

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

Tom I.

Zeszyt 2

1949

Zginanie płyt ciągłych nieskończenie długich

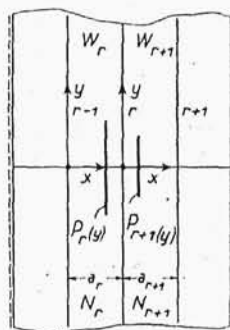
Flexion des plaques continues infiniment longues

W. Nowacki, Gdańsk

A) Rozważmy płytę w kierunku osi x nieskończenie długą, opierającą się na niepodatnych, równoległych podporach liniowych (rys. 1). Załóżmy różne rozpiętości a i różne sztywności N poszczególnych przęseł. Grubość płyty przyjmujemy małą w stosunku do jej grubości. Ograniczymy się do zakresu odkształceń sprężystych.

Niech na płytę działa obciążenie liniowe $P(y)$ równoległe do osi y i symetryczne osi x ¹⁾. Jako wielkości „nadliczbowe” płyty ciągłej przyjmijmy momenty podporowe M (O, y). Oznaczmy jej przez M ($r=1, 2, \dots$).

Zarówno obciążenie $P(y)$ jak i momenty podporowe wyrazimy przez całki Fouriera



Rys. 1.

$$P(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(a) \cos ay \, da \quad p(a) = \int_0^{\infty} P(\lambda) \cos a\lambda \, d\lambda \quad (1)$$

$$M_r(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m_r(a) \cos ay \, da \quad m_r(a) = \int_0^{\infty} M_r(\lambda) \cos a\lambda \, d\lambda$$

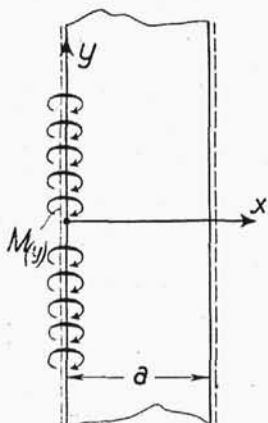
¹⁾ Szczególny wypadek postawionego zagadnienia, mianowicie zginanie płyty obustronnie utwierdzonej zupełnie w krawędziach r i $r+1$ i obciążonej siłą skupioną w osi x (przez przejście do granicy z obciążeniem $P(x)$) znalazł rozwiązanie w pracy A. Nádai: „Über die Biegung der rechteckigen Platten durch Einzellasten”, Der Bauingenieur, 1921, H. 11. Str. 301.

Zakładamy tu jednocześnie, że $\int_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda) d\lambda$ posiada wartość skończoną.

Wielkości momentów podporowych M_r wyznaczymy z odpowiedniej ilości równań warunkowych, równań ciągłości płyty na podporach poprzecznych:

$$\left. \frac{\partial w_r}{\partial x} \right|_{x=a_r} = \left. \frac{\partial w_{r+1}}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (2)$$

W równaniu powyższym w — oznacza rzędne powierzchni ugięcia płyty. Ustawienie równań trójczłonowych poprzedzimy opracowaniem układu podstawowego, płyty w kierunku y nieskończenie długiej, spoczywającej w sposób swobodny na dwóch sąsiednich równoległych podporach, obciążonych momentami podporowymi $M(y)$ i obciążeniem $P(y)$.



Rys. 2.

a) obciążenie układu podstawowego symetrycznym momentem podporowym:

$$M(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m(a) \cos ay da$$

Jako rozwiązanie równania różniczkowego powierzchni ugięcia:

$$\Delta \Delta w = 0 \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

przyjmiemy całkę Fouriera

$$w = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} (A \cosh ax + Bax \sinh ax + C \sinh ax + Dax \cosh ax) \cos ay da \quad (4)$$

Wielkości A, B, C, D , funkcje parametru α wyliczymy z następujących warunków brzegowych:

$$w \Big|_{x=0} = 0; \quad -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m(\alpha) \cos \alpha y d\alpha; \quad w \Big|_{x=a} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0 \quad (5)$$

Wielkość N jest charakterystyką płyty na zginanie:

$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

W ostatnim wyrażeniu E jest modulem sprężystości, μ — liczbą Poissona, a h — grubością płyty.

