphi),$$

$$(1.11.2) \quad T_{r,II}(R, \varphi) - T_{r,I}(R, \varphi) = P.$$

Warunek (1.11.1) możemy wyrazić również w postaci

$$(1.11.3) \quad \Phi_I(R, q) = \Phi_{II}(R, q).$$

Warunek (1.11.1) lub (1.11.3) wyrażają równość momentów zginających obszaru  $I$  i  $II$  w przekroju  $R = \text{const.}$ ; warunek (1.11.2) wyraża zrównoważenie się sił tnących z obciążeniem  $P$  w przekrojach nieskończenie bliskich przekrojowi  $R = \text{const.}$

Warunki te w zmiennych  $\varrho$  i  $q$  przyjmują następującą postać:

$$(1.12.1) \quad \Phi_I(1, q) = \Phi_{II}(1, q),$$

$$(1.12.2) \quad \frac{N}{R} \left( \frac{\partial \Phi_I(1, q)}{\partial \varrho} - \frac{\partial \Phi_{II}(1, q)}{\partial \varrho} \right) = P(q).$$

Rozwijając  $P$  w szereg Fouriera

$$P = \frac{2P}{Ra} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin \frac{n\pi\varphi}{a} \sin \frac{n\pi q}{a}$$

oraz przedstawiając funkcję  $\Phi_j$  za pomocą szeregu (1.9) dochodzimy do nowej postaci warunków brzegowych:

$$F_{n,I}(1) = F_{n,II}(1),$$

$$N \left( \frac{dF_{n,I}(1)}{d\varrho} - \frac{dF_{n,II}(1)}{d\varrho} \right) = \frac{2P}{a} \sin nk\varphi.$$

Wstawiając do powyższych związków  $F_{n,I} = A_{n,I} \varrho^{nk}$  oraz  $F_{n,II} = B_{n,II} \varrho^{-nk}$  otrzymamy

$$(1.13) \quad A_{n,I} = B_{n,II} = \frac{P}{Nn\pi} \sin nk\varphi.$$

Funkcje  $\Phi_j$  przyjmą zatem postać

$$(1.14) \quad \Phi_I = \frac{P}{N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \varrho^{nk} \sin nk\varphi \sin nkq \quad (\varrho \leq 1),$$

$$(1.15) \quad \Phi_{II} = \frac{P}{N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \varrho^{-nk} \sin nk\varphi \sin nkq \quad (\varrho \geq 1).$$

Funkcje te można przedstawić w postaci zamkniętej

$$(1.16.1) \quad \Phi_I = -\frac{P}{4\pi N} \ln \frac{1 - 2\varrho^k \cos k(\varphi - \psi) + \varrho^{2k}}{1 - 2\varrho^k \cos k(\varphi + \psi) + \varrho^{2k}} \quad (\varrho \leq 1),$$

$$(1.16.2) \quad \Phi_{II} = -\frac{P}{4\pi N} \ln \frac{1 - 2\varrho^{-k} \cos k(\varphi - \psi) + \varrho^{-2k}}{1 - 2\varrho^{-k} \cos k(\varphi + \psi) + \varrho^{-2k}} \quad (\varrho \geq 1)$$

lub też jednym wyrażeniem

$$(1.16.3) \quad \Phi_j = -\frac{P}{4\pi N} \ln \frac{\cosh(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi - \psi)}{\cosh(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi + \psi)} \\ (\varrho \geq 1; j = I, II).$$

Dla  $\varrho = 1$ , a więc na granicy obszarów I i II, mamy

$$(1.16.4) \quad \Phi_I = \Phi_{II} = -\frac{P}{2\pi N} \ln \left| \frac{\sin \frac{k}{2}(\varphi - \psi)}{\sin \frac{k}{2}(\varphi + \psi)} \right|.$$

Wzory (1.16.1) - (1.16.4) są identyczne ze wzorami dla ugięcia błony (membrany) w kształcie klina nieograniczonego, obciążonego siłą skupioną  $P$  w punkcie  $(R, \psi)$ . Należy jedynie zamiast sztywności płytowej  $N$  wstawić napięcie błony  $S$ , a zamiast  $\Phi$  ugięcie  $w$ .

Zauważmy, że we wzorze (1.16.4) dla  $\varrho = 1$  i  $\varphi \rightarrow \psi$  funkcja  $\Phi$  staje się nieciągła jak logarytm.

Znając funkcję  $\Phi_j$  przystąpić można do wyznaczenia funkcji  $w_j(r, \varphi)$ , tj. powierzchni ugięcia klina nieograniczonego, z równania różniczkowego

$$(1.17) \quad \nabla^2 w_j(r, \varphi) = \Phi_j(r, \varphi) \quad (j = I, II).$$

Zakładamy rozwiązanie tego równania różniczkowego w postaci

$$(1.18) \quad w_j(\varrho, \psi) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} W_j(\varrho) \sin nk\varphi.$$

Rozwiązanie to spełnia warunki brzegowe

$$(1.19) \quad w_j(\varrho, 0) = w_j(\varrho, a) = 0.$$

Uwzględniając związek (1.18) doprowadzamy równanie różniczkowe (1.17) do układu liniowych, zwyczajnych równań różniczkowych

$$\frac{d^2 W_{n,j}}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dW_{n,j}}{d\varrho} - \left(\frac{nk}{\varrho}\right)^2 W_{n,j} = F_{n,j} \quad (j = I, II)$$

o rozwiązaniu

$$W_{n,I} = \frac{PR^2}{4n\pi N} \frac{\sin nk\varphi}{1+nk} (E_n + \varrho^2) \varrho^{nk} \quad (\varrho \leq 1)$$

oraz

$$W_{n,II} = \frac{PR^2}{4n\pi N} \frac{\sin nk\varphi}{1-nk} (F_n + \varrho^2) \varrho^{-nk} \quad (\varrho \geq 1).$$

W rozwiązaniach tych uwzględniono już warunki wynikające z zerowej wartości ugięcia dla  $\varrho = 0$  oraz dla  $\varrho \rightarrow \infty$ .

Uwzględniając ciągłość płyty w przekroju  $r = R$  ( $\varrho = 1$ ), a więc związki

$$W_{n,I}(1, \varphi) = W_{n,II}(1, \varphi),$$

$$\frac{dW_{n,I}(1, \varphi)}{d\varrho} = \frac{dW_{n,II}(1, \varphi)}{d\varrho}$$

otrzymamy stałe  $E_n$  i  $F_n$ .

Powierzchnia ugięcia płyty przyjmie postać

$$(1.20) \quad w_I(\varrho, \varphi; 1, \psi) = \frac{PR^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin nk\varphi}{n(1+nk)} \left( \frac{1+nk}{1-nk} + \varrho^2 \right) \varrho^{nk} \sin nk\varphi$$

$$(\varrho \leq 1)$$

oraz

$$(1.21) \quad w_{II}(\varrho, \varphi; 1, \psi) = \frac{PR^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin nk\varphi}{n(1-nk)} \left( \frac{1-nk}{1+nk} + \varrho^2 \right) \varrho^{-nk} \sin nk\varphi$$

$$(\varrho \geq 1).$$

Powyższe wzory przedstawiają funkcję Greena, a tym samym powierzchnię wpływową ugięcia nieograniczonego klina płytowego dla siły skupionej  $P$ . Ze wzorów tych wynika, że dla  $nk = 1$  ugięcie wzrasta nieograniczenie. Zajdzie to dla wartości  $\alpha = \pi$  (dla  $n = 1$ ) oraz  $\alpha = 2\pi$  (dla  $n = 2$ ). W pierwszym przypadku mamy do czynienia z półpłaszczyzną płytową na jednym brzegu podpartą, w drugim — z płaszczyzną podpartą półprostą. W obu przypadkach mamy do czynienia z układem kinematycznym, geometrycznie zmiennym. Przypadki te eliminujemy z naszych rozważań.

Znajomość funkcji  $w_j(\varrho, \varphi)$  pozwoli na wyznaczenie wielkości statycznych, jak momentów zginających i skręcających oraz sił tnących. Otrzymamy je ze wzorów (1.3)-(1.7). Wielkości te wyrazić można w sposób prostszy za pomocą funkcji  $\Phi_j$ .

Zauważmy, że pomiędzy pewnymi operacjami różniczkowymi na funkcji  $w_j$  a funkcją  $\Phi_j$  i jej pierwszymi pochodnymi, jak wskazują proste przeliczenia, zachodzą następujące związki:

$$(1.22) \quad \begin{cases} \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w_j}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{1}{2} \Phi_j - \frac{1}{4} (\varrho - \varrho^{-1}) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varrho}, \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \varrho^2} = \frac{1}{2} \Phi_j + \frac{1}{4} (\varrho - \varrho^{-1}) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varrho}, \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \varphi \partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w_j}{\partial \varphi} \right) = (1 - \varrho^{-2}) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

gdzie

$$j = I, II.$$

Korzystając ze związków (1.3) do (1.7) uzyskamy

$$(1.23) \quad \begin{cases} \frac{M_{r,j}}{N} = -\frac{1+\nu}{2} \Phi_j - \frac{1-\nu}{4} (\varrho - \varrho^{-1}) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varrho}, \\ \frac{M_{\varphi,j}}{N} = -\frac{1+\nu}{2} \Phi_j + \frac{1-\nu}{4} (\varrho - \varrho^{-1}) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varrho}, \\ \frac{M_{r\varphi,j}}{N} = -\frac{1-\nu}{4} (1 - \varrho^{-2}) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi}, \\ \frac{T_{r,j}}{N} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}, \quad \frac{T_{\varphi,j}}{N} = -\frac{1}{R} \varrho^{-1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Ponieważ  $\Phi_j$  daje się wyrazić za pomocą wzoru zamkniętego (1.16.3), stwierdzamy, że wszelkie wielkości statyczne wyrazić można przy użyciu wyrażeń algebraicznych nie zawierających szeregów.

