

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER MICHAŁ BROSZKO

WACŁAW OLSZAK BOHDAN STEFANOWSKI

STANISŁAW TURSKI WITOLD WIERZBICKI

JERZY NOWIŃSKI - SEKRETARZ NAUKOWY

T O M V

M A R Z E C 1953

Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A

O PEWNYCH PRZYPADKACH SKRĘCANIA PRĘTÓW

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Praca przedstawiona na zebraniu naukowym Wydziału IV PAN
w dniu 6 października 1952 r.

1. Przedmiotem niniejszej pracy jest podanie ścisłych rozwiązań do szeregu zagadnień prętów prostych o przekroju prostokątnym z wąskimi szczelinami oraz o przekroju złożonym z kilku prostokątów. Omawiane też będą pręty o przekroju w postaci wycinka pierścieniowego i koła ze szczelinami.

Założmy, że materiał pręta posiada strukturę anizotropowo-ortogonalną.

Jak wiadomo z teorii skręcania prętów prostych¹⁾, naprężenia tnące τ_{xz} , τ_{yz} (oś z równoległa do pobocznic pręta), które występują w pręcie, wyrażają się za pomocą funkcji skręcania $\psi(x, y)$ spełniającej równanie różniczkowe

$$(1.1) \quad \frac{1}{G_{23}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{G_{13}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\vartheta$$

z warunkiem brzegowym $\psi = \text{const.}$ (w przypadku obszaru jednocspójnego przekroju pręta jest $\psi = 0$). Naprężenia tnące wyrażają się wzorami

$$(1.2) \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

W równaniu (1.1) oznaczają G_{13} i G_{23} moduły odkształcenia postaciowego w kierunkach y i x struktury ortotropowej, ϑ kąt skręcania. Nieznany kąt skręcania pręta wyznaczamy z równania

$$(1.3) \quad M = 2 \int \int \psi \, dx \, dy = \vartheta C,$$

gdzie M jest momentem skręcania, a C sztywnością skręcania pręta.

¹⁾ Por. [1] i [2].

Ze względu na łatwiejszą interpretację mechaniczną pewnych operacji matematycznych rozważać będziemy zjawiska, dające się przedstawić analogicznym do równania (1.1) równaniem różniczkowym, mianowicie zjawiska wygięcia płaskiej błony (membrany), opartej na płaskim konturze o tej samej postaci co dany przekrój pręta, która jest równomiernie napięta napęciami S_x i S_y , działającymi w dwóch do siebie wzajemnie prostopadłych kierunkach, i poddana stałemu ciśnieniu p .

Powierzchnię ugięcia takiej błony uzyskuje się z rozwiązania równania

$$(1.4) \quad S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + S_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -p$$

przy warunku brzegowym $w=0$ na obwodzie obszaru błony. Z porównania równań różniczkowych (1.1) i (1.4) oraz z analogicznych warunków brzegowych wynika, że można przejść z zagadnienia wygięcia błony do zagadnienia skręcania.

Jeżeli napęcia błony dobierzemy tak, aby

$$(1.4.1) \quad \frac{S_x}{S_y} = \frac{G_{13}}{G_{23}} = \lambda^2,$$

to funkcję $\psi(x, y)$ możemy traktować jako funkcję ugięcia błony przy stałym obciążeniu $2 G_{13} S_y \vartheta$.

Mamy zatem następujący związek:

$$(1.5) \quad \psi = c w,$$

gdzie

$$c = \frac{2 G_{13} \vartheta S_y}{p}.$$

Stąd naprężenia tnące

$$(1.5.1) \quad \tau_{zx} = c \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -c \frac{\partial w}{\partial x}.$$

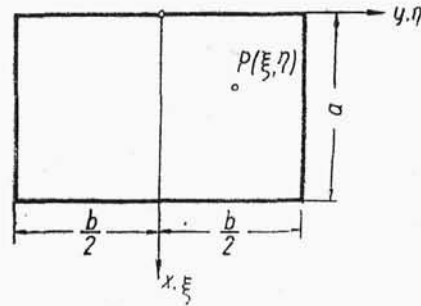
2. Rozpatrzmy błonę równomiernie napiętą na przekroju prostokątnym. Niech na błonę działa siła skupiona P w punkcie (ξ, η) . Skonstruujmy powierzchnię wpływową ugięcia dla dowolnego punktu (x, y) . Oznaczmy ją przez $w_1(x, y; \xi, \eta)$. Będzie ono jednocześnie funkcją Greena dla błony prostokątnej.

Rozwiązanie tego zadania poprzedzimy wyznaczeniem funkcji Greena dla nieskończenie długiego paska blonowego o szerokości a i poddanego działaniu siły skupicznej P , działającej na osi x w odległości ξ od osi y . Oznaczmy tę funkcję Greena przez \bar{w}_1 . Dla $y > 0$ otrzymamy tu dla błony o napięciach S_x i S_y równanie różniczkowe jednorodne

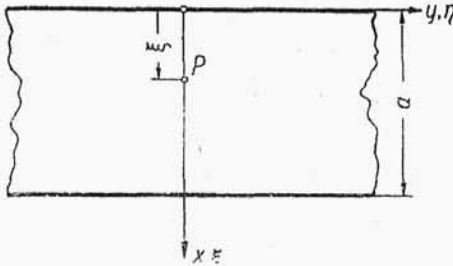
$$(2.1) \quad \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

gdzie $\lambda^2 = \frac{S_x}{S_y}$.

Ponieważ wzdłuż prostych $x=0$ i $x=a$ ugięcie jest równe zeru, możemy rozwiązanie równania przedstawić w postaci



Rys. 1



Rys. 2

$$(2.2) \quad \bar{w}_1 = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} Y_n(y) \sin a_n x$$

$$\left(a_n = \frac{n\pi}{a} \right).$$

W ten sposób doprowadzimy równanie (2.1) do układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$(2.3) \quad \frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \lambda^2 a_n^2 Y_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

o rozwiązaniu

$$(2.4) \quad Y_n(y) = A_n e^{-\lambda a_n y} + B_n e^{\lambda a_n y}.$$

Dla $y > 0$ łatwo stwierdzić, że $B_n = 0$, bowiem dla $y \rightarrow \infty$ ugięcie \bar{w}_1 powinno dążyć do zera.

Stąd

$$(2.4.1) \quad \bar{w}_1 = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} A_n e^{-\lambda a_n y} \sin a_n x.$$

Stałą A_n wyznaczymy z warunku stwierdzającego, że w każdym punkcie osi x składowe pionowe napięcia S_y i siła P tworzą układ pozostający w równowadze.

Stąd

$$(2.5) \quad S_y \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right]_l - S_y \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right]_p = P(x).$$

Wykorzystując symetrię ugięcia błony względem osi x otrzymamy

$$\left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right]_l = - \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x} \right]_p = \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right]_{y=0}$$

Po podstawieniu tego związku do (2.5) otrzymamy

$$(2.6) \quad -2S_y \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right]_{y=0} = P(x).$$

Siłę $P(x)$ rozwijamy w szereg Fouriera

$$(2.7) \quad P(x) = \frac{2P}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Z warunku (2.6) otrzymamy

$$(2.8) \quad A_n = \frac{P}{S_y \lambda n \pi} \sin a_n \xi.$$

Zatem

$$(2.9) \quad \bar{w}_1(x, y; \xi, 0) = \frac{P}{S_y \lambda \pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\lambda a_n y}}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x \quad \text{dla } y > 0$$

oraz

$$(2.10) \quad \bar{w}_1(x, y; \xi, 0) = \frac{P}{S_y \lambda \pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{\lambda a_n y}}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x \quad \text{dla } y < 0.$$

Wzory (2.9) i (2.10) możemy ująć jednym wzorem zamkniętym

$$(2.11) \quad \bar{w}_1(x, y; \xi, 0) = - \frac{P}{4\pi S_y \lambda} \ln \frac{\cosh \frac{\lambda \pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{\cosh \frac{\lambda \pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(x + \xi)}$$

dla $y \geq 0$.