Z warunków brzegowych (5) otrzymamy:

$$A=0 \quad B=\frac{m(\alpha)}{2N} \quad C=\frac{v}{2N} (1-\operatorname{ctanh}^2 v) m(\alpha) \quad v=\alpha a$$

$$D=\frac{m(\alpha)}{2N} \operatorname{ctanh} v$$

Powierzchnię ugięcia wyrazi zatem równanie:

$$w = \frac{a^2}{N\pi} \int_0^\infty [\alpha x \sinh v \cosh \alpha(a-x) - v \sinh \alpha x] \frac{m(\alpha) \cos \alpha y}{v^2 \sinh^2 v} d\alpha \quad (6)$$

Z ostatniego związku wyliczymy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{a}{N\pi} \int_0^\infty m(\alpha) \Phi(v) \cos \alpha y d\alpha \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} &= -\frac{a}{N\pi} \int_0^\infty m(\alpha) \Psi(v) \cos \alpha y d\alpha \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$\Phi(v) = \frac{\cosh v \sinh v - v}{v \sinh^2 v} \quad \Psi(v) = \frac{v \cosh v - \sinh v}{v \sinh^2 v} \quad (8)$$

b) Obciążenie układu podstawowego momentem:

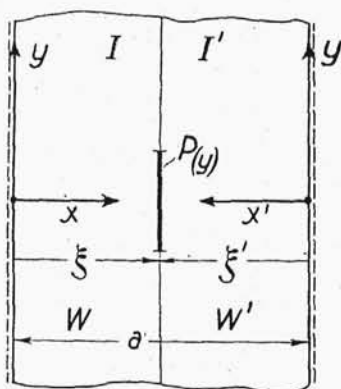
$$M_y = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m(a) \cos ay da \quad \text{w krawędzi } x=a.$$

Postępując podobnie jak w wypadku omówionym w poprzednim ustępie uzyskamy:

$$w = \frac{a^2}{N\pi} \int_0^{\infty} [a(a-x) \sinh v \cosh ax - v \sinh a(a-x)] \frac{m(a) \cos ay da}{v^2 \sinh^2 v} \quad (9)$$

Nachylenie stycznej do powierzchni ugięcia wyraża równania:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{a}{N\pi} \int_0^{\infty} m(a) \Psi(v) \cos ay da \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} &= -\frac{a}{N\pi} \int_0^{\infty} m(a) \Phi(v) \cos ay da \end{aligned} \right\} \quad (10)$$



Rys. 3.

c) Układ podstawowy przy obciążeniu

$$P(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(a) \cos ay da$$

symetrycznym względem prostej $y=0$.

Płytę traktujemy jako dwie płyty, podzielone przekrojem $x = \xi$. Przy takim ujęciu równania różniczkowe płyty I i II są równaniami jednorodnymi.

Otrzymujemy:

$$\text{dla płyty I: } \Delta \Delta w = 0 \quad (11a)$$

$$\text{dla płyty II: } \Delta \Delta w' = 0 \quad (11b)$$

Jako rozwiązanie równania różniczkowego (11a) przyjmujemy całkę:

$$w = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} (A \sinh \alpha x + B \alpha x \cosh \alpha x) \cos \alpha y \, d\alpha \quad (12a)$$

a jako rozwiązanie równania (11b) całkę:

$$w' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} (A' \sinh \alpha x' + B' \alpha x' \cosh \alpha x') \cos \alpha y \, d\alpha \quad (12b)$$

Funkcję parametru $\alpha: A(\alpha), A'(\alpha), B(\alpha), B'(\alpha)$ wyznaczymy z dwóch warunków geometrycznych w przekroju $x = \xi$:

$$w = w'; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{\partial w'}{\partial x'}$$

i z dwóch warunków statycznych, mianowicie warunku równości momentów zginających M_x w tym przekroju:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}$$

oraz warunku równości obciążenia $P(y)$ różnicy sił tnących na lewo i prawo od przekroju $x = \xi$:

$$-N \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w'}{\partial x'^3} \right) = P(y)$$