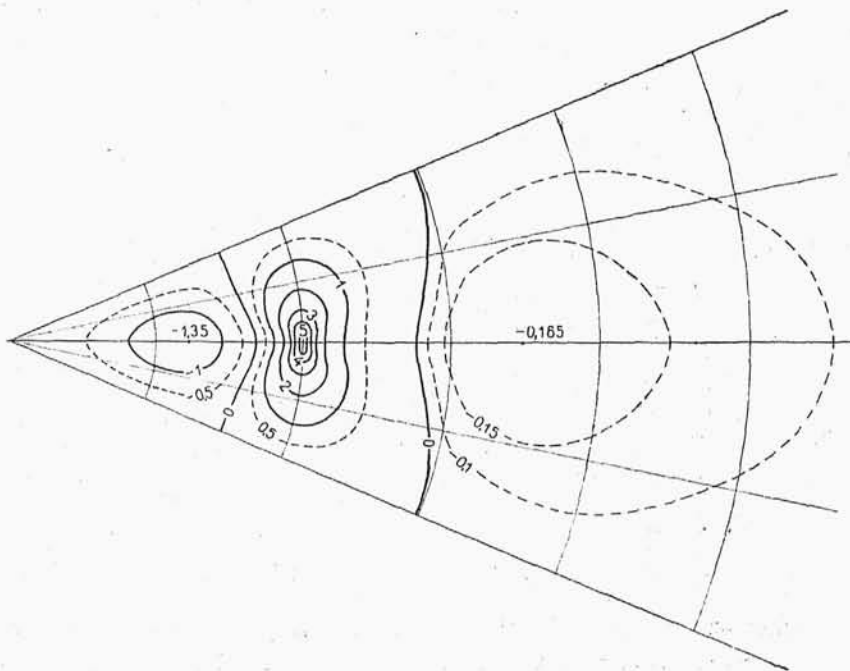
Dla prac rachunkowych, koniecznych przy wyznaczaniu powierzchni wpływowych wielkości statycznych płyty, związki (1.23) stanowią znaczne ułatwienie. Dotyczy to zwłaszcza otoczenia punktu przyłożenia siły skupionej, gdzie w przypadku przyjęcia funkcji  $\Phi_j$  w postaci szeregu [wzory (1.14) i (1.15)] napotkamy na znaczne trudności rachunkowe wywołane wolną zbieżnością szeregów.

Wracając do wzorów (1.23) zauważymy, że dla  $\nu = a/2$ , tj. w przypadku siły skupionej działającej na osi symetrii nieograniczonego klina płytowego, funkcja  $\Phi_j$  będzie funkcją symetryczną względem



tej osi, a pochodna jej  $\partial \Phi_i / \partial \varphi$  jest równa zero. Momenty skracające i siły tnące będą na osi symetrii klina równe zero. Dla przekroju  $\varphi = 1$  mamy  $M_{r,j} = M_{\varphi,j}$  i  $M_{r\varphi} = 0$ .

Zauważymy jeszcze, że wartość funkcji  $\Phi$  oraz  $w$  nie dozna zmiany, jeśli zamienić w nich zmienne  $\varphi$  i  $\psi$ . Wynika to z twierdzenia J. C. Maxwella o wzajemności przesunięć. Można więc traktować powierzchnię ugięcia wywołaną siłą skupioną  $P=1$  w punkcie  $(R, \psi)$  jako powierzchnię wpływową ugięcia punktu  $(R, \varphi)$  dla siły  $P=1$  posuwającej się w obszarze płyty. Identyczne związki są słuszne i dla dowolnych wielkości statycznych.

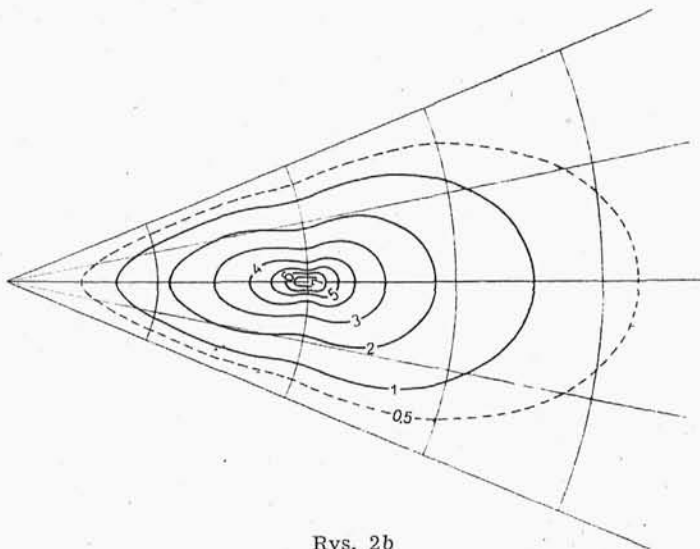


Rys. 2a

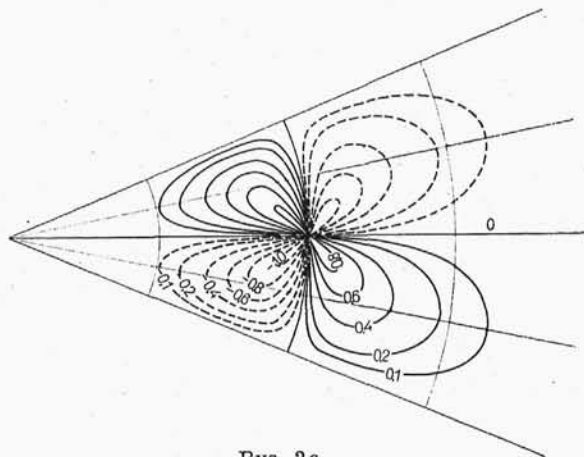
Znajomość powierzchni wpływowej ugięcia lub wielkości statycznej pozwoli na wyznaczenie ugięcia lub tej wielkości statycznej wywołanej dowolnym obciążeniem  $p(R, \varphi)$ . Oznaczając poszukiwaną wartość (ugięcia lub wielkości statycznej) w punkcie  $(r, \varphi)$  przez  $K(r, \varphi)$  a odpowiednią powierzchnię wpływową przez  $k(r, \varphi; R, \psi)$  znajdziemy przy danym obciążeniu  $p(R, \psi)$  rozłożonym na obszarze  $\Omega$

$$(1.24) \quad K(r, \varphi) = \int_{\Omega} p(R, \psi) k(r, \varphi; R, \psi) d\Omega.$$

Na rysunku 2a przedstawiono powierzchnię wpływową  $8\pi M_r$ , na rys. 2b — powierzchnię wpływową  $8\pi M_\varphi$ , na rys. 2c — powierzchnię wpływową  $8\pi M_{r,\varphi}$ , wreszcie na rys. 2d — powierzchnię wpływową  $2\pi RT_\varphi$  w punkcie  $(R, \pi/8)$  dla klina płytowego o kącie środkowym  $\alpha = \pi/4$ .



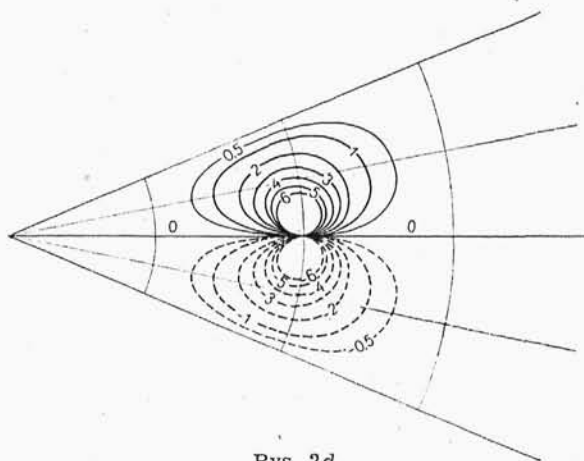
Rys. 2b



Rys. 2c

Rozważmy przypadek szczególny klina płytowego, mianowicie przypadek, w którym kąt środkowy  $\alpha$  dąży do zera, a promień  $R$  do

nieskończoności. W tym granicznym przypadku klin płytowy przekształca się w pasmo płytowe nieskończenie długie o szerokości  $a$ , na brzegach swobodnie podparte (rys. 3a i 3b).

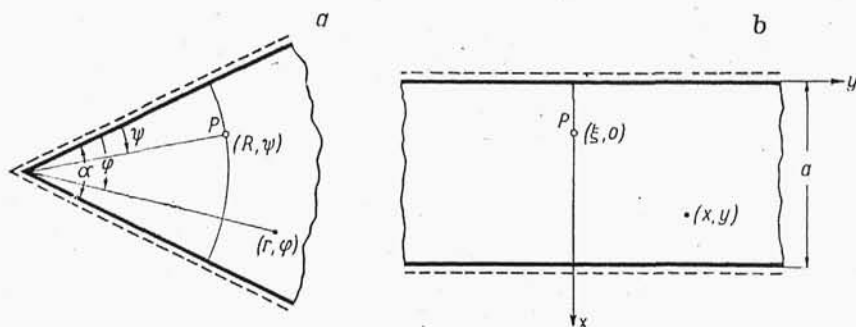


Rys. 2d

Łatwo stwierdzić, że w tym przypadku

$$(\psi R) \rightarrow \xi, \quad (\varphi r) \rightarrow x, \quad (ar) \rightarrow a, \quad (aR) \rightarrow a,$$

$$\cos \frac{\pi}{a} (\varphi \pm \psi) \rightarrow \cos \frac{\pi}{a} (x \pm \xi), \quad \cosh \frac{\pi}{a} \ln \frac{r}{R} \rightarrow \cosh \frac{\pi y}{a}.$$



Rys. 3

Widoczne jest, że według wzoru (1.16) mamy

$$(1.25) \quad \Phi(r, \varphi) \rightarrow \Gamma(x, y) = -\frac{P}{4\pi N} \ln \frac{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)}.$$

Zważywszy dalej, że

$$R(\varrho - \varrho^{-1}) \rightarrow 2y, \quad \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

otrzymamy dla pasma nieskończenie długiego

$$(1.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_y}{N} = -\frac{1+\nu}{2} \Gamma - \frac{1-\nu}{2} y \frac{\partial \Gamma}{\partial y}, \\ \frac{M_x}{N} = -\frac{1+\nu}{2} \Gamma + \frac{1-\nu}{2} y \frac{\partial \Gamma}{\partial y}, \\ \frac{M_{xy}}{N} = -\frac{1-\nu}{2} y \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, \\ \frac{T_{yz}}{N} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial y}, \\ \frac{T_{xz}}{N} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Otrzymaliśmy więc jako przypadek szczególny wielkości statyczne dla pasma nieskończonego, wyrażone jedną funkcją  $\Gamma(x, y)$ . Związki (1.26) są znane; zostały one uzyskane przez A. Nádaia w 1921 r. na innej drodze <sup>1)</sup>.

