

ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
CENTRE SCIENTIFIQUE À PARIS

CONFÉRENCES

FASCICULE 80

WITOLD NOWACKI

LES PROBLÈMES DYNAMIQUES D'ÉLASTICITÉ
ASYMÉTRIQUE

1970

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

1. INTRODUCTION

La théorie classique d'élasticité est fondée sur un modèle idéal d'un milieu continu élastique, dans lequel on admet que les réactions mutuelles des éléments situés des deux côtés d'une surface dA infiniment petite, peuvent être définies à l'aide d'un seul vecteur de force \mathbf{p} . En admettant cette hypothèse, on est conduit à des états symétriques de déformation et de contrainte, c'est-à-dire à des états qui sont définis par des tenseurs symétriques de déformation et de contrainte.

Les résultats des applications de la théorie classique d'élasticité basés sur des mesures des constantes de déformation des matériaux de construction tels que diverses sortes d'acier, d'aluminium, de béton, concordent bien, en général, avec les mesures directes des déformations des structures, à condition que les limites d'élasticité du matériel ne soient pas dépassées.

Cependant, dans beaucoup de cas particuliers, on observe une divergence marquée entre la théorie et les observations directes. Ceci concerne en premier lieu les états de contrainte caractérisés par les gradients élevés de contrainte. A titre d'exemple, on peut citer les concentrations des contraintes en proximité des entailles et des fentes.

Les divergences entre la théorie classique d'élasticité et les observations directes sont particulièrement frappantes dans les problèmes dynamiques, comme par ex. dans les cas des oscillations élastiques, caractérisées par des hautes fréquences et des courtes longueurs d'ondes, donc dans des cas des oscillations dues à la génération des ultrasons. Cette divergence résulte de l'influence de la microstructure des corps.

La théorie classique d'élasticité s'avère aussi inopérante dans le cas des oscillations des corps granuleux et multi-cellulaires, comme par ex. les polymères. L'effet de la microstructure devient ici significatif en engendrant la formation des ondes du type nouveau, inconnu en théorie classique d'élasticité. W. Voigt [1] a entrepris la tentative de parer aux insuffisances de cette théorie, en supposant que la transmission des actions réciproques de deux parties du corps situés des deux côtés de l'élément de surface dA , s'opère non seulement par l'intermédiaire du vecteur de force \mathbf{p} , mais aussi par le vecteur du moment \mathbf{m} . Ceci revient à l'assertion que les parois d'un élément parallépipède rectangulaire se trouvent non seulement sous l'effet des contraintes des forces σ_{ji} , mais aussi sous celui des couples μ_{ji} . Les équations

d'équilibre établies pour cet élément montrent que les contraintes σ_{ji} et les couples μ_{ji} sont asymétriques.

C'est aux frères E. et F. Cosserat [2] que revient le mérite d'avoir présenté, en 1909, une théorie complète de l'élasticité asymétrique. Grâce à cette théorie, nonlinéaire dès son départ, notre entendement des phénomènes d'asymétrie fut élargi. Les frères Cosserat ont subordonné à chaque particule un trièdre mobile parfaitement rigide, susceptible de subir au cours de la déformation non seulement un déplacement, mais aussi une rotation. Ainsi, un milieu élastique est formé par des points orientés (milieu polaire), dont les rotations doivent être considérées.

En théorie de l'élasticité des Cosserat la déformation d'un corps est définie à l'aide du vecteur de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et, indépendamment, à l'aide du vecteur de rotation $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$. Cette hypothèse d'un milieu aux éléments matériels à six degrés de liberté, conduisit nécessairement à l'asymétrie des tenseurs de déformation et de contraintes.

L'œuvre des frères Cosserat, apportant des idées nouvelles, n'a pas été appréciée à sa juste valeur du vivant des auteurs; elle passait longtemps inaperçue. Il se peut que ce soit le mode de présentation de cette œuvre, due aux frères Cosserat, qui en soit responsable: c'était, dès ses débuts, une théorie nonlinéaire, dont les notations en coordonnées rectangulaires furent alors difficilement déchiffrables. De plus, les auteurs ont traité dans leur ouvrage des problèmes dépassant de beaucoup le cadre de la théorie d'élasticité, tels les problèmes des milieux quasi-élastiques, de l'« éther » de Mac Cullagh et Kelvin. Ils ont tenté de donner une synthèse des théories de Poincaré et de Lorentz sur la dynamique de l'électron. C'est pourquoi il convient de considérer l'œuvre des frères Cosserat comme une tentative d'élaborer une théorie générale des champs, susceptible d'être appliquée aux problèmes de la mécanique, de l'optique et de l'électro-dynamique, une théorie basée sur le principe général du moindre effort, c'est-à-dire de « l'action euclidienne »