Podstawienie do powyższych warunków brzegowych wielkości w, w' z równań 12 a, b daje cztery niejednorodne równania, z których obliczymy:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\rho(\alpha)a}{2Nv \sinh v} \left(\alpha \xi \cosh \alpha \xi' + \sinh \alpha \xi' - v \frac{\sinh \xi}{\sinh v} \right); \\
 B &= -\frac{\rho(\alpha)a}{2Nv \sinh v} \sinh \alpha \xi'; \quad B' = -\frac{\rho(\alpha)a}{2Nv \sinh v} \sinh \alpha \xi \\
 A' &= \frac{\rho(\alpha)a}{2Nv \sinh v} \cdot \left(\alpha \xi' \cosh \alpha \xi + \sinh \alpha \xi - v \frac{\sinh \alpha \xi'}{\sinh v} \right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Nachylenia stycznej do powierzchni odkształcenia płyty określają następujące związki:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{a^2}{N\pi} \int_0^\infty d(\alpha) \Theta^l(\alpha, \xi) \cos \alpha y \, d\alpha \\
 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} &= \frac{a^2}{N\pi} \int_0^\infty d(\alpha) \Theta^p(\alpha, \xi) \cos \alpha y \, d\alpha
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta^l(\alpha, \xi) &= (\alpha \xi \cdot \sinh v \cosh \alpha \xi^1 - v \sinh \alpha \xi) \frac{1}{v^2 \sinh^2 v} \\
 \Theta^p(\alpha, \xi) &= \alpha \xi^1 \sinh v \cosh \alpha \xi - v \sinh \alpha \xi^1 \frac{1}{v^2 \sinh^2 v}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Po tak opracowanym układzie podstawowym przystąpić możemy do ustawienia równań trójczłonowych.

Niech więc w przęśle $(r-1) - r$ działa obciążenie $P_r(y)$; w przęśle $r - (r+1)$ obciążenie $P_{r+1}(y)$, i to w sposób symetryczny względem osi x . Oznaczmy momenty podporowe $M_x(y)$ na podporach $r-1, r, r+1$ przez M_{r-1}, M_r, M_{r+1} .

Warunek ciągłości (2) powierzchni odkształcenia na podporze r daje:

$$\begin{aligned}
 m_{r-1}(\alpha) \Psi_r(\alpha) c_r + m_r(\alpha) [\Phi_r(\alpha) c_r + \Phi_{r+1}(\alpha) c_{r+1}] + m_{r+1}(\alpha) \Psi_{r+1}(\alpha) c_{r+1} + \\
 + a_r c_r p_r(\alpha) \Theta_r^l(\alpha, \xi) + a_{r+1} c_{r+1} p_{r+1}(\alpha) \Theta_{r+1}^l(\alpha, \xi) = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

W powyższym równaniu c_c oznacza stosunek $\frac{a_r \cdot N_0}{a_0 \cdot N_r}$, gdzie N_0 jest dowolną, porównawczą sztywnością na zginanie płyty, a a_0 dowolną, porównawczą rozpiętością płyty.

Ilość równań odpowiada ilości nadliczbowych $m(a)$.

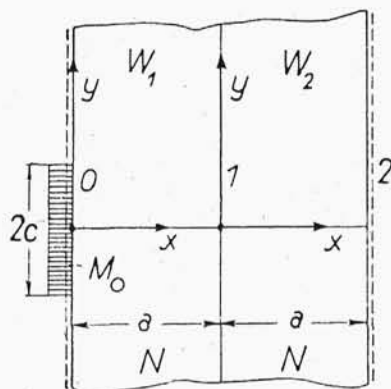
Momenty podporowe otrzymamy ze związku

$$M_r(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m(a) \cos ay \, da$$

Zauważmy wreszcie, że bez trudu rozszerzyć możemy, w wypadku momentu zewnętrznego nad podporą r , równanie trzech momentów na równanie czterech momentów.

Niech kilka prostych przykładów objaśni tok postępowania.