Wykażemy jeszcze, że dla szczególnych wartości kąta wierzchołkowego klina płytowego podać można również wielkość ugięcia w postaci zamkniętej. Wyjdziemy z osobliwego rozwiązania równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty

$$(1.27) \quad w(r_1) = A r_1^2 \ln \frac{r_1}{a}.$$

Rozwiązanie to jest słuszne dla płyty nieograniczenie rozciąglej obciążonej siłą skupioną  $P$  w początku układu współrzędnych  $r_1, \theta$ .

W wyrażeniu (1.27) wielkości  $A$  i  $a$  są stałe. Pierwszą z nich określimy z warunku równowagi krążka o promieniu  $r_1$  wyciętego dookoła początku układu współrzędnych

<sup>1)</sup> [1], str. 95.

$$(1.28) \quad P - \int_0^{2\pi} T_{rz} r_1 d\theta = 0.$$

Tutaj  $T_{rz}$  jest siłą tnącą jednostajnie rozłożoną na obwodzie krążka:

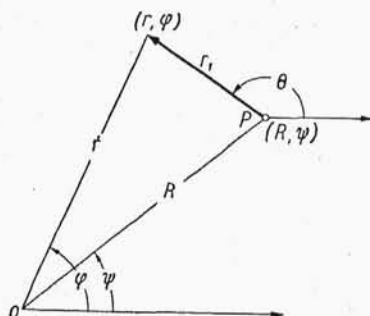
$$T_{rz} = -N \frac{\partial V^2 w}{\partial r_1} = -\frac{4AN}{r_1}.$$

Ze związku (1.28) otrzymamy  $A = -\frac{P}{8N\pi}$ , a ze związku (1.27)

$$(1.29) \quad w(r_1) = -\frac{Pr_1^2}{8N\pi} \ln \frac{r_1}{a}.$$

Stała  $a$  zależy od wyboru płaszczyzny, względem której wyznaczamy ugięcie.

Przyjmijmy nowy układ współrzędnych (rys. 4). Niech w tym układzie siła skupiona  $P$  działa w punkcie  $(R, \psi)$ .



Rys. 4

Zważywszy, że

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi),$$

otrzymamy ugięcie  $w(r, \varphi)$  w nowym układzie współrzędnych w postaci

$$(1.30) \quad w(r, \varphi) = -\frac{Pr_1^2}{16N\pi} \ln \frac{r_1^2}{a^2} = \\ = \frac{P}{16N\pi} [r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi)] \ln \frac{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi)}{a^2}.$$

Stałą  $a$  obierzemy tak, aby dla  $r=0$  ugięcie  $w(0, \varphi)$  było równe zeru. Otrzymamy:  $a^2 = R^2$  oraz

$$(1.31) \quad w(r, \varphi) = -\frac{P}{16 N \pi} [r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi)] \ln \frac{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi)}{R^2}$$

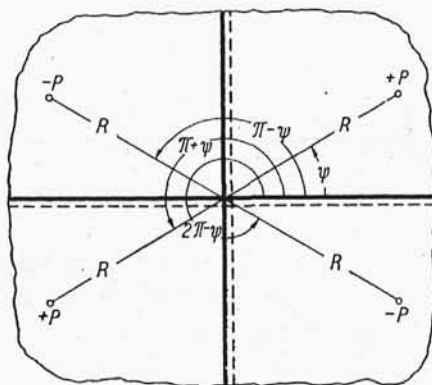
albo

$$(1.32) \quad w(r, \varphi) = -\frac{PR^2 \varrho}{8 N \pi} [\cosh \ln \varrho - \cos(\varphi - \psi)] \ln 2 \varrho [\cosh \ln \varrho - \cos(\varphi - \psi)],$$

gdzie

$$\varrho = \frac{r}{R}.$$

Rozważmy przypadek, w którym na płytę rozciągającą się nieograniczenie działa układ czterech sił skupionych jak na rys. 5. Pod wpływem tego obciążenia powstają dla prostych  $\varphi=0$  oraz  $\varphi=\pi/2$  linie przegięcia płyty, dla których  $w=0$  oraz  $\nabla^2 w=0$ . Płyta dzieli się na cztery kliny płytowe o kącie wierzchołkowym  $\alpha = \pi/2$ :

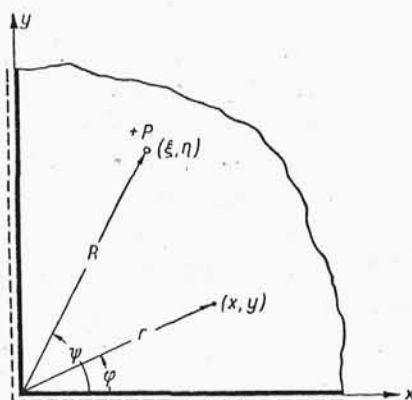


Rys. 5

$$(1.33) \quad w(r, \varphi) = -\frac{PR^2 \varrho}{8 N \pi} \{ [\cosh \ln \varrho - \cos(\varphi - \psi)] \ln [\cosh \ln \varrho - \cos(\varphi - \psi)] + [\cosh \ln \varrho + \cos(\varphi - \psi)] \ln [\cosh \ln \varrho + \cos(\varphi - \psi)] - [\cosh \ln \varrho - \cos(\varphi + \psi)] \ln [\cosh \ln \varrho - \cos(\varphi + \psi)] - [\cosh \ln \varrho + \cos(\varphi + \psi)] \ln [\cosh \ln \varrho + \cos(\varphi + \psi)] \}.$$

Ten sam wynik otrzyma się, jeśli do wzorów (1.20) i (1.21) wstawić  $k=2$  ( $\alpha=\pi/2$ ) i zsumować występujące tam szeregi. Związek (1.33) daje się stosunkowo prosto przedstawić we współrzędnych prostokątnych. Otrzymamy

$$(1.34) \quad w(x, y; \xi, \eta) = \\ = -\frac{P}{16N\pi} \{ [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \ln [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] + \\ + [(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2] \ln [(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2] - \\ - [(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2] \ln [(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2] - \\ - [(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2] \ln [(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2] \}.$$



Rys. 6

Przy podziale kąta  $2\pi$  na  $2s$  równych części, a więc dla klina płytowego o kącie wierzchołkowym  $\alpha=\pi/s$  ( $s=2, 3, \dots$ ) obciążonego w punkcie  $(R, \psi)$  siłą skupioną  $P$ , znajdziemy

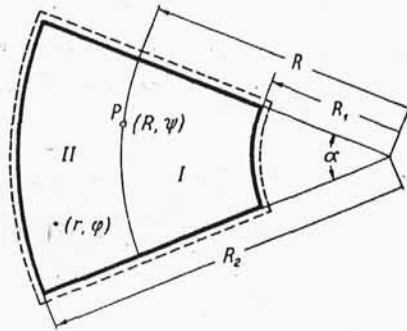
$$(1.35) \quad w(\varrho, \varphi) = \\ = -\frac{PR^2\varrho}{8N\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{i=s} \left[ \cosh \ln \varrho - \cos \left( \varphi - \left( \frac{2\pi i}{s} + \psi \right) \right) \right] \ln 2\varrho \left[ \cosh \ln \varrho - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \left( \varphi - \left( \frac{2\pi i}{s} + \psi \right) \right) \right] - \sum_{i=1}^{i=s} \left[ \cosh \ln \varrho - \cos \left( \varphi - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left( \frac{2\pi i}{s} - \psi \right) \right) \right] \ln 2\varrho \left[ \cosh \ln \varrho - \cos \left( \varphi - \left( \frac{2\pi i}{s} - \psi \right) \right) \right] \right\}.$$

2. Rozwiązania, uzyskane dla nieskończonego klina płytowego, posłużą do skonstruowania funkcji Greena dla płyty o konturze wycinka pierścieniowego. Funkcję Greena przyjmujemy w postaci

$$(2.0.1) \quad w = w_j + w_1 \quad (j = I, II).$$

Tutaj  $w_j$  jest funkcją Greena dla klina nieograniczonego. Funkcja  $w_1$  winna spełniać równanie biharmoniczne

$$\nabla^2 \nabla^2 w_1 = 0$$



Rys. 7

oraz następujące warunki brzegowe:

$$(2.0.2) \quad \begin{cases} (1) \text{ dla } \varphi = 0 & w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} = 0, \\ (2) \text{ dla } \varphi = \alpha & w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} = 0; \end{cases}$$

$$(2.0.3) \quad \begin{cases} (3) \text{ dla } r = R_1 \\ w_1(R_1, \varphi) = -w_I(R_1, \varphi), \quad M_{r,1}(R_1, \varphi) = -M_{r,I}(R_1, \varphi), \\ (4) \text{ dla } r = R_2 \\ w_1(R_2, \varphi) = -w_{II}(R_2, \varphi), \quad M_{r,1}(R_2, \varphi) = -M_{r,II}(R_2, \varphi). \end{cases}$$

Warunki (2.0.2) spełnia funkcja

$$(2.0.4) \quad w_1(\varrho, \varphi) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} W_{n,1}(\varrho) \sin nk\varphi,$$

gdzie  $\varrho = r/R$  oraz  $k = \pi/\alpha$ .



Wstawiając  $w_1$  do równania biharmonicznego  $\nabla^2 \nabla^2 w_1 = 0$  doprowadzimy to ostatnie równanie do układu zwyczajnych równań liniowych

$$\frac{d^2 W_{n,1}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dW_{n,1}}{d\rho} - \left(\frac{nk}{\rho}\right)^2 W_{n,1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

o rozwiązaniu

$$(2.0.5) \quad W_{n,1} = A_n \rho^{nk} + B_n \rho^{nk+2} + C_n \rho^{-nk} + D_n \rho^{-nk+2}.$$

Stałe całkowania  $A_n, \dots, D_n$  wyznaczmy z czterech warunków brzegowych (2.0.3).