Zauważmy, że dla $x = \xi$ ugięcie staje się nieciągłe jak logarytm.

Wyznamy teraz funkcję Greena błony prostokątnej (rys. 1) o prostopadłych wzajemnie napięciach S_x, S_y . Wycinamy w tym celu z pasma błonowego prostokąt o bokach a i b . Dla $y = \pm b/2$ ugięcie będzie różne od zera. I tak dla $y = +b/2$ otrzymamy

$$(2.12) \quad \bar{w}_1\left(x, \frac{b}{2}, \xi, \eta\right) = \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\lambda a_n \left(\frac{b}{2} - \eta\right)}}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

a dla $y = -b/2$

$$(2.13) \quad \bar{w}_1\left(x, -\frac{b}{2}, \xi, \eta\right) = \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\lambda a_n \left(\frac{b}{2} + \eta\right)}}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

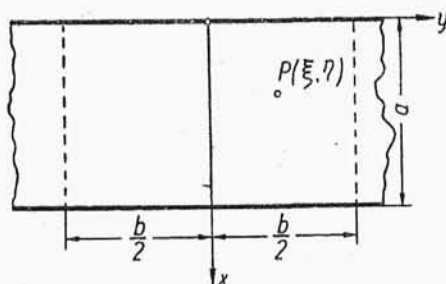
Funkcję Greena $w_1(x, y; \xi, \eta)$ dla prostokąta wyznaczymy jako sumę dwu powierzchni

$$(2.14) \quad w_1(x, y; \xi, \eta) = \bar{w}_1(x, y; \xi, \eta) + w_2(x, y; \xi, \eta),$$

gdzie funkcja $w_2(x, y; \xi, \eta)$ spełnia równanie różniczkowe

$$(2.15) \quad \lambda^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0$$

oraz warunki brzegowe



$$(2.16) \quad \begin{cases} (1) & x=0, & w_2=0, \\ (2) & x=a, & w_2=0, \\ (3) & y=+\frac{b}{2}, & w_2\left(x, \frac{b}{2}; \xi, \eta\right) = -\bar{w}_1\left(x, \frac{b}{2}; \xi, \eta\right), \\ (4) & y=-\frac{b}{2}, & w_2\left(x, -\frac{b}{2}; \xi, \eta\right) = -\bar{w}_1\left(x, -\frac{b}{2}; \xi, \eta\right). \end{cases} \quad \text{Rys. 3}$$

Przyjmijmy rozwiązanie równania w postaci

$$(2.17) \quad w_2 = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (A_n \cosh \lambda a_n y + B_n \sinh \lambda a_n y) \sin a_n x.$$

Warunki brzegowe 1 i 2 są tu spełnione. Dwa dalsze warunki dają nam

$$(2.18) \quad \begin{cases} A_n \cosh \frac{\gamma_n}{2} + B_n \sinh \frac{\gamma_n}{2} = -\frac{P}{\pi S_y \lambda} \frac{e^{-\lambda a_n \left(\frac{b}{2} - \eta\right)}}{n} \sin a_n \xi, \\ A_n \cosh \frac{\gamma_n}{2} - B_n \sinh \frac{\gamma_n}{2} = -\frac{P}{\pi S_y \lambda} \frac{e^{-\lambda a_n \left(\frac{b}{2} + \eta\right)}}{n} \sin a_n \xi, \end{cases}$$

gdzie

$$\gamma_n = \lambda a_n b.$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymamy

$$(2.19) \quad \begin{cases} A_n = -\frac{P e^{-\frac{\gamma_n}{2}}}{\pi S_y \lambda n} \frac{\cosh \lambda a_n \eta}{\cosh \frac{\gamma_n}{2}} \sin a_n \xi, \\ B_n = -\frac{P e^{-\frac{\gamma_n}{2}}}{\pi S_y \lambda n} \frac{\sinh \lambda a_n \eta}{\sinh \frac{\gamma_n}{2}} \sin a_n \xi. \end{cases}$$

Ostatecznie więc funkcja Greena dla prostokąta przyjmie przy $y \geq \eta$ następującą postać:

$$(2.20) \quad w_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^{-\lambda a_n (y-\eta)} - e^{-\frac{\gamma_n}{2}} \left(\frac{\cosh \lambda a_n \eta}{\cosh \frac{\gamma_n}{2}} \cosh \lambda a_n y + \frac{\sinh \lambda a_n \eta}{\sinh \frac{\gamma_n}{2}} \sinh \lambda a_n y \right) \right] \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

a dla $y \leq \eta$

$$(2.21) \quad w_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^{-\lambda a_n (\eta-y)} - e^{-\frac{\gamma_n}{2}} \left(\frac{\cosh \lambda a_n \eta}{\cosh \frac{\gamma_n}{2}} \cosh \lambda a_n y + \frac{\sinh \lambda a_n \eta}{\sinh \frac{\gamma_n}{2}} \sinh \lambda a_n y \right) \right] \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Wzory (2.20) i (2.21) dadzą się ująć jednym wzorem

$$(2.22) \quad w_1(x, y; \xi, \eta) = -\frac{P}{4\pi S_y \lambda} \ln \frac{\cosh \frac{\lambda\pi}{a}(y-\eta) - \cos \frac{\pi}{a}(x-\xi)}{\cosh \frac{\lambda\pi}{a}(y-\eta) - \cos \frac{\pi}{a}(x+\xi)} - \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\cosh \lambda a_n(y+\eta)}{\sinh \gamma_n} - e^{-\gamma_n} \cosh \lambda a_n(y-\eta) \right] \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Pierwszy człon prawej strony wzoru (2.22) odpowiada funkcji Greena dla pasma nieskończenie długiego, drugi wyraża wpływ podparcia błony na prostych $y = \pm b/2$.

Za pomocą funkcji Greena możemy wyznaczyć drogą całkowania ugięcie w dowolnym punkcie (x, y) wywołane obciążeniem $p(\xi, \eta)$:

$$(2.23) \quad w(x, y) = \iint w_1(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na całej błonie prostokątnej otrzymamy

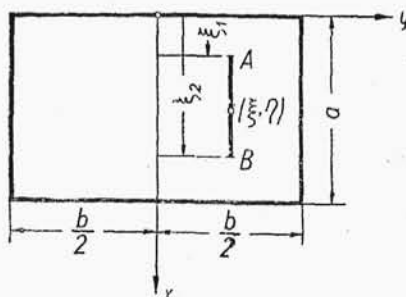
$$(2.24) \quad w_0(x, y) = \frac{4pa^2}{\pi^3 \lambda S_y} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{\cosh \lambda a_n y}{\cosh \frac{\gamma_n}{2}} \right) \sin a_n x.$$

3. Ugięcie błony prostokątnej obciążonej obciążeniem równomiernym p , rozciąganej napięciami S_y i S_x oraz podpartej na odcinku AB wyrazi się wzorem

$$(3.1) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) w_1(x, y; \xi, \eta) d\xi.$$

Niewiadomą reakcję $R(\xi)$ wyznaczymy z warunku $w(x, \eta) = 0$ dla $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$:

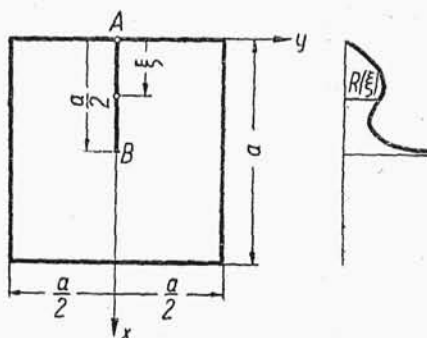
$$(3.2) \quad w_0(x, \eta) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) w_1(x, \eta; \xi, \eta) d\xi = 0.$$



Rys. 4

Po podstawieniu wartości funkcji mamy

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) \left[\ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x + \xi)} + \right. \\
 & \left. + 4 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cosh \lambda a_n 2\eta - e^{-\gamma_n}}{\sinh \gamma_n} \sin a_n \xi \sin a_n x \right] d\xi = \\
 & = \frac{16 p a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{\cosh \lambda a_n \eta}{\cosh \frac{\gamma_n}{2}} \right) \sin a_n x.
 \end{aligned}$$



Rys. 5

Z otrzymanego równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju możemy wyznaczyć $R(\xi)$, a z równania (3.1) ugięcie błony $w(x, y)$.

Rozwiążmy to zadanie dla przypadku $\eta = 0$, dla konturu kwadratowego z podporą o długości $a/2$ (rys. 5) oraz

$$\lambda^2 = \frac{S_x}{S_y} = \frac{G_{13}}{G_{23}}.$$

Dla takiej błony równanie (3.3) przejdzie w równanie

$$\begin{aligned}
 (3.3.1) \quad & \int_0^{a/2} R(\xi) \left[\ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a}(x + \xi)} + 8 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(1 + e^{\gamma_n})} \sin a_n x \sin a_n \xi \right] d\xi = \\
 & = \frac{16 p a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{1}{\cosh \frac{\gamma_n}{2}} \right) \sin a_n x.
 \end{aligned}$$

Równanie całkowe ze względu na bardzo skomplikowane jądro zamieniono na układ równań przybliżając całkę sumą. Na rys. 5 po-

dano w przybliżeniu wykres $R(\xi)$. W punkcie B rozwiązanie przybliżone daje wartość skończoną. Rozwiązanie ścisłe powinno dać w tym punkcie nieskończenie wielką wartość reakcji.

W przypadku gdy długość podpory równa się bokowi a , równanie (3.2) po wstawieniu $w_1(x, y; \xi, \eta)$ ze wzoru (2.20) przyjmie postać

$$(3.4) \quad \int_0^a R(\xi) \left(\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tgh} \frac{\gamma_n}{2} \sin a_n \xi \sin a_n x \right) d\xi = \\ = -\frac{4pa^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{1}{\cosh \frac{\gamma_n}{2}} \right) \sin a_n x.$$

Dla nieparzystych n otrzymamy

$$(3.5) \quad \int_0^a R(\xi) \sin a_n \xi d\xi = -\frac{4pa^2}{\pi^2 n^3} \operatorname{tgh} \frac{\gamma_n}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

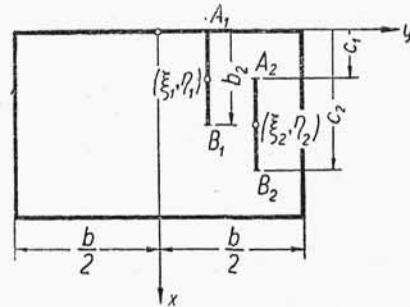
Prawą stronę równania możemy traktować jako współczynniki rozwinięcia funkcji $R(\xi)$ w szeregu Fouriera:

$$(3.6) \quad R(x) = -\frac{8pa}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tgh} \frac{\gamma_n}{4} \sin a_n x.$$

Wynik ten jest zgodny z rozwiązaniami uzyskanymi innymi drogami.

Podany tu sposób postępowania można rozszerzyć na dowolną ilość podpór liniowych równoległych do jednego z boków.

Rozważmy błonę prostokątną z dwiema podporami $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$ (rys. 6). Oznaczmy przez $w_1(x, y; \xi_1, \eta_1)$ powierzchnię ugięcia od siły $R_1 = 1$ działającej w punkcie (ξ_1, η_1) i przez $w_2(x, y; \xi_2, \eta_2)$ powierzchnię ugięcia od siły $R_2 = 1$ działającej w punkcie (ξ_2, η_2) .



Rys. 6

Przy obciążeniu p równanie ugięcia błony tak podpartej wyrazi się wzorem

$$(3.7) \quad w(x, y) = w_0(x, y) +$$

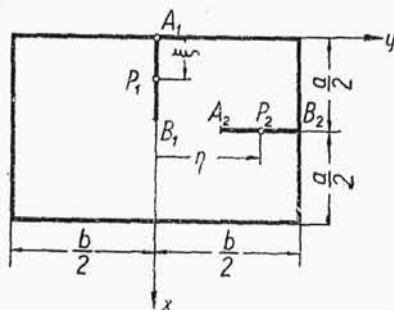
$$+ \int_0^{b_1} R_1(\xi_1) w_1(x, y; \xi_1, \eta_1) d\xi_1 + \int_{c_1}^{c_2} R_2(\xi_2) w_2(x, y; \xi_2, \eta_2) d\xi_2.$$

Nieznane funkcje $R_1(\xi_1)$ i $R_2(\xi_2)$ wyznaczmy z warunków zerowej wartości ugięć na odcinkach $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$.

Prowadzi to do układu równań całkowych

$$(3.8) \quad \begin{cases} w_0(x, \eta_1) + \int_0^{b_1} R_1(\xi_1) w_1(x, \eta_1; \xi_1, \eta_1) d\xi_1 + \\ + \int_{c_1}^{c_2} R_2(\xi_2) w_2(x, \eta_1; \xi_2, \eta_2) d\xi_2 = 0, \\ w_0(x, \eta_2) + \int_0^{b_1} R_1(\xi_1) w_1(x, \eta_2; \xi_1, \eta_1) d\xi_1 + \\ + \int_{c_1}^{c_2} R_2(\xi_2) w_2(x, \eta_2; \xi_2, \eta_2) d\xi_2 = 0, \\ 0 \leq \xi_1 \leq b_1, \quad c_1 \leq \xi_2 \leq c_2. \end{cases}$$

Przy k podporach otrzymamy układ równań całkowych o niewiadomych funkcjach $R_i (i = 1, 2, \dots, k)$.



Rys. 7

Podobnym przypadkiem jest błona przedstawiona na rys. 7.

Tu nieznane będą reakcje na odcinkach $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$, które oznaczmy przez $P_1(\xi)$ i $P_2(\eta)$. Ugięcie wywołane przez siłę $P_1=1$ działającą w punkcie $(\xi, 0)$ oznaczmy przez $w_1(x, y; \xi, 0)$, zaś ugięcie wywołane przez siłę $P_2=1$ działającą w punkcie $(\frac{a}{2}, \eta)$ przez $w_2(x, y; \frac{a}{2}, \eta)$.