1. Płyta dwuprzęsłowa o jednakowych wielkościach geometrycznych i sprężystych. Na zewnętrznej linii podporowej działa moment M_0 jednostajnie rozłożony na odcinku $2a$. (ryc. 4).



Rys. 4.

$$\text{Tutaj: } M_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m_0(a) \cos ay \, da$$

$$a \, m_0(a) = \int_0^c M_0 \cos \lambda \, d\lambda = M_0 \frac{\sin ac}{a}$$

Ustawiając równanie (16) dla podpory 1 i zważywszy, że $M_2=0$, otrzymamy:

$$m_0(a) \Psi(a) + 2m_1(a) \Phi(a) = 0$$

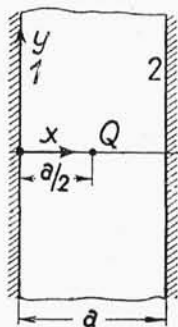
Uzyskamy stąd, korzystając ze związków (8):

$$m_1(a) = -\frac{M_0 a}{2} \cdot \frac{v \cosh v - \sinh v}{\cosh v \sinh v - v} \cdot \frac{\sin ac}{v}$$

$$\text{a dalej: } M_1(y) = -\frac{M_0}{\pi} \int_0^{\infty} m_1(u) \cos ay \, du.$$

Każdej wartości y odpowiada wartość $M_1(y)$ uzyskana z rozwiązania całki niewłaściwej.

2. Płyta obustronnie utwierdzona zupełnie. Obciążenie siłą skupioną Q w środku płyty na osi $y=0$ (rys. 5).



Rys. 5.

$$P(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(a) \cos ay \, da \quad p = \frac{Q}{2}$$

Równanie (16) ustawione dla podpory 1 (przy założeniu $N \rightarrow \infty$ w przęsłach sąsiednich) daje:

$$m_1(u) [\Psi(u) + \Phi(u)] + \frac{Qa}{2} \Theta' \left(u, \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (a)$$

Korzystając ze wzorów (8) i (15), otrzymamy po prostych przekształceniach:

$$m_1(u) = -\frac{Qa}{4} \frac{\sinh v/2}{v + \sinh v} \quad (b)$$

$$\text{Stąd: } M_1(y) = -\frac{Qa}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh v/2}{v + \sinh v} \, dv = M_2(y) \quad (c)$$

Momenty podporowe wywołują w przekroju $x=a/2$ następującą wartość ugięcia płyty:

$$w_M \left(\frac{a}{2}, y \right) = \frac{a^2 Q}{N\pi} \int_0^{\infty} m_1(v) \frac{v/2 \sinh v \cosh v/2 - v \sinh v/2}{v^2 \sinh^2 v} \cos vz \, dv \quad z = y/a$$

W punkcie zaczepienia siły Q znajdziemy:

$$w_M\left(\frac{a}{2}, 0\right) = -\frac{Qa^2}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\tanh^2 v/2}{v(v + \sinh v)} dv$$

Całkowite ugięcie w punkcie zaczepienia siły składa się z ugięcia w_0 w układzie podstawowym oraz z ugięcia spowodowanego momentami podporowymi:

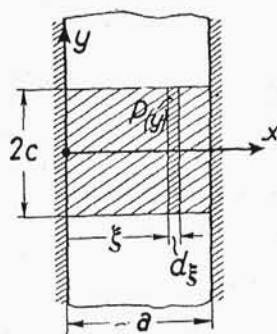
$$w = w_0 + w_M = \frac{Qa^2}{2N\pi^3} \sum_{1,3,\dots} \frac{1}{n^3} - \frac{Qa^2}{8N\pi} \int_0^\infty \frac{\tanh^2 v/2}{v(v + \sinh v)} dv = 0,079 \frac{Qa^2}{Eh^3} \quad ^2)$$

W wypadku obciążenia jednostajnie rozłożonego na prostokącie $2c$ b, równanie (16) wypisane dla podpory 1 przyjmie następującą postać:

$$m_1(\alpha) [\Psi(\alpha) + \Phi(\alpha)] + ap(\alpha) \int_0^a \theta'(\alpha, \xi) d\xi = 0$$

gdzie

$$p(\alpha) = \int_0^c P(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda$$

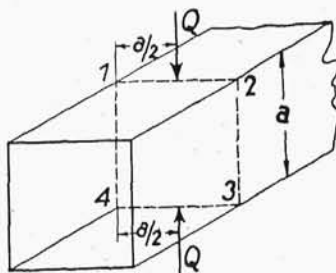


Rys. 6.