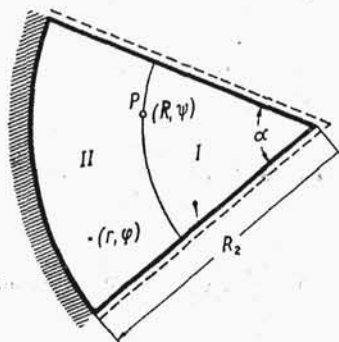
W przypadku zupełnego utwierdzenia brzegu płyty wzdłuż łuków  $r = R_1$  i  $r = R_2$  otrzymamy zamiast warunków brzegowych (2.0.3) następujące warunki:

$$(2.0.6) \quad \begin{cases} w_1(R_1, \varphi) = -w_{II}(R_1, \varphi), & w_1(R_2, \varphi) = -w_{II}(R_2, \varphi), \\ \frac{\partial w_1(R_1, \varphi)}{\partial r} = -\frac{\partial w_{II}(R_1, \varphi)}{\partial r}, & \frac{\partial w_1(R_2, \varphi)}{\partial r} = -\frac{\partial w_{II}(R_2, \varphi)}{\partial r}. \end{cases}$$

Wszelkie wielkości statyczne otrzymamy korzystając z zasady superpozycji

$$K = K_j + K_1,$$

gdzie  $K_j$  jest wielkością statyczną dla klina nieograniczonego według wzorów (1.23), a  $K_1$  wielkością statyczną uzyskaną ze wzorów (1.3)-(1.7), jeśli zamiast  $w_j$  wstawić  $w_1$ . W członie  $K_j$  mieścić się będzie osobliwość;  $K_1$  jest funkcją regularną.



Rys. 8

Dużą trudność rachunkową stanowi wyznaczenie stałych  $A_n, \dots, D_n$  związku (2.0.5). Otrzymamy tu układy czterech niejednorodnych równań liniowych dla kolejnych wartości  $n = 1, 2, \dots$

Trudności te zmniejszą się znacznie w dwu szczególnych przypadkach, które poniżej szczegółowo omówimy.

**2.1.** Niech płyta będzie zupełnie utwierdzona wzdłuż łuku  $r = R_2$  i niech  $R_1 = 0$ . W tym przypadku  $C_n = D_n = 0$ , gdyż dla  $\rho = 0$  powinno być  $W_{n,1} = 0$ . Rozwiązaniem równania  $\nabla^2 \nabla^2 w_1 = 0$  będzie tu funkcja

$$(2.1.1) \quad w_1 = -\frac{PR^2 k}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (A_n \varrho^{nk} + B_n \varrho^{nk+2}) \sin nk\varphi.$$

Warunki brzegowe zadania

$$w_1(\varrho_2, \varphi) = -w_{II}(\varrho_2, \varphi), \quad \frac{\partial w_1(\varrho_2, \varphi)}{\partial \varrho} = -\frac{\partial w_{II}(\varrho_2, \varphi)}{\partial \varrho}$$

prowadzą przy uwzględnieniu wzorów (1.21) i (2.1.1) do układu równań

$$A_n \varrho_2^m + B_n \varrho_2^{m+2} = \frac{1}{m(1-m)} \left( \frac{1-m}{1+m} + \varrho_2^2 \right) \varrho_2^{-m} \sin m\psi,$$

$$\begin{aligned} A_n \varrho_2^{m-1} m + B_n (m+2) \varrho_2^{m+1} &= \\ &= \frac{1}{m(1-m)} \left[ \frac{1-m}{1+m} (-m) + (2-m) \varrho_2^2 \right] \varrho_2^{-m-1} \sin m\psi \end{aligned}$$

gdzie

$$m = nk.$$

Rozwiązując powyższy układ względem  $A_n$  i  $B_n$  i wstawiając te wartości do związku (2.1.1) otrzymamy

$$(2.1.2) \quad w_1(\varrho, \varphi) = -\frac{PR^2 k}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{m} + \varrho_2^2 \frac{1}{1-m} \right) \varrho_2^{-2m} \varrho^m + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{m} \varrho_2^2 - \frac{1}{1+m} \right) \varrho_2^{-2m-2} \varrho^{2+m} \right] \sin m\psi \sin m\varphi.$$

Wprowadzamy funkcję pomocniczą

$$\Psi(\varrho, \varphi) = \frac{P}{N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\varrho}{\varrho_2^2} \right)^{nk} \sin nk\psi \sin nk\varphi$$

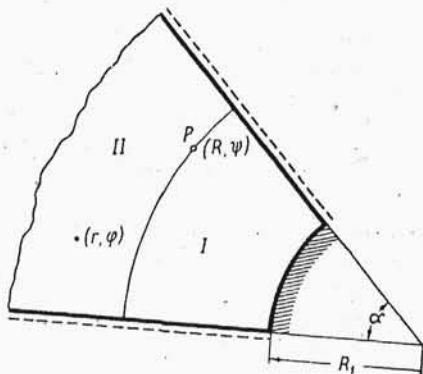
albo w postaci zamkniętej

$$(2.1.3) \quad \Psi(\varrho, \varphi) = -\frac{P}{4N\pi} \ln \frac{\cosh k \ln(\varrho \varrho_2^{-2}) - \cos k(\varphi - \psi)}{\cosh k \ln(\varrho \varrho_2^{-2}) - \cos k(\varphi + \psi)}.$$

Wykazano, że między niżej podanymi pochodnymi funkcji  $w_1$  a funkcją  $\Psi$  i jej pochodnymi zachodzą następujące zależności:

$$(2.1.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho^2} &= -\frac{1}{2} \Psi - \frac{1}{4} \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} (4\varrho - \varrho_2^2 \varrho^{-1} - 3\varrho \varrho_2^{-2}) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varrho^2} (1 - \varrho_2^2 + \varrho^2 - \varrho^2 \varrho_2^{-2}), \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} \right) &= -\frac{1}{2} \Psi - \frac{1}{4} \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} (\varrho_2^2 \varrho^{-1} - \varrho \varrho_2^{-2}) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varrho^2} (1 - \varrho_2^2 + \varrho^2 - \varrho^2 \varrho_2^{-2}), \\ \nabla^2 w_1 &= -\Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} \varrho - \varrho_2^2 \varrho^{-1}, \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) &= -\frac{1}{4} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} (1 - \varrho_2^{-2}) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varrho \partial \varphi} (1 - \varrho_2^{-2}) (\varrho - \varrho_2^2 \varrho^{-1}). \end{aligned} \right.$$

Łatwo teraz za pomocą wzorów (1.3)-(1.7) wyznaczyć w postaci zamkniętej dowolną wielkość statyczną, odpowiadającą powierzchni ugięcia  $w_1$ . Ze związku (2.0.1) staje się widoczne, że wszelkie wielkości statyczne rozpatrywanej płyty według rys. 8 dadzą się wyrazić za pomocą funkcji  $\Phi$  i  $\Psi$  i to w postaci zamkniętej.



Rys. 9

**2.2.** Niech płyta będzie utwierdzona zupełnie wzdłuż łuku  $r = R_1$  i niech  $R_2 = \infty$ .

Ponieważ dla  $\varrho \rightarrow \infty$  powinno  $w_1$  dążyć do zera, zatem podstawimy w równaniu (2.0.5)  $A_n = B_n = 0$ . Funkcję  $w_1$  przyjmiemy w postaci

$$(2.2.1) \quad w_1(\varrho, \varphi) = -\frac{PR^3k}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (C_n \varrho^{-nk} + D_n \varrho^{2-nk}) \sin nk\varphi.$$

Warunki brzegowe rozpatrywanego zadania

$$w_1(\varrho_1, \varphi) = -w_I(\varrho_1, \varphi), \quad \frac{\partial w_1(\varrho_1, \varphi)}{\partial \varrho} = -\frac{\partial w_I(\varrho_1, \varphi)}{\partial \varrho}$$

prowadzą przy uwzględnieniu związków (1.20) i (2.2.1) do układu równań

$$\begin{aligned} C_n \varrho_1^{-m} + D_n \varrho_1^{-m+2} &= \frac{1}{m(1+m)} \left[ \frac{1+m}{1-m} + \varrho_1^2 \right] \varrho_1^m \sin m\varphi, \\ -mC_n \varrho_1^{-m-1} + (2-m)D_n \varrho_1^{1-m} &= \\ &= \frac{1}{m(1+m)} \left[ \frac{m(1+m)}{1-m} + (2+m)\varrho_1^2 \right] \varrho_1^{m-1} \sin m\varphi \\ (m=nk, \quad n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ względem  $C_n$  oraz  $D_n$  i wstawiając te wartości do wyrażenia (2.2.1) otrzymamy

$$(2.2.2) \quad w_1(\varrho, \varphi) = -\frac{PR^3k}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{m} - \varrho_1^2 \frac{1}{1+m} \right) \varrho_1^{2m} \varrho^{-m} + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{m} \varrho_1^2 + \frac{1}{1-m} \right) \varrho_1^{2m-2} \varrho^{2-m} \right] \sin m\varphi \sin nk\varphi.$$

Wprowadzamy funkcję pomocniczą

$$\Theta(\varrho, \varphi) = \frac{P}{N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (\varrho \varrho_1^{-2})^{-nk} \sin nk\varphi \sin nk\varphi$$

lub w postaci zamkniętej

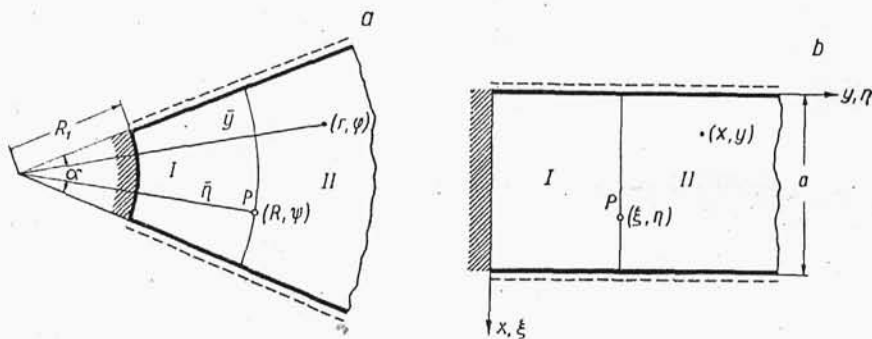
$$(2.2.3) \quad \Theta(\varrho, \varphi) = -\frac{P}{4N\pi} \ln \frac{\cosh k \ln(\varrho \varrho_1^{-2}) - \cos k(\varphi - \varphi)}{\cosh k \ln(\varrho \varrho_1^{-2}) - \cos k(\varphi + \varphi)}.$$