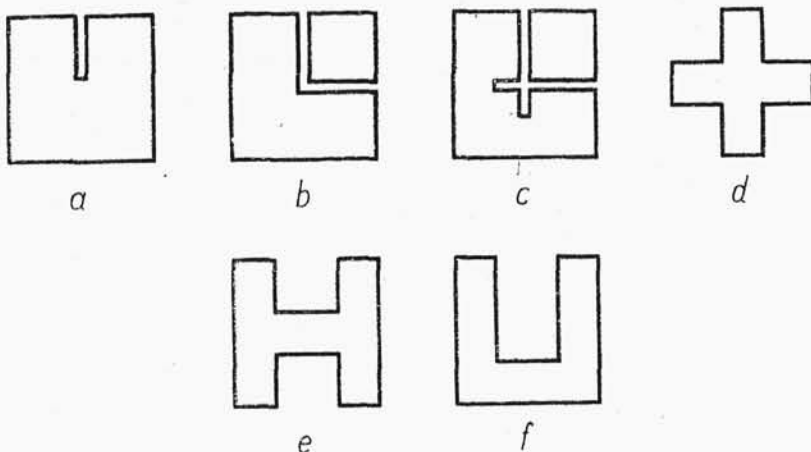
Ugięcie błony według rys. 7 wyrazi się wzorem

$$(3.9) \quad w(x, y) = w_0(x, y) +$$

$$+ \int_{A_1 B_1} P_1(\xi) w_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta) w_2(x, y; \frac{a}{2}, \eta) d\eta.$$

Funkcje $P_1(\xi)$ i $P_2(\eta)$ wyznaczymy, podobnie jak w przykładzie poprzednim, z warunkiem zerowego ugięcia na odcinkach $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$:

$$(3.10) \quad \begin{cases} w_0(x, 0) + \int_{A_1 B_1} P_1(\xi) w_1(x, 0; \xi, 0) d\xi + \\ \quad + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta) w_2\left(x, 0, \frac{a}{2}, \eta\right) d\eta = 0, \\ w_0\left(\frac{a}{2}, y\right) + \int_{A_1 B_1} P_1(\xi) w_1\left(\frac{a}{2}, y; \xi, 0\right) d\xi + \\ \quad + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta) w_2\left(\frac{a}{2}, y, \frac{a}{2}, \eta\right) d\eta = 0. \end{cases}$$

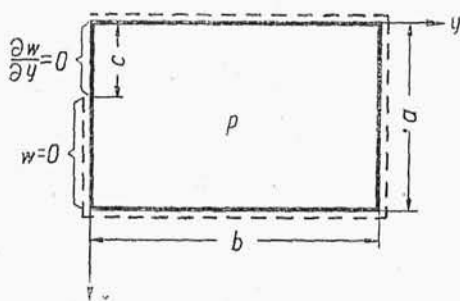


Rys. 8

Podany tu sposób postępowania pozwoli na rozwiązanie kilku technicznie ważnych przypadków ugięcia błony lub skręcania prętów. Na rys. 8 podano przykłady błon, jakie można rozwiązać posługując się wyżej podaną metodą.

4. Rozważmy przypadek błony, która na brzegu $y = 0$ jest w części podparta ($w = 0$), w części swobodna ($\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=0} = 0$) i obciążona obciążeniem jednostajnym p (rys. 9).

W przedziale $0 \leq x \leq c$ ugięcie w jest funkcją x ; w przedziale $c \leq x \leq a$ jest równe zero. Ugięcie błony przy tak przyjętych warunkach brzegowych wyrazi się związkiem



Rys. 9

$$(4.1) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + \int_0^c w(\xi, 0) k(x, y; \xi, 0) d\xi.$$

Tutaj $w_0(x, y)$ oznacza powierzchnię ugięcia błony w układzie podstawowym tj. takim, w którym brzeg $y=0$ jest podparty ($w=0$). Jądro $k(x, y; \xi, 0)$ jest funkcją Greena dla ugięcia jednostkowego w punkcie $(\xi, 0)$.

Nieznaną funkcję ugięcia $w(\xi, 0)$ wyznaczmy z warunku brzegowego $\left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$ w przedziale $0 \leq x \leq c$

$$(4.2) \quad \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + \int_0^c w(\xi, 0) \frac{\partial k(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0.$$

Znając $w(\xi, 0)$ możemy z równania (4.1) wyznaczyć ugięcie błony w dowolnym punkcie (x, y) .

Wyznaczmy funkcję $k(x, y; \xi, 0)$. Spełnia ona równanie

$$(4.3) \quad \lambda^2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(4.4) \quad \begin{cases} (1) \ y=0, \ k(x, 0; \xi, 0) = \frac{2}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x, \\ (2) \ y=a, \ k(x, a; \xi, 0) = 0. \end{cases}$$

Przy tych warunkach brzegowych otrzymamy z rozwiązania równania (4.3)

$$(4.5) \quad k(x, y; \xi, 0) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (A_n \cosh \lambda a_n y + B_n \sinh \lambda a_n y) \sin a_n x,$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{a} \sin a_n \xi,$$

$$B_n = -A_n \operatorname{ctgh} \gamma_n = -\frac{2}{a} \operatorname{ctgh} \gamma_n \sin a_n \xi.$$

Funkcję $k(x, y; \xi, 0)$ można przedstawić w postaci

$$(4.6) \quad k(x, y; \xi, 0) = \frac{2}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} [e^{-\lambda a_n y} + \\ + \sinh \lambda a_n y (1 - \operatorname{ctgh} \gamma_n)] \sin a_n \xi \sin a_n x$$

lub

$$(4.7) \quad k(x, y; \xi, 0) = \\ = -\frac{\sinh \lambda a y}{2a} \left[\frac{1}{\cosh \lambda a y - \cos a(x + \xi)} - \frac{1}{\cosh \lambda a y - \cos a(x - \xi)} \right] - \\ - \frac{2}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n}}{\sinh \gamma_n} \sinh \lambda a_n y \sin a_n \xi \sin a_n x \quad \left(a = \frac{\pi}{a} \right).$$

Stąd

$$(4.8) \quad \frac{\partial k(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = -\frac{\pi \lambda}{2a^2} \left[\frac{1}{1 - \cos a(x + \xi)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{1 - \cos a(x - \xi)} \right] - \frac{2\pi \lambda}{a^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{n e^{-\gamma_n}}{\sinh \gamma_n} \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Pierwszy człon posiada osobliwość dla $x = \xi$, drugi jest regularny i przedstawia szereg zbieżny.

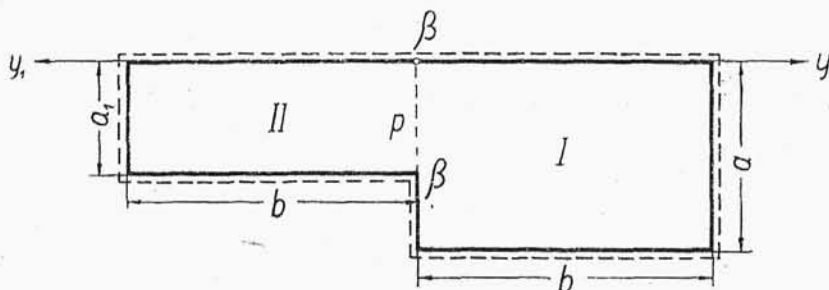
Ugięcie w_0 w układzie podstawowym wyrazić można związkiem

$$(4.9) \quad w_0(x, y) = \frac{4 p a^2}{S_y \lambda \pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 - \cosh \lambda a_n y + \operatorname{tgh} \frac{\gamma_n}{2} \sinh \lambda a_n y \right) \sin a_n x.$$

Równanie (4.2) przyjmie ostatecznie postać

$$(4.10) \quad -\frac{4 p a}{\pi^2 S_y} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tgh} \frac{\gamma_n}{2} \sin a_n x - \\ - \int_0^c w(\xi, 0) \left[\frac{\pi \lambda}{2a^2} \left(\frac{1}{1 - \cos a(x + \xi)} - \frac{1}{1 - \cos a(x - \xi)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\pi \lambda}{a^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{n e^{-\gamma_n}}{\sinh \gamma_n} \sin a_n \xi \sin a_n x \right] d\xi = 0.$$

Powyższy sposób postępowania można zastosować do błon złożonych z prostokątów (rys. 10).