3. Układ płytowy zamknięty (rys. 7).

Momenty podporowe $M_1 \dots M_4$ są sobie równe. Ustawiamy równanie (16) dla podpory 1. Otrzymamy:

$$m_1(\alpha) [\Phi(\alpha) + \Psi(\alpha)] 2 + \frac{Qa}{2} \theta'(\alpha, a/2) = 0$$



Rys. 7.

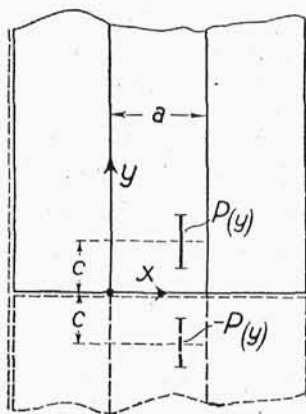
Porównując ostatnie równanie z równaniem (a) przykładu 2, stwierdzamy, że otrzymujemy tu dwukrotnie mniejszą wartość $m(a)$. Ugięcie w punkcie zaczepienia siły wyniesie zatem:

²⁾ Wynik uzyskany przez A. Nádai w wymienionej pod 1) pracy.

$$w(a/2, 0) = \frac{Qa^2}{2N\pi^3} \sum_{1,3..}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \frac{Qa^2}{16N\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tanh^2 v/2}{v(v + \sinh v)} dv = 0,1045 \frac{Qa^2}{Eh^3}$$

4. Płyta ciągła, wzdłuż osi x swobodnie podparta.

Wypadek ten można traktować jako wynik antymetrycznego obciążenia względem osi x . Równanie trzech momentów nie zmieni się w tym wypadku. Powierzchnia ugięcia wyrazi się całką Fouriera:



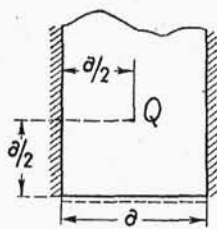
Rys. 8.

$$w = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} [A \cosh \alpha x + B \alpha x \sinh \alpha x + C \sinh \alpha x + D \alpha x \cosh \alpha x] \sin \alpha y d\alpha$$

a moment podporowy całką:

$$M_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m_r(\alpha) \sin \alpha y d\alpha$$

W szczególnym wypadku płyty utwierdzonej zupełnie w krawędziach $x=0$; $x=a$ i obciążonej siłą skupioną Q w punkcie $(a/2, a/2)$ otrzymamy przy



Rys. 9.

$$P(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(\alpha) \sin \alpha y d\alpha \quad p(v) = Q \sin v/2$$

następującą wartość $M_1(y)$:

$$M_1(y) = -\frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh v/2}{v + \sinh v} \sin v/2 \sin vz dz \quad z = y/a$$

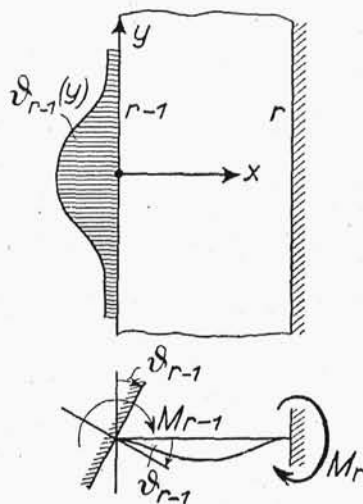
B) W poprzednim ustępie przyjmowaliśmy jako wielkości „nadliczbowe” momenty podporowe M_x . Obszerniejszą jednak klasę układów płytowych nieskończenie długich obejmujemy przyjmując jako wielkości „nadliczbowe” nieznane funkcje ką-

tów węzłowych $\vartheta(y)$. Ilości nieznanych funkcji kątów przeciwstawić możemy tyleż równań warunkowych równowagi wyciętych węzłów. Układem podstawowym do którego opracowania przechodzimy, będzie płyta obustronnie całkowicie utwierdzona.