Okazuje się, że między operacjami różniczkowymi na funkcji  $w_1$  oraz funkcją  $\Theta$  i jej pochodnymi zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned}
 (2.2.4) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho^2} &= -\frac{1}{2} \Theta - \frac{1}{4} \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} (4\varrho - \varrho_1^2 \varrho^{-1} - 3\varrho \varrho_1^{-2}) - \\
 &\quad - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varrho^2} (1 - \varrho_1^2 + \varrho^2 - \varrho^2 \varrho_1^{-2}), \\
 \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} \right) &= -\frac{1}{2} \Theta - \frac{1}{4} \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} (\varrho_1^2 \varrho^{-1} - \varrho \varrho_1^{-2}) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varrho^2} (1 - \varrho_1^2 + \varrho^2 - \varrho^2 \varrho_1^{-2}), \\
 \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) &= -\frac{1}{4} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} (1 - \varrho_1^{-2}) - \\
 &\quad - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varrho \partial \varphi} (1 - \varrho_1^{-2}) (\varrho - \varrho_1^2 \varrho^{-1}), \\
 \nabla^2 w_1 &= -\Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} (\varrho - \varrho \varrho_1^{-2}).
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Ponieważ  $w = w_j + w_1$  ( $j = I, II$ ), to jest rzeczą widoczną, że wszelkie wielkości statyczne rozpatrywanej płyty dadzą się przedstawić w postaci zamkniętej przy pomocy funkcji  $\Phi$  i  $\Theta$ .

Zajmijmy się przypadkiem szczególnym rozpatrywanego zadania, mianowicie przejściem od klina według rys. 10a do półpasma płyty w : : (rys. 10b).



Rys. 10

Przejścia tego dokonamy przyjmując  $a \rightarrow 0$  i  $R_1 \rightarrow \infty$ . Z rys. 10a widać, że dla  $\alpha \rightarrow 0$  i  $R_1 \rightarrow \infty$  jest

$$(\psi R_1) \rightarrow \xi, \quad (\varphi R) \rightarrow x, \quad (a R_1) \rightarrow a, \quad (a R) \rightarrow a, \quad (a R) \rightarrow a.$$

Zważywszy dalej, że  $r = R_1 + \bar{y}$  oraz  $R = R_1 + \bar{\eta}$  i że przy przejściu do granicy  $\bar{y} \rightarrow y$  i  $\bar{\eta} \rightarrow \eta$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} \cosh \frac{\pi}{a} \ln \varrho \varrho_1^{-2} &= \cosh \frac{\pi}{a} \ln \frac{r}{R} \frac{R^2}{R_1^2} = \\ &= \cosh \frac{\pi}{a} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\bar{y}}{R} \right) + \ln \left( 1 + \frac{\bar{\eta}}{R_1} \right) \right] \rightarrow \cos \frac{\pi}{a} (y + \eta), \\ \cos \frac{\pi}{a} (\varphi - \psi) &\rightarrow \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi). \end{aligned}$$

Tak więc funkcja  $\Theta$  po przejściu do granicy przyjmie postać

$$(2.2.5) \quad \Theta(\varrho, \varphi) \rightarrow \Omega(x, y) = -\frac{P}{4N\pi} \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{a} (y + \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi}{a} (y + \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)}.$$

Dalej znajdziemy, że

$$\begin{aligned} R(\varrho_1^2 \varrho^{-1} - \varrho \varrho_1^{-2}) &\rightarrow -2(y + \eta), & R(4\varrho - \varrho_1^2 \varrho^{-1} - 3\varrho \varrho_1^{-2}) &\rightarrow 2(y - 3\eta), \\ r(1 - \varrho_1^{-2}) &\rightarrow -2\eta, & R^2(1 - \varrho_1^2 + \varrho^2 - \varrho^2 \varrho_1^{-2}) &\rightarrow -4y\eta, \\ R(1 - \varrho^{-2}) &\rightarrow 2(y - \eta), & R^2(1 - \varrho_1^{-2})(\varrho - \varrho_1^2 \varrho^{-1}) &\rightarrow -4y\eta. \end{aligned}$$

Zatem

$$(2.2.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho^2} \right) &\rightarrow \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \left[ \Omega + (y - 3\eta) \frac{\partial \Omega}{\partial y} - 2y\eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right], \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} \right) &\rightarrow \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \Omega - (y + \eta) \frac{\partial \Omega}{\partial y} + 2y\eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right], \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) &\rightarrow \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = y\eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} (y - \eta) \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \nabla^2 w_1(\varrho, \varphi) &\rightarrow \nabla^2 w_1(x, y) = -\Omega + 2\eta \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Dla klina płytowego według rys. 9 mieliśmy

$$w(\varrho, \varphi) = w_j(\varrho, \varphi) + w_1(\varrho, \varphi) \quad (j = I, II).$$

Dla półpasma płytowego według rys. 10b będzie

$$w(x, y) = w_j(x, y) + w_1(x, y).$$

Drugie pochodne powierzchni ugięcia przyjmą tu postać

$$(2.2.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left[ \Gamma(x, y - \eta) - (y - \eta) \frac{\partial \Gamma(x, y - \eta)}{\partial y} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \Omega - (y + \eta) \frac{\partial \Omega}{\partial y} + 2y\eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{1}{2} \left[ \Gamma(x, y - \eta) + (y - \eta) \frac{\partial \Gamma(x, y - \eta)}{\partial y} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \Omega + (y - 3\eta) \frac{\partial \Omega}{\partial y} - 2y\eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} (y - \eta) \left[ \frac{\partial \Gamma(x, y - \eta)}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] + y\eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}; \\ \nabla^2 w(x, y) &= \Gamma(x, y - \eta) - \Omega + 2\eta \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \Gamma(x, y - \eta) &= -\frac{P}{4\pi N} \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{a} (y - \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi}{a} (y - \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)}. \end{aligned} \right.$$

Łatwo już wyznaczyć wielkości statyczne półpasma płytowego ze wzorów

$$(2.2.8) \quad \left\{ \begin{aligned} M_x &= -N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -N (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ T_{xz} &= -N \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x}, \\ T_{yz} &= -N \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Tak więc również w przypadku półpasma płytowego można wyrazić wszelkie wartości statyczne przy pomocy dwóch funkcji w postaci zamkniętej  $I'$  i  $\Omega$ . Wynik ten pozwala na nader dogodnie wyznaczenie powierzchni wpływowych dla tego półpasma płytowego.

3. Zajmijmy się wycinkiem kołowym (rys. 11) obciążonym na krawędzi swobodnej ( $r=R$ ) siłą skupioną działającą w punkcie  $(R, \varphi)$ . Rozwiązanie równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty

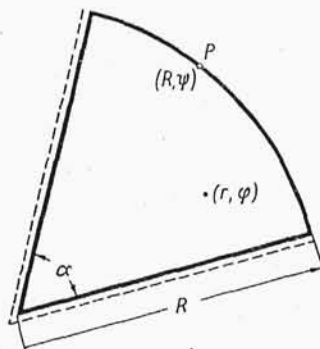
$$\nabla^2 \nabla^2 w(r, \varphi) = 0$$

przyjmujemy w postaci

$$(3.1) \quad w = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (A_n \varrho^{nk+2} + B_n \varrho^{nk}) \sin nk\varphi,$$

gdzie

$$\varrho = \frac{r}{R}.$$



Rys. 11

Jest rzeczą widoczną, że związek (3.1) spełnia równanie różniczkowe oraz warunki brzegowe na brzegach  $\varphi=0$  i  $\varphi=\alpha$ .

Stałe  $A_n$  i  $B_n$  wyznaczymy z dwu dalszych warunków brzegowych

$$(3.2) \quad M_r(R, \varphi) = 0, \quad T_r(R, \varphi) + \frac{\partial M_{r\varphi}(R, \varphi)}{\partial s} = -P,$$

które można wyrazić również w postaci

$$(3.3) \quad \begin{cases} -\frac{N}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \nu \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]_{\varrho=1} = 0, \\ -\frac{N}{R^3} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial \varrho^3} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{2-\nu}{\varrho^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \varrho \partial \varphi^2} - \frac{3-\nu}{\varrho^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right]_{\varrho=1} = \\ = -\frac{2P}{Ra} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin nk\varphi \sin nk\varphi. \end{cases}$$

Z warunków brzegowych uzyskamy

$$(3.4) \quad \begin{cases} A_n = \frac{PR^2}{Na} \frac{1}{3+\nu} \frac{\sin m\varphi}{m(1+m)}, \\ B_n = -\frac{PR^2}{Na} \frac{1}{3+\nu} \frac{(1-\nu)m+2(1+\nu)}{(1-\nu)m^2(m-1)} \sin m\varphi. \end{cases} \quad (m=nk)$$



Powierzchnia ugięcia płyty przyjmie postać

$$(3.5) \quad w(\varrho, \varphi) = \frac{PR^2}{Na(1+3\nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[ \frac{1}{m(1+m)} \varrho^{2+m} - \frac{(1-\nu)m+2(1+\nu)}{(1-\nu)m^2(m-1)} \varrho^m \right] \sin m\psi \sin m\varphi.$$

Dla  $m=1$  ugięcie nie jest określone. Odpowiada to przypadkom  $n=1$  i  $k=1$  (a więc  $\alpha=\pi$ ) oraz  $n=2$  i  $k=\frac{1}{2}$  (a więc  $\alpha=2\pi$ ). Są to przypadki, w których nie są spełnione warunki równowagi.

