

**ARCHIWUM  
MECHANIKI STOSOWANEJ  
ARCHIVES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE**

**TOM III**

**ZESZYT 2**

**WYDAWNICTWO  
ZAKŁADU MECHANIKI BUDOWLI POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ  
GDAŃSK 1951**

# Zastosowanie całki Fouriera do teorii płyt ortotropowych

Применение интеграла Фурье в теории ортотропных пластин

W. Nowacki i St. Turski

W zastosowaniach praktycznych nabierają coraz większego znaczenia płyty ortotropowe.

Równanie różniczkowe powierzchni odkształcenia płyty ortotropowej w układzie współrzędnych prostokątnych przyjmuje następującą, podaną przez M. T. Hubera<sup>1)</sup> postać:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad (1)$$

Tutaj  $D_x$ ,  $H$ ,  $D_y$  są wielkościami stałymi.

$$D_x = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_x \frac{h^3}{12}; \quad D_y = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_y \frac{h^3}{12}; \quad 2H = \frac{D_x}{m_y} + \frac{D_y}{m_x} + 4C;$$

$$C = G_0 \frac{h^3}{12},$$

gdzie

$E_x$ ,  $E_y$  są modułami sprężystości w kierunku osi  $x$  i  $y$ ,  
 $m_x$ ,  $m_y$  odpowiednimi liczbami Poissona dla tych kierunków,  
 $G_0$  jest stałą materiałową, stanowiącą odpowiednik modułu odkształcenia postaciowego płyty izotropowej,

$h$  jest grubością płyty,

$p(x, y)$  obciążeniem na jednostkę powierzchni środkowej płyty,

Przy oznaczeniach

$$\varrho = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}, \quad \varepsilon^4 = \frac{D_y}{D_x},$$

\*) Praca niniejsza była referowana na posiedzeniu sekcji matematyki stosowanej I-go Kongresu Matematyków Węgierskich w Budapeszcie we wrześniu 1950.

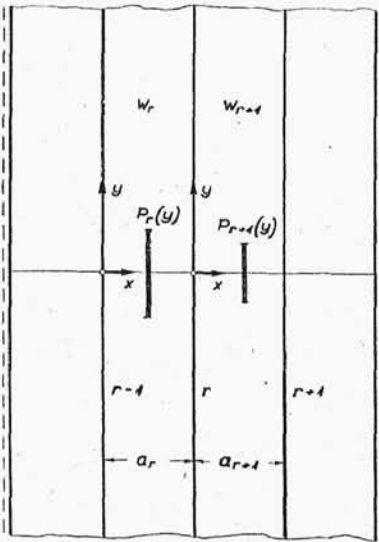
<sup>1)</sup> M. T. Huber, La théorie générale des hourdis en béton armé. Lwów 1914.

napiszemy równanie (1) w postaci

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2,0 \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{N}. \quad (2)$$

Wielkość  $\varrho$  odgrywa w teorii płyt ortotropowych ważną rolę.

Mianowicie rozwiązanie równania (1) dla  $\varrho > 1$  znajdują zazwyczaj zastosowanie dla płyt żelbetowych krzyżowo zbrojonych, a dla  $\varrho < 1$  dla płyt z blachy falistej i gęstożebrowych krat belkowych. Wypadek  $\varrho = 1$ ;  $\varepsilon = 1$  odpowiada płytom izotropowym.



Rys. 1

Rozważmy płytę w kierunku  $y$  nieskończenie długą, opierającą się na niepodatnych, równoległych podporach liniowych (rys. 1). Założmy rozmaite rozpiętości  $a_r$  i rozmaite sztywności  $D_r$  w poszczególnych przęsłach.

Niech na płytę działa obciążenie  $P(y)$  wzdłuż prostej równoległej do osi  $y$ . Przyjmijmy, że obciążenie to jest ciągłe lub nieciągłe, ale ograniczone i ustawione symetrycznie w stosunku do osi  $x$ ; *poszukujemy powierzchni odkształcenia płyty*. Tak określone zadanie zawierać będzie cały szereg wypadków szczególnych i charakteryzować się będzie tym, że rozwiązanie równania (1) da się

przedstawić przy pomocy całek Fouriera.