- a) Obrót ściany, w której płyta jest utwierdzona o kąt:

$$\vartheta_{r-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_{r-1}(\alpha) \cos \alpha y d\alpha$$

$$\varphi_{r-1}(\alpha) = \int_0^{\infty} \vartheta_{r-1}(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda$$



Rys. 10.

Powierzchnię odkształcenia płyty wyrazimy całką (4). Z warunków brzegowych:

$$w|_{x=0} = 0; \quad w|_{x=a} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_{r-1}(\alpha) \cos \alpha y d\alpha; \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \quad (18)$$

wyliczymy funkcje parametru α : A , B , C , D .

Momenty przywęzłowe obliczamy ze związków:

$$M_{r-1} = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m_{r-1}(\alpha) \cos \alpha y d\alpha$$

$$M_r = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m_r(\alpha) \cos \alpha y d\alpha$$

Otrzymamy po prostych przeliczeniach:

$$m_{r-1}(\alpha) = \frac{2N}{a} F(v) \varphi_{r-1}; \quad m_r(\alpha) = \frac{2N}{a} H(v) \varphi_r \quad (19)$$

gdzie:

$$F(v) = v \frac{\cosh v \sinh v - v}{\sinh^2 v - v^2} \quad (20)$$

$$H(v) = v \frac{v \cosh v - \sinh v}{\sinh^2 v - v^2}$$

b) Ściana r obraca się wraz z płytą o kąt

$$\vartheta_r = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi_r(\alpha) \cos \alpha y d\alpha \quad \text{gdzie} \quad \varphi_r(\alpha) = \int_0^\infty \vartheta_r(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda$$

Otrzymamy tu:

$$m_{r-1}(\alpha) = \frac{2N}{a} H(v) \varphi_r, \quad m_r(\alpha) = \frac{2N}{a} F(v) \varphi_r \quad (21)$$

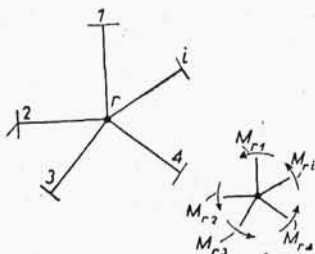
c) Płyta obustronnie zupełnie utwierdzona. Obciążenie $P(y)$ w odległości ξ od podpory $r-1$. Momenty podporowe powstałe wskutek powyższego obciążenia oznaczmy przez M_{r-1}^0 , M_r^0 .

Momenty te otrzymamy z rozwiązania układu dwóch równań (16):

$$m_{r-1}^0(\alpha) \Phi(\alpha) + m_r^0(\alpha) \Psi(\alpha) + \Theta_{r-1}^P(\alpha, \xi) = 0 \quad (22)$$

$$m_{r-1}^0(\alpha) \Psi(\alpha) + m_r^0(\alpha) \Phi(\alpha) + \Theta_r^I(\alpha, \xi) = 0$$

$$M^0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m^0 \cos \alpha y d\alpha$$



Rys. 11.

*

Rozważmy teraz układ płyt nieskończenie długich (rys. 11). Zrównoważenie węzła r prowadzi do równania:

$$\sum M_{ri} = 0 \quad (23)$$

W wielkości M tkwi wpływ obciążenia zewnętrznego $P(y)$, oraz wpływ kątów obrotu węzłów $\vartheta_r(y)$, $\vartheta_l(y)$.

Równanie (25) przyjmijmy przy uwzględnieniu wzorów (21) i (22) następujący kształt:

$$\sum \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[m_{ri}^0 + \frac{2N_{ri}}{a_{ri}} F(v_{ri}) \varphi_{ri} + \frac{2N_{ri}}{a_{ri}} H(v_{ri}) \varphi_{li} \right] \cos ay \, da \right.$$

albo:

$$2\varphi_r \sum \frac{N_{ri}}{a_{ri}} F(v_{ri}) + 2 \sum \frac{N_{ri}}{a_{ri}} H(v_{ri}) \varphi_{ri} + \sum m_{ri}^0 = 0 \quad (24)$$

Znak sumy w ostatnim równaniu rozciąga się na wszystkie płyty zbiegające się w węźle r .