Rys. 10

W przekroju β - β mamy nieznaną funkcję $w(\xi)$. Dla błony I otrzymamy

$$(4.11) \quad w_I(x, y) = w_{0,I}(x, y) + \int_0^{a_1} w(\xi) k^I(x, y; \xi, 0) d\xi.$$

Dla błony II

$$(4.12) \quad w_{II}(x, y_1) = w_{0,II}(x, y_1) + \int_0^{a_1} w(\xi) k^{II}(x, y_1; \xi, 0) d\xi.$$

Wzdłuż odcinka β - β mamy

$$(4.13) \quad \left[\frac{\partial w_I}{\partial y} \right]_{y=0} = \left[\frac{\partial w_{II}}{\partial y_1} \right]_{y_1=0}.$$

Stąd

$$(4.14) \quad \frac{\partial w_{0,I}(x, 0)}{\partial y} + \frac{\partial w_{0,II}(x, 0)}{\partial y_1} + \int_0^{a_1} w(\xi) \left[\frac{\partial k^I(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} + \frac{\partial k^{II}(x, 0; \xi, 0)}{\partial y_1} \right] d\xi = 0,$$

gdzie

$$\frac{\partial w_{0,I}(x, 0)}{\partial y} = -\frac{4pa}{S_y \pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tgh} \frac{\gamma'_n}{2} \sin a_n x,$$

$$\frac{\partial w_{0,II}(x, 0)}{\partial y_1} = -\frac{4pa_1}{S_y \pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tgh} \frac{\gamma'_n}{2} \sin a'_n x,$$

$$\gamma_n = \lambda a_n b, \quad \gamma'_n = \lambda a'_n b_1, \quad a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad a'_n = \frac{n\pi}{a_1},$$

$$a = \frac{\pi}{a}, \quad a' = \frac{\pi}{a_1},$$

$$\frac{\partial k^I(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = -\frac{\pi\lambda}{2a^2} \left[\frac{1}{1 - \cos a(x + \xi)} - \frac{1}{1 - \cos a(x - \xi)} \right] - \frac{2\pi\lambda}{a^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{ne^{-\gamma_n}}{\sinh \gamma_n} \sin a_n \xi \sin a_n x,$$

$$\frac{\partial k^{II}(x, 0; \xi, 0)}{\partial y_1} = -\frac{\pi\lambda}{2a_1^2} \left[\frac{1}{1 - \cos a'(x + \xi)} - \frac{1}{1 - \cos a'(x - \xi)} \right] - \frac{2\pi\lambda}{a_1^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{ne^{-\gamma'_n}}{\sinh \gamma'_n} \sin a'_n \xi \sin a'_n x.$$

: W przypadku $a = a_1$, $b = b_1$ otrzymamy równanie (4.10) w granicach całkowania od 0 do a .

Jeśli założyć $b \rightarrow \infty$, to otrzymamy

$$(4.15) \quad \int_0^a w(\xi) \left[\frac{1}{1 - \cos a(x + \xi)} - \frac{1}{1 - \cos a(x - \xi)} \right] d\xi = -\frac{8pa^3}{\pi^3 \lambda S_y} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin a_n x.$$

Rozwiązaniem tego równania całkowego jest $w(\xi) = \frac{p}{2S_y} \xi (a - \xi)$, czyli znana walcowa postać ugięcia błony.

Zależnie od kształtu błony jako niewiadome obieramy nieznane reakcje (rys. 8a, 8b i 8c) lub ugięcia (rys. 8b, 8d, 8e i 8f). Wykorzystując symetrię układów 8d, 8e i 8f możemy wyznaczyć nieznaną funkcję ugięcia z jednego tylko równania całkowego.

5. Zajmijmy się prętem o strukturze anizotropowej ortogonalnej walcowej.

Naprężenia tnące τ_{rz} i $\tau_{\varphi z}$ wyrażą się w tym przypadku wzorami

$$(5.1) \quad \tau_{rz} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1}, \quad \tau_{\varphi z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r_1}.$$

Funkcja skęcenia Ψ spełnia tu równanie²⁾

$$(5.2) \quad a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r_1^2} + a_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi_1^2} \frac{1}{r_1^2} + a_{44} \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Psi}{\partial r_1} = -2\vartheta.$$

Tutaj a_{44} , a_{55} są stałymi materiałowymi charakteryzującymi ortotropię materiału.

Równanie (5.2) doprowadzimy do postaci

$$(5.3) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Psi}{\partial r_1} + \frac{a_{55}}{a_{44}} \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi_1^2} = -\frac{2\vartheta}{a_{44}}$$

w obszarze D_1 . Będzie ono identyczne z równaniem różniczkowym ugięcia błony w obszarze D

$$(5.4) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{1}{r^2} = -\frac{p}{S},$$

jeśli przyjąć, że błonę obciążymy stałym obciążeniem o intensywności $p = \frac{2\vartheta S}{a_{44}}$. Przejście z obszaru D_1 na obszar D otrzymamy dzięki afinicznej transformacji

$$\varphi = \varphi_1 \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}} = \varphi_1 \beta, \quad r = r_1.$$

Stąd

$$(5.5) \quad \tau_{rz} = \frac{c}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \beta, \quad \tau_{\varphi z} = -c \frac{\partial w}{\partial r};$$

przy czym

$$\Psi = c w, \quad c = \frac{2S\vartheta}{a_{44}p}.$$

Rozpatrzmy wycinek pierścienia kołowego (rys. 11) i skonstruujmy dla niego funkcję Greena.

Pierwszą częścią zadania będzie wyznaczenie funkcji ugięcia błony spełniającej równanie (5.4) dla $p=0$ oraz warunki brzegowe na bokach $\varphi=0$ i $\varphi=a$. Szukamy rozwiązania w postaci

$$(5.6) \quad \bar{w}_1(r, \varphi) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} F_n(r) \sin k_n \varphi,$$

gdzie

$$k_n = \frac{n\pi}{a}.$$

²⁾ [1].

Rozwiązanie to spełnia warunki brzegowe

$$\bar{w}_1(r, 0) = 0, \quad \bar{w}_1(r, a) = 0.$$

Równanie różniczkowe cząstkowe jednorodne przechodzi w układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$(5.7) \quad \frac{d^2 F_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_n}{dr} - \left(\frac{n\pi}{ra} \right)^2 F_n = 0$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Niech siła skupiona P działa w punkcie o współrzędnych (R, ξ) .