Wprowadźmy funkcje

$$(3.5.1) \quad \Phi = \frac{P}{Na} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varrho^{nk}}{nk} \sin nk\psi \sin nk\varphi = \\ = -\frac{P}{4N\pi} \ln \frac{\cosh k \ln \varrho - \cos k(\varphi - \psi)}{\cosh k \ln \varrho - \cos k(\varphi + \psi)},$$

$$(3.5.2) \quad A_1 = \frac{2P}{Na} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varrho^{nk}}{nk} \sin nk\psi \cos nk\varphi = \\ = \frac{P}{N\pi} \left[ \arctg \frac{\varrho^k \sin(\varphi + \psi)k}{1 - \varrho^k \cos(\varphi + \psi)k} - \arctg \frac{\varrho^k \sin(\varphi - \psi)k}{1 - \varrho^k \cos(\varphi - \psi)k} \right].$$

Łatwo sprawdzić, że między pochodnymi ugięcia  $w$  oraz funkcjami  $\Phi$  i  $A_1$  zachodzą następujące związki:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} = -\frac{1}{3+\nu} \left[ (\varrho^{-1} - \varrho) \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - 2\Phi \left( 1 - \frac{1+\nu}{1-\nu} \varrho^{-2} \right) \right], \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = -\frac{1}{3+\nu} \left[ (\varrho - \varrho^{-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - 2\Phi \left( 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \varrho^{-2} \right) \right], \\ \nabla^2 w = \frac{4}{3+\nu} \Phi, \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{3+\nu} \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} \varrho^{-2} A_1 + (\varrho^{-2} - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right]. \end{cases}$$

Z powyższych zależności widać, że wszelkie wielkości statyczne płyty dadzą się wyrazić w postaci zamkniętej.

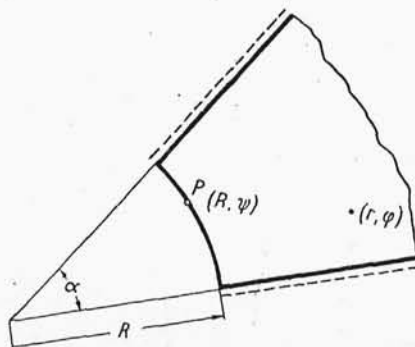
Zajmijmy się teraz płytą według rys. 12, obciążoną siłą skupioną  $P$  na swobodnej krawędzi ( $r=R$ ). Niech siła ta przyłożona będzie w punkcie  $(R, \psi)$ .

Rozwiązanie równania różniczkowego ugięcia płyty

$$\nabla^2 \nabla^2 w(r, \varphi) = 0$$

przyjmiemy w postaci

$$(3.7) \quad w = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (A_n \varrho^{2-nk} + B_n \varrho^{-nk}) \sin nk\varphi \quad \left( \varrho = \frac{r}{R} \right).$$



Rys. 12

Stałe  $A_n$  i  $B_n$  wyznaczmy z następujących warunków brzegowych na łuku  $r=R$  ( $\varrho=1$ ):

$$M_r(R, \varphi) = 0, \quad T_r(R, \varphi) + \frac{\partial M_{r\varphi}(R, \varphi)}{\partial s} = P.$$

Znajdziemy

$$A_n = -\frac{PR^2}{Na} \frac{1}{3+\nu} \frac{1}{m(m-1)} \sin m\psi, \quad (m=nk)$$

$$B_n = \frac{PR^2}{Na} \frac{1}{3+\nu} \frac{(1-\nu)m-2(1+\nu)}{(1-\nu)m^2(1+m)} \sin m\psi.$$

Równanie ugięcia płyty przyjmie postać

$$(3.8) \quad w = \frac{PR^2}{Na} \frac{1}{3+\nu} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[ \frac{(1-\nu)m-2(1+\nu)}{(1-\nu)m^2(1+m)} \varrho^{-m} - \frac{1}{m(m-1)} \varrho^{2-m} \right] \sin m\psi \sin m\varphi.$$

Pochodne funkcji  $w$  występujące w równaniach (3.6) dadzą się i tu wyrazić wzorami analogicznymi do wzorów (3.6); należy jedynie

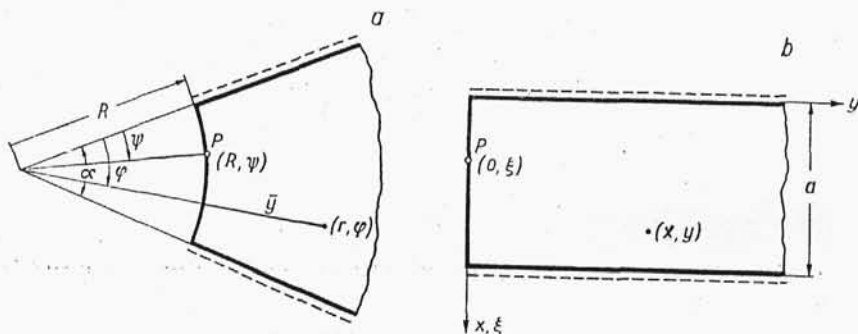
zamiast funkcji  $A_1$  wstawić funkcję  $-A_2$ , gdzie

$$(3.9) \quad A_2 = \frac{2P}{Na} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varrho^{-nk}}{nk} \sin nk\psi \cos nk\varphi =$$

$$= \frac{P}{Na} \left[ \arctg \frac{\sin(\varphi + \psi)k}{\varrho^k - \cos(\varphi + \psi)k} - \arctg \frac{\sin(\varphi - \psi)k}{\varrho^k - \cos(\varphi - \psi)k} \right] \quad (\varrho \geq 1).$$

Tak więc również w rozpatrywanym zadaniu można wyrazić wszystkie wielkości statyczne płyty w postaci wzorów zamkniętych.

Jeżeli założyć, że  $R \rightarrow \infty$  i  $a \rightarrow 0$ , to przechodzimy do półpasma płytowego według (rys. 13b), obciążonego siłą skupioną  $P$  na brzegu swobodnym.



Rys. 13

Postępując analogicznie jak w przypadku półpasma zupełnie utwierdzonego wzdłuż prostej  $x$ , otrzymamy następujące zależności:

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(r, \varphi) \rightarrow \Gamma(x, y), \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} \rightarrow \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{3+\nu} \left( 2y \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{4\nu}{1-\nu} \Gamma \right), \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \frac{1}{3+\nu} \left( \frac{4}{1-\nu} \Gamma - 2y \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right), \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = \\ = \frac{1}{3+\nu} \left( 2y \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{1+\nu}{1-\nu} A_2(x, y) \right), \\ \nabla^2 w(\varrho, \varphi) \rightarrow \nabla^2 w(x, y) = \frac{4}{3+\nu} \Gamma. \end{array} \right.$$

Tutaj jest

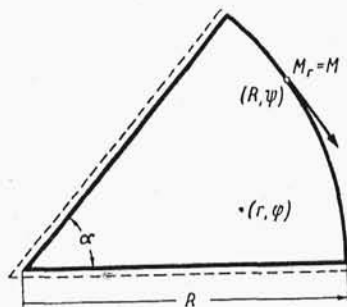
$$(3.11) \quad A_2 = \frac{P}{N\pi} \left[ \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \frac{\pi}{a} (x + \xi)}{e^{-\frac{\pi}{a} y} - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{e^{-\frac{\pi}{a} y} - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)} \right].$$

Zajmijmy się płytą w postaci wycinka kołowego, swobodnie podpartą na bokach  $\varphi = 0$  oraz  $\varphi = a$  i obciążoną momentem  $M_r = 1$  w punkcie  $(R, \psi)$  swobodnego brzegu  $r = R$ .

Rozwiązanie równania różniczkowego ugięcia płyty przyjmijmy w postaci

$$(3.12) \quad w = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (A_n \varrho^{2+nk} + B_n \varrho^{nk}) \sin nk\varphi,$$

gdzie  $\varrho = r/R$ .



Rys. 14

Stałe  $A_n$  i  $B_n$  wyznaczamy z następujących warunków brzegowych na krawędzi  $r = R$  ( $\varrho = 1$ ):

$$M_r(1, \varphi) = -\frac{2M}{Ra} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin nk\varphi \sin nk\varphi,$$

$$T_r(1, \varphi) + \frac{\partial M_{r\varphi}(1, \varphi)}{\partial s} = 0.$$

Z tych warunków brzegowych uzyskamy wartości stałych

$$A_n = \frac{MR}{Na} \frac{1}{(3+\nu)(1+m)} \sin m\psi,$$

$$B_n = \frac{MR}{Na} \frac{4-(1-\nu)m}{(3+\nu)(1-\nu)m(m-1)} \sin m\psi \quad (m=nk)$$

oraz ugięcie

$$(3.13) \quad w(\varrho, \varphi) = \frac{MR}{Na(3+\nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[ \frac{1}{m+1} \varrho^{2+m} + \frac{4-(1-\nu)m}{(1-\nu)m(m-1)} \varrho^m \right] \times \\ \times \sin m\psi \sin m\varphi.$$

Pochodne funkcji  $w(\varrho, \varphi)$  wchodzące w skład wzorów dla momentów zginających i skręcających oraz sił tnących dadzą się również w rozpatrywanym przypadku wyrazić związkami w postaci zamkniętej

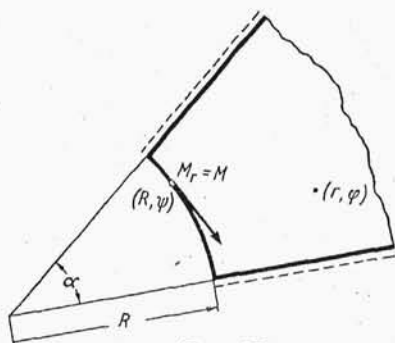
$$(3.14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} &= \frac{1}{(3+\nu)R} \left[ \left( 3\varrho + \frac{3+\nu}{1-\nu} \varrho^{-1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + (\varrho^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} \right], \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) &= \\ &= \frac{1}{(3+\nu)R} \left[ \left( \varrho - \frac{3+\nu}{1-\nu} \varrho^{-1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - (\varrho^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} \right], \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= \frac{1}{(3+\nu)R} \left[ \frac{4\varrho^{-1}}{1-\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + (\varrho - \varrho^{-1}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial \varphi} \right], \\ \nabla^2 w(\varrho, \varphi) &= \frac{4\varrho}{(3+\nu)} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}. \end{aligned} \right.$$

Funkcja  $\Phi(\varrho, \varphi)$  dana jest wzorem (1.16.3), w którym zamiast siły  $P$  należy wstawić moment  $M$ .