Ilości nieznanymi funkcji φ odpowiada tyleż równań równowagi (24). Z rozwiązania układu równań (24) otrzymamy funkcję $\varphi(v)$, a z równania:

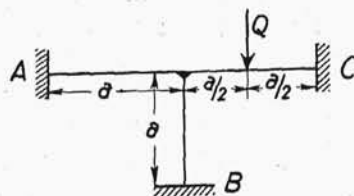
$$M_{ri} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ m_{ri}^0 + \frac{2N_{ri}}{a_{ri}} \left[F(v_{ri}) \varphi_r + H(v_{ri}) \varphi_l \right] \right\} \cos ay \, da \quad (25)$$

momenty przywęzłowe. Znajomość momentów przywęzłowych pozwoli już na wyznaczenie powierzchni ugięcia płyty, a tym samym na określenie wszelkich wielkości statycznych płyty.

Przykład. Dany układ płytowy (rys. 12). Przyjmujemy jednakowe geometryczne i sprężyste wielkości dla każdej płyty zbiegającej się w węźle 1. Niech w środku przęsła 1—C działa siła skupiona Q .

Zrównoważenie węzła (1) daje:

$$3 \cdot \frac{2N}{a} F(v) + m_{1c}^0 = 0$$



Rys. 12.

Wielkość m_{1c}^0 znamy z drugiego przykładu w ustępie A. Wielkość ta wynosi:

$$m_{1c}^0 = -\frac{Qa}{4} \cdot \frac{\sinh v/2}{v + \sinh v}$$

Zatem

$$\varphi_1 = \frac{Qa^2}{24N F(v)} \cdot \frac{\sinh v/2}{v + \sinh v}$$

Z równania (25) znajdziemy:

$$m_{1c} = m_{1c}^0 + \frac{2N}{a} F(v) \varphi_1 = \frac{2}{3} m_{1c}^0$$

Zatem

$$M_{1c} = -\frac{Qa}{3\pi} \int_0^\infty \frac{\sinh v/2}{v + \sinh v} \cos ay \, da$$

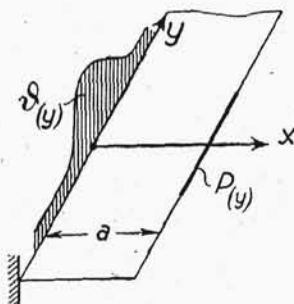
Podobnie

$$M_{A1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{2N}{a} \varphi_1 H(v) \cos ay \, da$$

albo

$$M_{A1} = \frac{Qa}{\pi} \int_0^\infty \frac{H(v) \sinh v/2}{F(v) (v + \sinh v)} \cos ay \, da$$

C) Zastosowanie metody podanej w ustępie B) (znanej w statyce układów ramowych pod nazwą metody odkształceń) pozwoli nam na rozwiązanie w sposób stosunkowo prosty zagadnienia płyty wspornikowej nieskończonej, w krawędzi $x=0$ w sposób sprężysty (np. w płycie ciągłej) utwierdzonej.



Rys. 13.

Niech obciążenie liniowe $P(y)$ działa symetrycznie względem osi x na krawędzi $x=a$. Powierzchnię ugięcia płyty wyrażamy całką (4), zadość czyniąc równaniu różniczkowemu $\Delta \Delta w=0$ i następującym warunkom brzegowym:

$$w \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \alpha y d\alpha \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0; \quad -N \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(\alpha) \cos \alpha y d\alpha \quad ^3)$$

jeśli położyć $A=0 \quad C+D=0$

$$B = \frac{P}{\Delta N \alpha} (\sinh v + \cosh v) - \frac{\varphi \alpha}{\Delta} (3 \cosh v \sinh v + \cosh^2 v - v \sinh^2 v)$$