Jako wielkości nadliczbowe przyjmijmy momenty podporowe o wektorach skierowanych w kierunku osi  $y$ . Oznaczmy je odpowiednio do podpór przez  $M_r$  ( $r=1, 2, \dots$ ).

Zarówno obciążenie  $P(y)$  jak i momenty  $M_r(y)$  wyrazimy przy pomocy całek Fouriera.

$$P(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(a) \cos ay \, da, \quad p(a) = \int_0^{\infty} P(l) \cos al \, dl; \quad (3)$$

$$M_r(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m_r(a) \cos ay \, da, \quad m_r(a) = \int_0^{\infty} M_r(\lambda) \cos a\lambda \, d\lambda;$$

przy czym zakładamy, że  $\int_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda)| d\lambda$  posiada wartość skończoną.

Wielkość momentów podporowych  $M$ , wyznaczymy z odpowiedniej ilości równań ciągłości płyty na podporach  $r$ . Równania te jak niżej zobaczymy, dają się przedstawić w postaci równań trójczłonowych.

W dalszych wywodach zajmować się będziemy równaniem jednorodnym

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varrho \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (4)$$

Rozwiązanie tego równania przedstawimy w postaci

$$w = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} X(a, x) \cos ay \, da, \quad (5)$$

gdzie dla  $\varrho > 1$

$$X(x, a) = U_1 \cosh \lambda_1 x + U_2 \sinh \lambda_1 x + U_3 \cosh \lambda_2 x + U_4 \sinh \lambda_2 x, \quad (6a)$$

$$\lambda_{1,2} = v \sqrt{\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - 1}}, \quad v = \varepsilon a.$$

Dla  $\varrho = 1$

$$X(x, a) = A_1 \cosh vx + A_2 vx \sinh vx + A_3 \sinh vx + A_4 vx \cosh vx, \quad (6b)$$

wreszcie dla  $\varrho < 1$

$$X(x, a) = B_1 \cosh \varphi_1 x \cos \varphi_2 x + B_2 \cosh \varphi_1 x \sin \varphi_2 x + B_3 \sinh \varphi_1 x \cos \varphi_2 x + B_4 \sinh \varphi_1 x \sin \varphi_2 x \quad (6c)$$

$$\varphi_{1,2} = v \sqrt{\frac{1 \pm \varrho}{2}}.$$

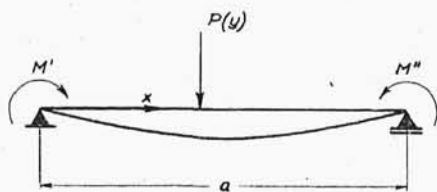
Zauważmy, że między  $\varphi$  i  $\lambda$  zachodzi zależność

$$\lambda_{1,2} = \varphi_1 \pm i \varphi_2.$$

Powierzchnię odkształcenia pasma płytowego o szerokości  $a$  złożymy z dwóch części, z powierzchni  $w_P$  powstałej od obciążenia liniowego  $P(y)$  oraz z powierzchni  $w_M$  powstałej wskutek działania momentów podporowych  $M'(y)$ ,  $M''(y)$ ,

$$w = w_P + w_M' + w_M''.$$

Wyznamy najpierw powierzchnię  $w_M$  powstałą pod wpływem momentu



Rys. 2

$$M'(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m'(a) \cos ay \, da,$$

działającego wzdłuż brzegu  $x=0$  pasma płytowego swobodnie podpartego na podporach  $x=0$ ,  $x=a$ .

W tym wypadku mamy do czynienia z jednorodnym równaniem różniczkowym (4). Warunki brzegowe tego zadania są następujące:

$$\text{dla } x=0 \quad w_M'(0,y)=0, \quad -D_x \frac{\partial^2 w_M'}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = M'(y), \quad (7)$$

$$\text{dla } x=a \quad w_M'(a,y)=0, \quad \frac{\partial^2 w_M'}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0,$$

Prowadzą one do wyznaczenia (dla  $\varrho > 1$ ) wielkości  $U_1, \dots, U_4$

$$U_1 = -U_3 = -\frac{a^2 m'(a)}{D_x (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad (8)$$

$$U_2 = -U_1 \operatorname{ctgh} \lambda_1 a, \quad U_4 = U_1 \operatorname{ctgh} \lambda_2 a.$$

Łatwo obliczyć stałe całkowania w przypadkach  $\varrho < 1$  i  $\varrho = 1$ .