Wprowadzimy nową zmienną

$$\varrho = \frac{r}{R}.$$

Równanie (5.7) przyjmie wtedy postać

$$(5.8) \quad \frac{d^2 F_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF_n}{d\varrho} - \left(\frac{n\pi}{\varrho a} \right)^2 F_n = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$F_n(\varrho) = C_1 \varrho^{nk} + C_2 \varrho^{-nk} \quad \left(k = \frac{\pi}{a} \right).$$

Łuk $R = \text{const.}$ dzieli błonę na dwa obszary, I i II. W obszarze I

$$(5.9.1) \quad F_{n,I} = C_1 \varrho^{nk} \quad \text{dla } r \leq R \quad \text{albo } \varrho \leq 1.$$

W obszarze II

$$(5.9.2) \quad F_{n,II} = C_2 \varrho^{-nk} \quad \text{dla } r \geq R \quad \text{albo } \varrho \geq 1.$$

Dla $\varrho = 1$ powinien być spełniony warunek

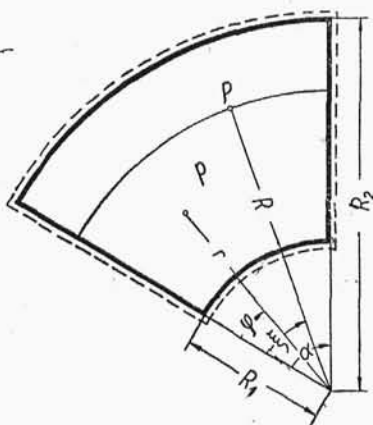
$$\bar{w}_I(1, \varphi) = \bar{w}_{II}(1, \varphi).$$

Stąd

$$C_1 = C_2.$$

Rozwińmy działającą w punkcie (R, ξ) siłę P na szereg Fouriera

$$P(\varphi) = \frac{2P}{Ra} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin nk\xi \sin nk\varphi.$$



Rys. 11

Dla $\varrho = 1$ powinien być spełniony warunek równowagi

$$(5.10) \quad S \left(\frac{\partial \bar{w}_I(1, \varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{w}_{II}(1, \varphi)}{\partial r} \right) = P(\varphi).$$

Stąd

$$C_1 = C_2 = \frac{P}{n \pi S} \sin k n \xi.$$

Funkcja Greena dla $\varrho \leq 1$ przyjmie zatem postać

$$(5.11.1) \quad \bar{w}_I(\varrho, \varphi; 1, \xi) = \frac{P}{\pi S} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \varrho^{nk} \sin n k \xi \sin n k \varphi,$$

a dla $\varrho \geq 1$

$$(5.11.2) \quad \bar{w}_{II}(\varrho, \varphi; 1, \xi) = \frac{P}{\pi S} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \varrho^{-nk} \sin n k \xi \sin n k \varphi.$$

Powyższą funkcję Greena możemy przedstawić również w postaci zamkniętej (dla $\varrho \geq 1$)

$$(5.12.1) \quad \bar{w}_I(\varrho, \varphi; 1, \xi) = -\frac{P}{4 \pi S} \ln \frac{1 - 2 \varrho^k \cos k(\varphi - \xi) + \varrho^{2k}}{1 - 2 \varrho^k \cos k(\varphi + \xi) + \varrho^{2k}}$$

lub

$$(5.12.2) \quad \bar{w}_I(\varrho, \varphi; 1, \xi) = -\frac{P}{4 \pi S} \ln \frac{\cosh(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cosh(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi + \xi)}.$$

Dla $\varrho = 1$ otrzymamy

$$(5.12.3) \quad \bar{w}_I(1, \varphi; 1, \xi) = -\frac{P}{4 \pi S} \ln \left| \frac{\sin \frac{k(\varphi - \xi)}{2}}{\sin \frac{k(\varphi + \xi)}{2}} \right|.$$

W ten sposób skonstruowana funkcja Greena nie spełnia jednak warunków brzegowych dla $r = R_1$ i $r = R_2$, gdzie ugięcie powinno być także równe zeru. Aby doprowadzić do spełnienia tych warunków, przedstawimy funkcję Greena dla wycinka pierścienia jako sumę dwóch ugięć:

$$(5.13) \quad w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) = \bar{w}_I(\varrho, \varphi; 1, \xi) + w_2(\varrho, \varphi; 1, \xi),$$

gdzie w_2 spełnia równanie Laplace'a oraz warunki brzegowe

$$(5.14) \quad \begin{cases} w_2(\varrho, 0) = 0, \\ w_2(\varrho, a) = 0, \\ w_2(\varrho_1, \varphi) = -\bar{w}_I(\varrho_1, \varphi; 1, \xi), \\ w_2(\varrho_2, \varphi) = -\bar{w}_{II}(\varrho_2, \varphi; 1, \xi), \end{cases}$$

przy czym

$$\varrho_1 = R_1/R,$$

$$\varrho_2 = R_2/R.$$

Funkcję w_2 przyjmujemy w postaci szeregu

$$(5.15) \quad w_2(\varrho, \varphi) = \frac{P}{\pi S} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (A_n \varrho^{nk} + B_n \varrho^{-nk}) \sin nk\varphi.$$

Z warunków brzegowych otrzymamy

$$A_n \varrho_1^{nk} + B_n \varrho_1^{-nk} = -\varrho_1^{nk} \sin nk\xi,$$

$$A_n \varrho_2^{nk} + B_n \varrho_2^{-nk} = -\varrho_2^{-nk} \sin nk\xi,$$

skąd

$$A_n = -\frac{1 - \varrho_1^{2nk}}{\varrho_2^{2nk} - \varrho_1^{2nk}} \sin nk\xi,$$

$$B_n = \frac{(1 - \varrho_2^{2nk}) \varrho_1^{2nk}}{\varrho_2^{2nk} - \varrho_1^{2nk}} \sin nk\xi.$$

Ostatecznie

$$(5.16) \quad w_2(\varrho, \varphi; 1, \xi) = \\ = -\frac{P}{\pi S} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(1 - \varrho_1^{2nk}) \varrho^{nk} - (1 - \varrho_2^{2nk}) \varrho_1^{2nk} \varrho^{-nk}}{\varrho_2^{2nk} - \varrho_1^{2nk}} \sin nk\xi \sin nk\varphi \\ \text{dla } \varrho \geq 1.$$

Po wyznaczeniu funkcji \bar{w}_I i w_2 , a więc i funkcji w_1 , przejdziemy do omówienia szczególnych przypadków.

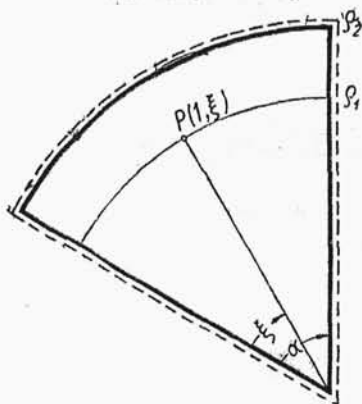
a. $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 > 1$.

Funkcja Greena daje się wyrazić wzorem zamkniętym

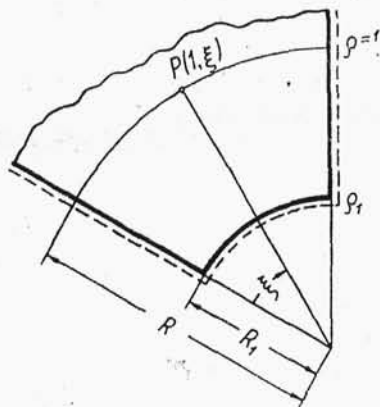
$$(5.17.1) \quad w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) = -\frac{P}{4\pi S} \ln \frac{1 - \varrho^k \cos k(\varphi - \xi) + \varrho^{2k}}{1 - \varrho^k \cos k(\varphi + \xi) + \varrho^{2k}} + \\ + \frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\varrho_2^{4k} - 2(\varrho \varrho_2^2)^k \cos k(\varphi - \xi) + \varrho^{2k}}{\varrho_2^{4k} - 2(\varrho \varrho_2^2)^k \cos k(\varphi + \xi) + \varrho^{2k}}$$

lub

$$(5.17.2) \quad w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) = -\frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\cosh(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cosh(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi + \xi)} + \\ + \frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\cosh\left(k \ln \frac{\varrho_2^2}{\varrho}\right) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cosh\left(k \ln \frac{\varrho_2^2}{\varrho}\right) - \cos k(\varphi + \xi)}$$



Rys. 12



Rys. 13

b. $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_2 \rightarrow \infty$.