$$D = -\frac{P}{\Delta N \alpha} (2 \cosh v + v \sinh v) + \frac{\alpha \varphi}{\Delta} (2 - 3 \sinh v) \quad (27)$$

$$\Delta = 3 \cosh^2 v + v^2 + 1$$

W wypadku szczególnym siły skupionej Q w punkcie $(a, 0)$ i przy utwierdzeniu zupełnym płyty w krawędzi $x=0$ otrzymamy przy: $\varphi=0, \quad \frac{Q}{2} = p$

$$M^0 = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m^0(\alpha) \cos \alpha y d\alpha \quad (28)$$

$$m^0(v) = -Q \alpha \frac{\sinh v + v \cosh v}{v(3 \cosh^2 v + v^2 + 1)} \quad ^4)$$

Przy braku siły skupionej, ale przy obrocie płyty w krawędzi $x=0$ o kąt $\vartheta(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \alpha y d\alpha$ otrzymamy:

$$M = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m(\alpha) \cos \alpha y d\alpha$$

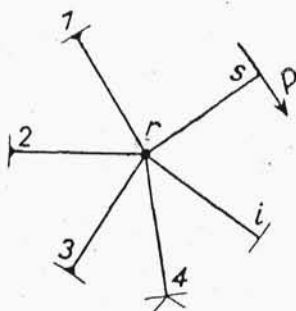
³⁾ W warunku tym położyliśmy $\mu=0$

⁴⁾ Wynik ten uzyskał K. Girkmann: Flächentragwerke, Springer, Wien, 1948, str. 204.

gdzie

$$m(\alpha) = \frac{2N}{a} \varphi(\alpha) \bar{F}(\nu); \quad \bar{F}(\nu) = \nu \frac{3 \cosh \nu \sinh \nu + \nu}{3 \cosh^2 \nu + \nu^2 + 1} \quad (29)$$

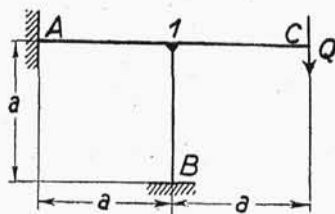
W wypadku zatem układu płytowego z płytą wspornikową $r-s$, zrównoważenie węzła r przyjmie postać:



Rys. 14.

$$2\varphi_r \left[\sum \frac{N_{ri}}{a_{ri}} F(\nu_{ri}) + \frac{N_{rs}}{a_{rs}} \bar{F}(\nu_{rs}) \right] + 2 \sum \frac{N_{ri}}{a_{ri}} \varphi_i H(\nu_{ri}) + \sum m_{ri}^0 + m_{rs}^0 = 0 \quad (30)$$

Równanie (30) zastosujemy do prostego przykładu układu ramowego, składającego się z trzech płyt (rys. 15). Płyta 1—C wspornikowa i obciążona siłą skupioną Q na krawędzi. Przy jednakowych geometrycznych i sprężystych wartościach płyt, otrzymamy z równania (30):



Rys. 15.

$$2\varphi_1 \left[2 \cdot \frac{N}{a} F(\nu) + \frac{N}{a} \bar{F}(\nu) \right] + m_{1c}^0 = 0$$

stąd

$$\varphi_1 = - \frac{a \cdot m_{1c}^0}{2N [2F(\nu) + \bar{F}(\nu)]}$$

Moment podporowy otrzymamy ze związku:

$$M_{1c} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[m_{1c}^0 + \frac{2N}{a} \bar{F}(\nu) \varphi_1 \right] \cos \alpha y d\alpha = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty m_{1c}^0 \frac{F(\nu)}{2F(\nu) + \bar{F}(\nu)} \cos \alpha y d\alpha$$

Tutaj m_{1c}^0 odpowiada wielkości m^0 ze wzoru (28).

R é s u m é

Flexion des plaques continues infiniment longues

Dans le présent mémoire l'auteur a donné la solution exacte du fléchissement d'une plaque continue infiniment longue au moyen de la formule intégrale de Fourier.

La résolution du problème a été réduite aux équations de trois moments dans la méthode des forces et — aux équations de trois angles dans la méthode de déformation.