Znajomość stałych  $U_1, \dots, U_4$  pozwoli już na wyznaczenie nachylenia stycznej do linii odkształcenia w przekroju  $y = \text{const}$ .

$$\frac{\partial w_M'}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{a}{\pi D_x} \int_0^{\infty} m(a) \Phi(a) \cos ay \, da,$$

$$\frac{\partial w_M'}{\partial x} \Big|_{x=a} = -\frac{a}{\pi D_x} \int_0^{\infty} m(a) \Psi(a) \cos ay \, da, \quad (9)$$

gdzie

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2(v_1^2 - v_2^2)} (v_1 \operatorname{ctgh} v_1 - v_2 \operatorname{ctgh} v_2), \quad (10)$$

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{2(v_1^2 - v_2^2)} \left( \frac{v_2}{\sinh v_2} - \frac{v_1}{\sinh v_1} \right), \quad v_1 = \lambda_1 \alpha, \quad v_2 = \lambda_2 \alpha.$$

Dla  $\varrho < 1$  uzyskamy przy użyciu zależności  $\lambda_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2$  następujące funkcje parametru:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \frac{\psi_2 \cosh \psi_1 \sinh \psi_1 - \psi_1 \cosh \psi_2 \sinh \psi_2}{\psi_1 \psi_2 (\sinh^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2)}, \\ \Psi(\alpha) &= \frac{\psi_1 \cosh \psi_1 \sinh \psi_2 - \psi_2 \sinh \psi_1 \cosh \psi_2}{\psi_1 \psi_2 (\sinh^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

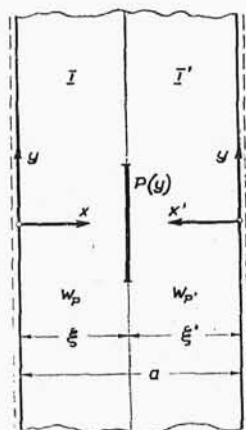
$$\psi_1 = \varphi_1 \alpha, \quad \psi_2 = \varphi_2 \alpha.$$

Wreszcie dla  $\varrho = 1$  uzyskamy przy przejściu do granic ( $\psi_1 \rightarrow \eta$ ;  $\psi_2 \rightarrow 0$ ) następujące funkcje parametru  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \frac{\cosh \eta \sinh \eta - \eta}{\eta \sinh^2 \eta}, \\ \Psi(\alpha) &= \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh^2 \eta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Następnym zadaniem pomocniczym będzie wyznaczenie powierzchni  $w_P$  pasma płytowego swobodnie podpartego (rys. 3). Pasma płytowe traktować będziemy jako dwie płyty (I i I') rozdzielone przekrojem  $x = \xi$ . Obciążenie  $P(y)$  jest symetryczne względem osi  $x$  i wyraża się całką

$$P(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(\alpha) \cos \alpha y \, d\alpha.$$



Rys. 3

Równanie różniczkowe powierzchni odkształcenia płyty przyjmuje postać

$$\frac{\partial^4 w_P}{\partial x^4} + 2\varrho \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w_P}{\partial x^2 \partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w_P}{\partial y^4} = 0 \quad \text{dla płyty I} \quad (13a)$$

oraz

$$\frac{\partial^4 w_P'}{\partial x'^4} + 2\varrho\varepsilon^2 \frac{\partial^4 w_P'}{\partial x'^2 \partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w_P'}{\partial y^4} = 0 \text{ dla płyty I'} \quad (13b)$$

Dla  $\varrho > 1$  przyjmujemy jako rozwiązanie równania (13a) całkę

$$w_P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} (U_2 \sinh \lambda_1 x + U_4 \sinh \lambda_2 x) \cos \alpha y \, d\alpha,$$

a dla równania (13b) całkę

$$w_P' = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} (\bar{U}_2 \sinh \lambda_1 x' + \bar{U}_4 \sinh \lambda_2 x') \cos \alpha y \, d\alpha.$$