Dla płyty jak na rys. 15, obciążonej na swobodnej krawędzi momentem  $M_r = M$ , otrzymamy powierzchnię ugięcia w postaci

$$(3.15) \quad w(\varrho, \varphi) = \frac{MR}{Na} \frac{1}{(3+\nu)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left( \frac{1}{m-1} \varrho^{2-m} - \frac{m(1-\nu)+4}{(1-\nu)m(1+m)} \varrho^{-m} \right) \times \\ \times \sin m\psi \sin m\varphi \quad (m=nk, \quad \varrho=r/R).$$

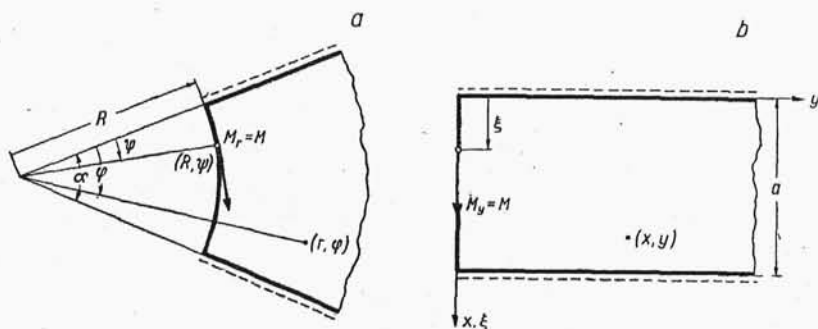
Pochodne funkcji  $w(\varrho, \varphi)$  wchodzące do wzorów na wielkości statyczne przekroju płyty dadzą się wyrazić wzorami (3.14).



Rys. 15

Przy przejściu z wycinka kołowego (rys. 16a) do półpasma płyto-  
wego (rys. 16b) otrzymamy:

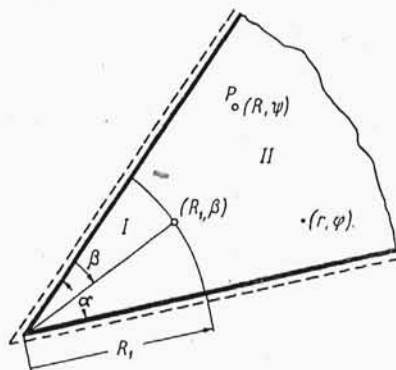
$$(3.16) \quad \begin{cases} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{2}{3+\nu} \left( \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \right), \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2}{3+\nu} \left( -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \right), \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{2}{3+\nu} \left( \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + y \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} \right), \\ \nabla^2 w(\varrho, \varphi) \rightarrow \nabla^2 w(x, y) = \frac{4}{3+\nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}. \end{cases}$$



Rys. 16

Funkcję  $\Gamma(x, y)$  bierzemy ze wzoru (1.25); należy jedynie zamiast  $P$  wstawić  $M$ .

4. Niech będzie dana płyta w postaci klina nieograniczonego, obciążona siłą skupioną  $P$  w punkcie  $(R, \varphi)$ , podparta swobodnie na brzegach  $\varphi=0$  i  $\varphi=\alpha$  i ponadto podparta wzdłuż łuku  $r=R_1$ . Ta podpora krzywoliniowa rozgranicza obszary I i II płyty. Zajmijmy się najpierw przypadkiem, w którym siła skupiona znajduje się w obszarze II ( $R > R_1$ ).



Rys. 17

Wzdłuż łuku  $r=R_1$  powstaje reakcja podporowa  $A$  jako funkcja zmiennej  $\beta$ . Ugięcie płyty traktować można jako superpozycję dwóch stanów: obciążenia klina nieograniczonego siłą skupioną  $P$  oraz obciążenia klina

nieograniczonego obciążeniem  $A(\beta)$  działającym wzdłuż łuku  $r=R_1$ :

$$(4.1) \quad w(r, \varphi) = w_0(r, \varphi) + \int_0^\alpha A(\beta) G(r, \varphi; R_1, \beta) R_1 d\beta.$$

Użyte tutaj oznaczenia przedstawiają:  $w_0$  ugięcie wywołane siłą skupioną  $P$  dla klina płytowego bez dodatkowej podpory, a  $G(r, \varphi; R_1, \beta)$  ugięcie wywołane w punkcie  $(r, \varphi)$  obciążeniem  $A=1$  działającym w punkcie  $(R_1, \beta)$ .

Nieznaną funkcję  $A(\beta)$  otrzymamy z warunku zerowej wartości ugięcia na podporze krzywoliniowej  $r=R_1$ :

$$(4.2) \quad w(R_1, \varphi) = w_0(R_1, \varphi) + \int_0^\alpha A(\beta) G(R_1, \varphi; R_1, \beta) R_1 d\beta = 0.$$

Dla wyznaczenia  $A(\beta)$  otrzymaliśmy równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju. Znajomość  $A(\beta)$  pozwoli już określić na podstawie wzoru (4.1) ugięcie w dowolnym punkcie klina płytowego.

Podamy funkcje występujące w równaniu (4.2). Ze wzoru (1.21) mamy

$$(4.3.1) \quad w_0(R_1, \varphi) = \frac{PR^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin nk\varphi}{n(1+nk)} \left[ \frac{1+nk}{1-nk} + \varrho_1^2 \right] \varrho_1^{nk} \sin nk\varphi = \\ = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} a_n \sin nk\varphi \quad (\varrho_1 = R_1/R < 1).$$

Dla stanu  $A=1$  otrzymamy ze wzoru (1.20) lub (1.21)

$$(4.3.2) \quad G(R_1, \varphi; R_1, \beta) = \\ = \frac{R_1^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{2}{n(1+nk)(1-nk)} \sin nk\beta \sin nk\varphi = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} b_n \sin nk\varphi.$$

Rozwiązania równania całkowego (4.2) szukamy w postaci

$$(4.3.3) \quad A(\beta) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} A_n \sin nk\beta.$$

Wstawiając związki (4.3.1)-(4.3.3) do równania (4.2) i wykonując przepisane całkowanie otrzymamy

$$A_n = -\frac{PR^2}{R_1^3 a} [(1+nk) + (1-nk) \varrho_1^2] \varrho_1^{nk} \sin nk\varphi.$$

Zatem funkcję reakcji podporowej  $A(\beta)$  możemy przedstawić w postaci

$$(4.4) \quad A(\beta) = -\frac{P}{R_1 \varrho_1^2 a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} [(1+nk) + (1-nk) \varrho_1^2] \varrho_1^{nk} \sin nk\varphi \sin nk\beta$$

albo po zsumowaniu szeregów

$$(4.5.1) \quad A(\beta) = -\left( \frac{R^2 - R_1^2}{R_1} \frac{\partial^2 K}{\partial R_1^2} + \frac{2R^2}{R_1^2} \frac{\partial K}{\partial R_1} \right),$$

gdzie

$$(4.5.2) \quad K = -\frac{P}{4\pi} \ln \frac{\cosh k \ln R_1/R - \cos k(\beta - \varphi)}{\cosh k \ln R_1/R - \cos k(\beta + \varphi)}.$$

Wstawiając otrzymane rozwiązanie (4.4) dla  $A(\beta)$  do równania (4.1) otrzymamy po wykonaniu całkowania (przy uwzględnieniu ortogonalności funkcji trygonometrycznych) dla  $r \leq R_1$

$$(4.6) \quad w(r, \varphi) = \frac{PR^2}{8N\pi} (R_1^2 - r^2) (R_1^{-2} - R^{-2}) \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varrho^{nk}}{n} \sin nk\varphi \sin nk\varphi$$

lub też w postaci zamkniętej

$$(4.7) \quad w(r, \varphi) = -\frac{PR_1^2}{32N\pi} \left( 1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right) \left( \frac{R^2}{R_1^2} - 1 \right) \ln \frac{\cosh k \ln \varrho - \cos k(\varphi - \varphi)}{\cosh k \ln \varrho - \cos k(\varphi + \varphi)}.$$



Dla  $R_1 \leq r \leq R$  uzyskamy

$$(4.8) \quad w(r, \varphi) = \frac{PR^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{1-nk} + \frac{\varrho^2}{1+nk} \right) \varrho^{nk} - \frac{1}{2} \left( 1 + \varrho^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1+nk}{1-nk} \varrho^2 \varrho_1^{-2} + \frac{1-nk}{1+nk} \varrho_1^2 \right) \varrho_1^{2nk} \varrho^{-nk} \right] \frac{\sin nk\varphi \sin nk\varphi}{nk}.$$

Wreszcie dla  $r \geq R$  znajdziemy

$$(4.9) \quad w(r, \varphi) = \frac{PR^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{1+nk} + \frac{\varrho^2}{1-nk} \right) \varrho^{-nk} - \frac{1}{2} \left( 1 + \varrho^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1+nk}{1-nk} \varrho^2 \varrho_1^{-2} + \frac{1-nk}{1+nk} \varrho_1^2 \right) \varrho_1^{2nk} \varrho^{-nk} \right] \frac{\sin nk\varphi \sin nk\varphi}{nk}.$$

Pochodne funkcji ugięcia, wchodzące do wzorów dla momentów zginających i skręcających oraz dla sił tnących, dadzą się i w tym przypadku wyrazić w postaci zamkniętej.

Proste przeliczenia wskazują, że

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} &= \frac{1}{2} \Phi + \frac{1}{4} (\varrho - \varrho^{-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - \frac{1}{4} \left[ \Theta (1 + \varrho_1^{-2}) + \right. \\ &\quad \left. + (2\varrho - \varrho_1^2 \varrho^{-1} - \varrho \varrho_1^{-2}) \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} \right] - \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varrho^2} (1 + \varrho^2 - \varrho^2 \varrho_1^{-2} - \varrho_1^2), \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) &= \frac{1}{2} \Phi - \frac{1}{4} (\varrho - \varrho^{-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - \frac{1}{4} \left[ (1 + \right. \\ &\quad \left. + \varrho_1^{-2}) \Theta + (\varrho_1^2 \varrho^{-1} - \varrho \varrho_1^{-2}) \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} \right] + \frac{1}{8} (1 + \varrho^2 - \varrho^2 \varrho_1^{-2} - \varrho_1^2) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varrho^2}, \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) &= \frac{1}{4} (1 - \varrho^{-2}) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{8} \left[ (1 - \varrho^{-2} + \varrho_1^{-2} - \right. \\ &\quad \left. - \varrho_1^2 \varrho^{-2}) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + (\varrho + \varrho^{-1} - \varrho \varrho_1^{-2} - \varrho_1^2 \varrho^{-1}) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varrho \partial \varphi} \right], \\ \nabla^2 w(\varrho, \varphi) &= \Phi - \frac{1}{2} \left[ (1 + \varrho_1^{-2}) \Theta + (\varrho - \varrho \varrho_1^{-2}) \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} \right]. \end{aligned} \right.$$

Funkcja  $\Phi$  określona jest wzorem (1.16.3), a funkcja  $\Theta$  wzorem (2.2.3).