Dla tego przypadku także otrzymujemy wzór zamknięty

$$(5.18) \quad w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) = -\frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\cosh(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cosh(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi + \xi)} + \\ + \frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\cosh\left(k \ln \frac{\varrho_1^2}{\varrho}\right) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cosh\left(k \ln \frac{\varrho_1^2}{\varrho}\right) - \cos k(\varphi + \xi)}$$

Rozważmy błonę w kształcie wycinka pierścienia kołowego (rys. 14) równomiernie napiętą i obciążoną obciążeniem $p = \text{const.}$ oraz podpartą na łuku AB od punktu $B(1, \beta_2)$ do punktu $A(1, \beta_1)$.

Ugięcie dla takiej błony wyrazimy na podstawie zasady superpozycji wzorem

$$(5.19) \quad w(\varrho, \varphi) = w_0(\varrho, \varphi) + \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\xi) w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) R d\xi,$$

gdzie $w_0(\varrho, \varphi)$ jest ugięciem błony podpartej jedynie na konturze i wywołanym obciążeniem $p = \text{const.}$, a $R(\xi)$ jest nieznaną reakcją podporową na łuku AB , którą wyznaczymy z warunku

$$w(1, \varphi) = 0 \quad \text{dla} \quad \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2.$$

Zatem

$$(5.20) \quad w_0(1, \varphi) + \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\xi) w_1(1, \varphi; 1, \xi) R d\xi = 0.$$

Funkcja $w_0(\varrho, \varphi)$ występująca w równaniu (5.19) jest rozwiązaniem równania $\nabla_{w_0}^2 = -p/S$ o warunku brzegowym $w_0 = 0$ na konturze wycinka pierścienia kołowego³⁾

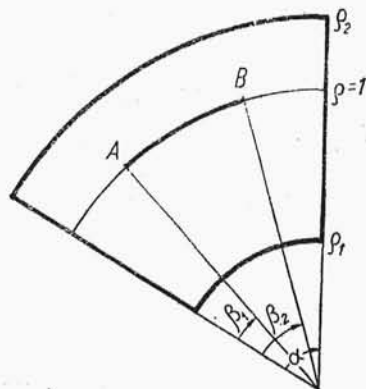
$$(5.21) \quad w_0(r, \varphi) = \frac{4pr^2}{\pi S} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2k^2 - 4)} (1 + A_n r^{nk-2} + B_n r^{-nk+2}) \sin nk\varphi;$$

gdzie

$$A_n = -\frac{R_2^{nk+2} - R_1^{nk+2}}{R_2^{2nk} - R_1^{2nk}},$$

$$B_n = \frac{R_1^{nk+2} R_2^{nk+2} - (R_2^{nk-2} - R_1^{nk-2})}{R_2^{2nk} - R_1^{2nk}}.$$

³⁾ [3].



Rys. 14

Rozwiązanie równania (5.20) objaśnimy na prostym przykładzie blony według rys. 15.

Dane:

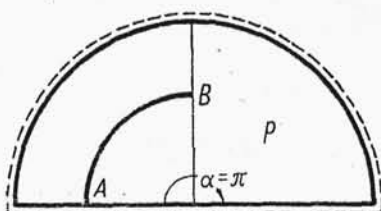
$$R_1 = 0, \quad \alpha = \pi, \quad k = 1.$$

Zatem ze wzoru (5.21) znajdziemy

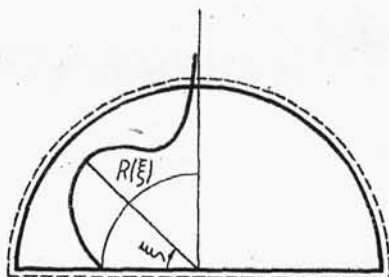
$$w_0(R, \varphi) = \frac{4pR_2^2}{\pi S} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)} (1 - \varrho_2^{-n+2}) \sin n\varphi.$$

Ze wzoru (5.17.2)

$$w_1(1, \varphi; 1, \xi) = -\frac{1}{4\pi S} \left[2 \ln \left| \frac{\sin \frac{\varphi-\xi}{2}}{\sin \frac{\varphi+\xi}{2}} \right| - \ln \frac{\cosh(2 \ln \varrho_2) - \cos(\varphi-\xi)}{\cosh(2 \ln \varrho_2) - \cos(\varphi+\xi)} \right].$$



Rys. 15



Rys. 16

Dla $R = R_2/2$ równanie całkowe (5.20) przyjmie postać

$$\begin{aligned} (5.22) \quad & \int_0^{\pi/2} R(\xi) \left[2 \ln \left| \frac{\sin \frac{\varphi-\xi}{2}}{\sin \frac{\varphi+\xi}{2}} \right| - \ln \frac{\cosh(2 \ln \varrho_2) - \cos(\varphi-\xi)}{\cosh(2 \ln \varrho_2) - \cos(\varphi+\xi)} \right] d\xi = \\ & = \frac{4pR_2^2}{R} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)} (1 - 2^{2-n}) \sin n\varphi. \end{aligned}$$

Przybliżone rozwiązanie równania (5.22) ilustruje rys 16.

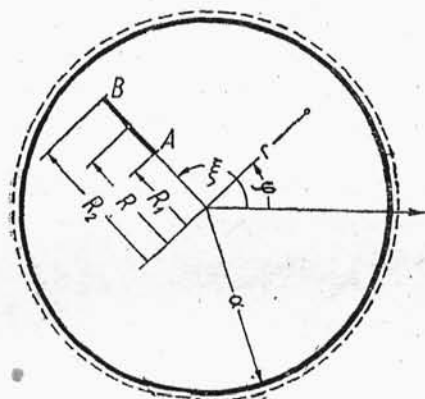
6. Rozważmy błonę o konturze kołowym podpartą na obwodzie oraz na podporze liniowej AB , leżącej na promieniu koła (rys. 17).

Przy braku tej podpory otrzymamy ugięcie kołowo symetryczne

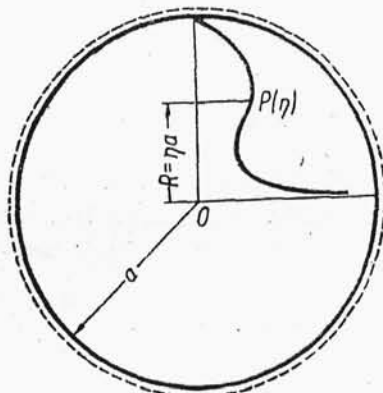
$$w_0(\xi) = \frac{pa^2}{4S}(1 - \varrho^2),$$

gdzie

$$\varrho = \frac{r}{a}.$$



Rys. 17



Rys. 18

Funkcja Greena dla błony o konturze kołowym wyraża się znanym związkiem ⁴⁾

$$(6.2.1) \quad w_1(r, \varphi; R, \xi) = \frac{P}{4\pi S} \ln \frac{r^2 R^2 - 2a^2 R r \cos(\varphi - \xi) + a^4}{a^2 [r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \xi)]}$$

lub

$$(6.2.2) \quad w_1(\varrho, \varphi; \eta, \xi) = \frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\cosh(\ln \varrho \eta) - \cos(\varphi - \xi)}{\cosh(\ln \varrho / \eta) - \cos(\varphi - \xi)},$$

gdzie

$$\varrho = \frac{r}{a}, \quad \eta = \frac{R}{a}.$$

Łączne ugięcie błony wywołane obciążeniem $p = \text{const.}$ oraz nieznaną funkcją reakcji podporowej $P(\eta)$ wyraża się związkiem

$$(6.3) \quad w(\varrho, \varphi) = w_0(\varrho) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} P(\eta) w_1(\varrho, \varphi; \eta, \xi) a d\eta.$$

⁴⁾ [4].