Funkcje parametru  $\alpha$ ,  $U_1$ ,  $U_4$ ,  $\bar{U}_1$ ,  $\bar{U}_4$ , wyznaczymy z dwóch warunków geometrycznych ciągłości płyty w przekroju  $x = \xi$

$$w_P = w_P', \quad \frac{\partial w_P}{\partial x} = - \frac{\partial w_P'}{\partial x'} \quad (14a)$$

oraz z dwóch warunków statycznych

$$\frac{\partial^2 w_P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_P'}{\partial x'^2}, \quad -D_x \left( \frac{\partial^2 w_P}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_P'}{\partial x'^3} \right) = P(y). \quad (14b)$$

Pierwszy z warunków (14b) określa równość momentów zginających  $M_x$ , drugi wyraża, że obciążenie  $P(y)$  równa się różnicy sił tnących na lewo i prawo od przekroju  $x = \xi$ .

Z powyższych warunków brzegowych otrzymamy dla  $\varrho < 1$

$$U_2 = - \frac{p(\alpha) \alpha^2 \sinh \lambda_1 \xi'}{D_x \lambda_1 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sinh \lambda_1}, \quad U_4 = \frac{p(\alpha) \alpha^2 \sinh \lambda_2 \xi'}{D_x \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sinh \lambda_2},$$

$$\bar{U}_4 = U_3 \frac{\sinh \lambda_2 \xi}{\sinh \lambda_2 \xi'}, \quad \bar{U}_2 = U_3 \frac{\sinh \lambda_1 \xi}{\sinh \lambda_1 \xi'}.$$

Łatwo obliczyć stałe całkowania w przypadkach  $\varrho < 1$  i  $\varrho = 1$ .

Nachylenie stycznej do odkształconej w przekroju  $y = \text{const}$  wyrazimy wzorami

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_P}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{a^2}{\pi D_x} \int_0^\infty p(\alpha) \Theta^{(l)} \cos \alpha y \, d\alpha, \\ \frac{\partial w_{P'}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} &= \frac{a^2}{\pi D_x} \int_0^\infty p(\alpha) \Theta^{(p)} \cos \alpha y \, d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

gdzie

$$\Theta^{(l)} = \frac{2 p(\alpha)}{v_1^2 - v_2^2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 \xi'}{\sinh v_2} - \frac{\sinh \lambda_1 \xi'}{\sinh v_1} \right). \quad (16)$$

Dla  $\Theta^{(p)}$  należy we wzorze (16) wstawić  $\xi$  w miejsce  $\xi'$ .

Dla  $q < 1$  uzyskamy

$$\Theta^{(l)} = \frac{p(\alpha)}{\psi_1 \psi_2} \cdot \frac{\sinh \varphi_1 \xi' \cosh \psi_1 \cos \varphi_2 \xi' \sin \psi_2 - \sinh \psi_1 \cosh \varphi_1 \xi' \cos \psi_2 \sin \varphi_2 \xi'}{\sinh^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2}. \quad (17)$$

Wreszcie dla  $q = 1$

$$\Theta^{(l)} = \frac{1}{\eta^2 \sinh^2 \eta} (\nu \xi \cosh \nu \xi' \sinh \eta - \eta \sinh \nu \xi) \quad (18)$$

Dla  $\Theta^{(p)}$  należy w powyższych wzorach wstawić  $\xi$  w miejsce  $\xi'$  i na odwrót.

Po tak opracowanych dwóch zadaniach pomocniczych przystąpić możemy do ułożenia równań trójczłonowych dla płyty ciąglej nieskończenie długiej w kierunku  $y$  (rys. 1).

Niech w przęśle  $a_r$  działa obciążenie  $P_r(y)$ , w przęśle  $a_{r+1}$  obciążenie  $P_{r+1}(y)$ .

Oznaczmy nieznane momenty podporowe wzdłuż linii  $r-1$ ,  $r$ ,  $r+1$  przez  $M_{r-1}$ ,  $M_r$ ,  $M_{r+1}$ .