Jeżeli siła skupiona  $P$  działa w obszarze  $I$  ( $R < R_1$ ), to ugięcie wyznaczymy również ze wzoru (4.1). Trzeba jednak mieć na uwadze, że funkcje  $w_0(r, \varphi)$  i  $G(r, \varphi; R_1, \beta)$  określone są (z uwagi na położenie siły w obszarze  $I$ ) innymi wzorami.

Reakcję podporową wyznaczamy z równania całkowego (4.8). W równaniu tym jest

$$w_0(R_1, \varphi) = \frac{PR^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+nk} + \frac{R_1^2}{R^2} \frac{1}{1-nk} \right) \left( \frac{R_1}{R} \right)^{-nk} \sin nk\psi \sin nk\varphi,$$

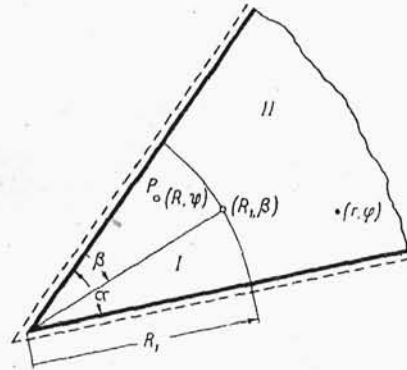
$$G(R_1, \varphi; R_1, \beta) = \frac{R_1^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{2}{n(1-n^2k^2)} \sin nk\psi \sin nk\varphi.$$

Jeżeli założyć rozwiązanie równania całkowego (4.2) w postaci

$$A(\beta) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} A_n \sin nk\beta,$$

to otrzymamy jako rozwiązanie tego równania funkcję

$$(4.11) \quad A(\beta) = -\frac{P}{aR_1\varrho_1^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} [(1-nk) + (1+nk)\varrho_1^2] \varrho_1^{-nk} \sin nk\psi \sin nk\beta$$



Rys. 18

lub w postaci zamkniętej

$$A(\beta) = - \left( \frac{R_1^2 - R^2}{R_1} \frac{\partial^2 K}{\partial R_1^2} - \frac{2R^2}{R_1^2} \frac{\partial K}{\partial R_1} \right).$$

Funkcja  $K(R, \beta; R_1, \psi)$  określona jest wzorem (4.5.2).

Wstawiając otrzymane rozwiązanie (4.11) do równania (4.1) uzyskamy po wykonaniu całkowania następujący wynik:

dla  $r \leq R$

$$(4.12) \quad w(r, \varphi) = \frac{PR^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin nk\psi}{n} \left[ \left( \frac{1}{1-nk} + \frac{\varrho^2}{1+nk} \right) \varrho^{nk} - \frac{1}{2} \left( 1 + \varrho^2 + \frac{1-nk}{1+nk} \varrho^2 \varrho_1^{-2} + \frac{1+nk}{1-nk} \varrho_1^2 \right) (\varrho \varrho_1^{-2})^{nk} \right] \sin nk\varphi,$$

dla  $R \leq r \leq R_1$

$$(4.13) \quad w(r, \varphi) = \frac{PR^2}{4N\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin nk\varphi}{n} \left[ \left( \frac{1}{1+nk} + \frac{\varrho^2}{1-nk} \right) \varrho^{-nk} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( 1 + \varrho^2 + \frac{1-nk}{1+nk} \varrho^2 \varrho_1^{-2} + \frac{1+nk}{1-nk} \varrho_1^2 \right) (\varrho \varrho_1^{-2})^{nk} \right] \sin nk\varphi,$$

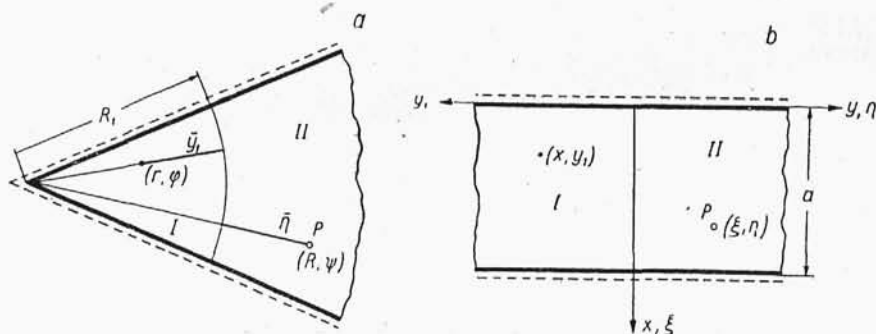
dla  $r \geq R_1$

$$(4.14) \quad w(r, \varphi) = \frac{PR_1^2}{8N\pi} \left( 1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right) \left( \frac{R^2}{R_1^2} - 1 \right) \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varrho^{-nk}}{n} \sin nk\varphi \sin nk\varphi$$

lub też w postaci zamkniętej

$$(4.15) \quad w(r, \varphi) = -\frac{PR_1^2}{32N\pi} \left( 1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right) \left( \frac{R^2}{R_1^2} - 1 \right) \ln \frac{\cosh k \ln \varrho - \cos k(\varphi - \psi)}{\cosh k \ln \varrho - \cos k(\varphi + \psi)}.$$

Pochodne tych funkcji, wchodzące w skład wzorów dla sił tnących oraz momentów zginających i skręcających, dadzą się przedstawić w postaci zamkniętej wzorami (4.10).



Rys. 19

Jeżeli zdążać będziemy z kątem  $\alpha$  do zera a z promieniem  $R_1$  do nieskończoności, to dochodzimy do przypadku pasma nieskończenie długiego podpartego na krawędziach  $x=0$  i  $x=a$  oraz ponadto wzdłuż osi  $x$ . Można wykazać, że w przyjętym układzie współrzędnych otrzymamy przez przekształcenie wzoru (4.7) następującą postać powierzchni ugięcia w obszarze I dla obciążenia w obszarze II:

$$(4.16) \quad w(x, y_1; \eta, \xi) = \frac{P}{8\pi N} y_1 \eta \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{a} (y_1 + \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi}{a} (y_1 + \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)}.$$

Otrzymujemy tu zgodność z wynikiem S. Woinowskyego-Kriegera, [3], uzyskanym przy rozważaniu płyt ciągłych. Dla momentu podporowego  $M_y$  wzdłuż prostej  $x$  otrzymamy po uwzględnieniu wartości granicznej pierwszego wyrażenia grupy (4.10)

$$(4.17) \quad M_y = -N \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \right]_{y_1=0} = -\frac{P\eta}{4a} \sinh \frac{\pi\eta}{a} \left[ \frac{1}{\cosh \frac{\pi\eta}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(x-\xi)} - \frac{1}{\cosh \frac{\pi\eta}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(x+\xi)} \right],$$

również zgodnie z wynikiem otrzymanym przez wymienionego autora.

Podane w niniejszej pracy metody i uzyskane wyniki zastosować można z pewnym przybliżeniem do płyt trójkątnych o dwu równych ramionach (przy  $\alpha < \pi/4$ ) oraz do płyt trapezowych.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] A. Nádaí, *Elastische Platten*, 1925.
- [2] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, 1940.
- [3] S. Woinowsky-Krieger, *Beitrag zur Theorie der durchlaufenden Platten*, Ing. Arch. 1938.
- [4] L. S. Lejbienzon, *Tieorja uprugosti*, 1947.

#### S u m m a r y

#### THE INFLUENCE SURFACES OF PLATES REPRESENTING ANNULAR SECTORS

The problem chosen by the authors is to determine the influence surfaces for the deflection of a plate and for each of the statical quantities involved (bending and torsional moments and shearing forces). The problem is identical with that of finding the corresponding function of Green.

First, as a solution of the basic problem, the function of Green is obtained for an infinite wedge, simply supported at the edges (Fig. 1).

The differential equation of deflection (1.1) is replaced by the system (1.2) of differential equations. The function  $\Phi_j$  is proportional to the sum of bending moments (1.7) and can be represented in a closed

form, (1.14)-(1.16). It can be shown that all the statical quantities relative to the plate and, in consequence, all the corresponding influence surfaces can be represented by means of the function  $\Phi_j$  and its derivatives (1.23).

The solution for an infinite wedge contains as a special case the solution obtained by A. Nádai for an infinite strip (1.25)-(1.26).

Next it is shown that the influence surfaces for the deflection can be equally represented in the form of a closed expression (1.31), provided that  $k$  is an integer.

The solutions for an infinite wedge are used to obtain the function of Green for a plate representing an annular sector (Fig. 7).

The solution for the deflection surface is expressed as the sum (2.0.1) of two functions. Here  $w_j$  denotes the function of Green for an infinite wedge, the function  $w_1$  being introduced to take into account the additional boundary conditions.

The particular cases in which the statical quantities considered can be represented in a closed form (Figs 8, 9, 11, 12, 14 and 15) are discussed in detail. The corresponding influence surfaces for an infinite or semi-infinite strip (Figs 10, 13 and 16) have been found by means of passing to the limits. In this way the solutions found constitute a generalization of the results obtained by different authors for an infinite or semi-infinite strip.

Applying the method developed by W. Nowacki for plates with mixed boundary conditions, the influence surfaces are obtained for the forces in a wedge supported at the edges and having additional curvilinear concentric supports (Figs 17 and 18). Solutions, equally in a closed form, are obtained for the case of one curvilinear support (4.10).

The knowledge of the influence surfaces for the plates discussed permits to determine the deflections and the statical quantities for any load.