Nieznaną funkcję reakcji podporowej znajdziemy w warunku zerowej wartości ugięcia na odcinku AB

$$(6.4) \quad w_0(\varrho, \xi) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} P(\eta) w_1(\varrho, \xi; \eta, \xi) a d\eta = 0$$

lub po podstawieniu odpowiednich funkcji

$$(6.5) \quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} P(\eta) \ln \frac{\varrho \eta - 1}{\varrho - \eta} d\eta = -\frac{pa\pi}{2} (1 - \varrho^2).$$

Rysunek 18 podaje wynik przybliżonego rozwiązania równania całkowego (6.5) przy założeniu dodatkowego podparcia błony kołowej wzdłuż promienia OC .

Powyższe rozważania dadzą się uogólnić na błony kołowe z dwoma, trzema i więcej dodatkowymi liniowymi podporami.

Dla dwu dodatkowych podpór mamy

$$(6.6) \quad w(\varrho, \varphi) = w_0(\varrho) + \int_{A_1 B_1} P_1(\eta_1) w_1(\varrho, \varphi; \eta_1, \xi_1) a d\eta_1 + \\ + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta_2) w_2(\varrho, \varphi; \eta_2, \xi_2) a d\eta_2.$$

Nieznane funkcje $P_1(\eta_1)$ i $P_2(\eta_2)$ wyznaczymy z równań całkowych

$$(6.7) \quad \begin{cases} w_0(\varrho) + \int_{A_1 B_1} P_1(\eta_1) w_1(\varrho, \xi_1; \eta_1, \xi_1) a d\eta_1 + \\ + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta_2) w_2(\varrho, \xi_1; \eta_2, \xi_2) a d\eta_2 = 0, \\ w_0(\varrho) + \int_{A_1 B_1} P_1(\eta_1) w_1(\varrho, \xi_2; \eta_1, \xi_1) a d\eta_1 + \\ + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta_2) w_2(\varrho, \xi_2; \eta_2, \xi_2) a d\eta_2 = 0. \end{cases}$$

Ugięcie błony o konturze kołowym podparte na obwodzie oraz na dodatkowej podporze krzywoliniowej $R = \text{const.}$ (rys. 20) i poddanej działaniu obciążenia $p = \text{const.}$ wyrazi się związkiem

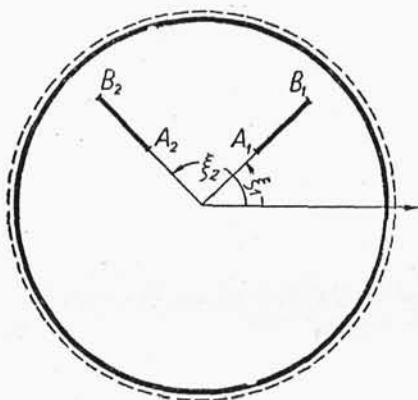
$$(6.8) \quad w(\varrho, \varphi) = w_0(\varrho) + \int_{\beta_1}^{\beta_2} P(\xi) w_1(\varrho, \varphi; \varrho_0, \xi) R_0 d\xi \quad \left(\varrho_0 = \frac{R_0}{a} \right).$$

Nieznaną funkcję $P(\xi)$ wyznaczymy z równania całkowego

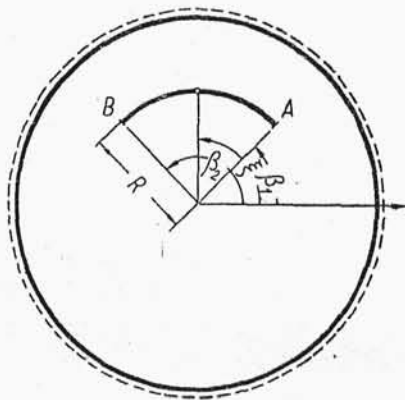
$$(6.9) \quad w_0(\xi) + \int_{\beta_1}^{\beta_2} P(\xi) w_1(\varrho_0, \varphi; \varrho_0, \xi) R_0 d\xi = 0$$

lub

$$(6.10) \quad \int_{\beta_1}^{\beta_2} P(\xi) \ln \frac{\cosh(2 \ln \varrho_0) - \cos(\varphi - \xi)}{1 - \cos(\varphi - \xi)} d\xi = -\frac{p a^2 \pi}{R_0} (1 - \varrho_0^2).$$



Rys. 19



Rys. 20

Podana powyżej metoda rozwiązywania złożonych przypadków skręcania (czystego) prętów anizotropowych lub zagadnienia wygięcia błony znaleźć może zastosowanie również w innych zjawiskach fizycznych, których matematyczne sformułowanie prowadzi do równań różniczkowych i wartości brzegowych tej samej postaci co omówione w niniejszej pracy. Dla przykładu wymienić tu można zagadnienie ruchu niewirowego cieczy doskonałej w naczyniu tej samej postaci co pręt skręcany, zagadnienie płaskiego przepływu wód gruntowych lub też zagadnienie funkcji naprężeń przy zginaniu prętów.

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. G. L e c h n i c k i, *Teoria uprugosti anizotropnowo tiela*, Moskwa 1950, str. 151.
- [2] W. O l s z a k, *O skręcaniu prętów anizotropowych w świetle teorii odkształceń nieliniowych*, Arch. Mech. Stos. 3-4 (1951).
- [3] A. S o m m e r f e l d i O. F r a n k, *Die Deformation der Kreis-membran*, Zeitschr. f. Biol. t. XI, 6-7 (1913).
- [4] F. T ö l k e, *Praktische Funktionenlehre*, 1950, str. 337.

S u m m a r y

ON CERTAIN CASES OF TORSION OF BARS

The author's object is to give an exact solution of the problem of (pure) torsion of straight anisotropic bars of the orthogonal type of anisotropy, for the cases of the following cross sections:

- (1) Rectangular with narrow slits.
- (2) Representing a figure composed of rectangles.
- (3) Representing an annular sector.
- (4) Circular with recti and curvilinear slits.

For a more convenient mechanical interpretation of certain mathematical operations the solutions are given for membrane models, linear supports inside the membrane area representing the slits.

Several particular cases are discussed.

(1) The first is that of a rectangular membrane with supported edge, the straight line AB inside the membrane area constituting an additional support (Fig. 4). The deflection of the membrane can be expressed by an integral equation (3.1) where $R(\xi)$ represents the reaction of the support AB and $w_1(x, y; \xi, \eta)$ is the function of Green for $R = 1$. The unknown function of the reaction of the support can be found from the condition that the deflection be equal to zero for the line AB . This leads to a Fredholm integral equation of the first kind. The function $R(\xi)$ being known the deflection of the membrane can be found from the Eq. (3.1). The relations (1.5.1) permit to find the shearing stresses of the corresponding torsional problem. This method is generalized for more additional supports and for membranes whose shape represents a figure composed of several rectangles.

(2) In an analogous way a solution is found in polar coordinates for membranes representing an annular sector with curvilinear slits.

(3) Finally a solution is given of the problem of a circular membrane with supported edge and additional recti and curvilinear supports. The solution is found here in a similar way by means of a Fredholm integral equation of the first kind.