Z warunku ciągłości płyty na podporze  $r$

$$\frac{\partial w_r}{\partial x} \Big|_{x=a_r} = \frac{\partial w_{r+1}}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (19)$$

uzyskamy równanie trójczłonowe, stanowiące odpowiednik równa-



nia trzech momentów belek ciągłych

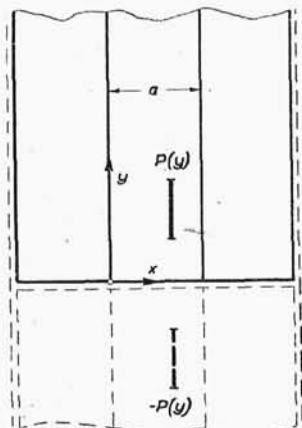
$$m_{r-1}\Psi_r c_r + m_r(c_r\Phi_r + c_{r+1}\Phi_{r+1}) + m_{r+1}\Psi_r c_{r+1} + a_r c_r p_r \Theta_r^{(p)} + \\ + a_{r+1} c_{r+1} p_{r+1} \Theta_{r+1}^{(l)} = 0 \quad (20)$$

$$r=1, 2, 3, \dots, \quad c_r = \frac{a_r}{D_{x,r}}.$$

Rozwiązanie układu równań (20) daje wielkości  $m(a)$  a tym samym pozwoli na wyznaczenie momentów podporowych

$$M(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m(a) \cos ay da.$$

Układ równań (20) pozostaje słusznym również dla płyty ciągłej nieskończenie długiej podpartej swobodnie wzdłuż osi  $x$  (rys. 4),



Rys. 4

Wypadek ten traktować można jako wynik antysymetrycznego obciążenia względem osi  $x$ . Powierzchnia odkształcenia wyraża się w tym wypadku całką

$$w = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{a^2} X(x,a) \sin ay da,$$

Rozwiązanie postawionego na wstępie zadania dopuszcza cały szereg wypadków szczególnych. Zwróćmy uwagę na jeden, specjalnie prosty, dotyczący pasma płytowego o szerokości  $a$  na obu brzegach utwierdzonego zupełnie i obciążonego siłą skupioną (rys. 5). Wypadek ten został na drodze odmiennej rozwiązany przez A. Nadai<sup>2)</sup>.

Dla obciążenia siłą  $P$  w punkcie  $(a/2, 0)$  wynika z symetrii tego obciążenia

$$m_r(a) = m_{r+1}(a).$$

<sup>2)</sup> A. Nadai, Über die Biegung der elastischen Platten durch Einzellasten. Der Bauingenieur 1921 H. 11 str. 301.

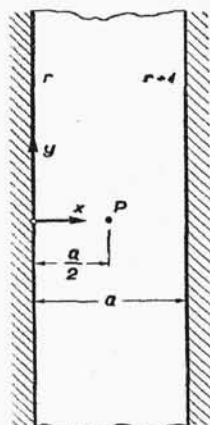
Z równania (20) przy  $D_{x, r+1} \rightarrow \infty$  otrzymamy

$$m_1(\alpha)(\Phi(\alpha) + \Psi(\alpha)) + \frac{Pa}{2} \Theta^{(p)}\left(\alpha, \frac{a}{2}\right) = 0.$$

Dla  $\varrho=1$  znajdujemy:

$$m_1(\alpha) = m_2(\alpha) = -\frac{Pa}{2} \frac{\sinh \eta/2}{\eta + \sinh \eta},$$

$$M_1(y) = M_2(y) = -\frac{Pa}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sinh \eta/2}{\eta + \sinh \eta} \cos \alpha y d\alpha.$$



Rys. 5

Przedstawiony tu sposób rozwiązania da się z powodzeniem zastosować do nieskończenie długich płyt spoczywających na sprężystych podporach liniowych oraz do nieskończenie długich płyt wspornikowych.

### Сокращение

#### Применение интеграла Фурье в теории ортотропных пластин

Темой работы является использование интеграла Фурье для определения поверхности изгиба в направлении оси  $y$ , бесконечно длинной, ортотропной пластинки, покоящейся на неподатливых, параллельных опорных линиях (черт. 1).

На пластинку действует линейная нагрузка  $P(y)$ , симметричная по отношению к оси  $x$ . За неизвестные приняты величины опорных моментов „ $m_x$ “, действующих вдоль опорных линий.

Из условия непрерывности пластинки на опорах получено трехчленное уравнение (20) соответствующее уравнению трех моментов в неразрезных балках.

Решение распространено также на тип пластинки с нагрузкой показанной на черт. 4.