Les Cosserat n'ont pas réussi à dériver les équations constitutives. Ils ont estimé que leur tâche principale consiste à déterminer le terme intégrant — la densité d'action dans le problème variationnel général de Hamilton. « L'action euclidienne », pour tout milieu continu, est, selon eux, représentée par un fonctionnel scalaire aux variables géométriques, cinématiques et cinétiques. Ils ont postulé l'invariance de la densité d'action par rapport au groupe des déplacements euclidiens. Ils ont obtenu un groupe des transformations à sept paramètres. Le postulat de l'invariance est équivalent dans leur conception à l'existence des principes de conservation: de l'énergie mécanique, de l'impulsion et du moment d'impulsion.

Les recherches effectuées au cours des dernières quinze années dans le domaine des théories générales des milieux continus, ont attiré l'attention des chercheurs sur l'œuvre des Cosserat. Nous sommes témoins d'une renaissance de leur théorie.

Les dernières années ont apporté plusieurs études sur l'élasticité asymétrique. L'intérêt des chercheurs a été suscité tout d'abord par la théorie simplifiée des Cosserat, c'est-à-dire par la théorie d'élasticité asymétrique dans les milieux dans les-

quels peuvent apparaître les contraintes asymétriques, la déformation du corps étant définie par le seul vecteur de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Le modèle ainsi simplifié a été déjà étudié par les Cosserat ; ils l'ont appelé « le cas du tiède caché ».

Parmi les travaux sur le pseudo-continuum des Cosserat il faut nommer ceux de C. Truesdell et R. A. Toupin [3, 4], portant sur les théories linéaire et nonlinéaire d'élasticité dans ledit milieu. La théorie du pseudo-continuum des Cosserat a été développée avec succès par G. Grioli [5] et R. D. Mindlin et H. F. Tiersten [6]. Les deux derniers auteurs, en particulier, ont réussi à obtenir des résultats intéressants dans le domaine de la théorie linéaire en introduisant les potentiels et les fonctions des contraintes et en considérant les problèmes de la propagation des ondes élastiques. Par la suite, on s'est appliqué à développer la théorie d'élasticité asymétrique, au sens que lui avaient donné les frères Cosserat. Ici, il nous faut nommer le travail de R. A. Toupin [7], Günther [8], Schäfer [9], Kessel [10], concernant la théorie linéaire d'élasticité asymétrique.

Mentionnons aussi l'intéressante étude portant sur le même problème, due à A. C. Eringen et E. S. Suhubi [11]. Les fondements de la théorie linéaire du milieu général des Cosserat ont été également considérés dans les travaux de E. V. Kuvshinskii et A. L. Aero [12] et de N. A. Palmov [13]. Les problèmes de la thermoélasticité asymétrique ont été traités dans notre étude [14].

Dans le présent rapport nous nous proposons de nous concentrer sur quelques problèmes dynamiques. Nous allons considérer les équations des ondes en appliquant la théorie linéaire du milieu des Cosserat et aussi les problèmes de la propagation des ondes dans l'espace élastique infini.

A la fin de ce rapport nous allons considérer, mais seulement en traits généraux, le problème de la propagation des ondes longitudinales dans des plaques et des barres à sections circulaires, et la propagation des ondes de torsion dans des barres.

II. LE PROBLÈME D'ÉLASTOCINÉTIQUE

Nous allons considérer un domaine régulier de l'espace $V+A$ limité par la surface A , contenant un milieu élastique, homogène et micropolaire, de densité ρ et d'inertie rotative I .

Le milieu est supposé isotrope et, par rapport à son centre, symétrique (centrosymétrique).

Sous l'effet des charges extérieures, ce milieu subit une déformation qui peut être caractérisée par le champ des déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et le champ des rotations $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$. A l'intérieur de ce milieu, les contraintes des forces $\sigma_{ji}(\mathbf{x}, t)$ et celles des couples $\mu_{ji}(\mathbf{x}, t)$ sont liées par les équations constitutives, aux composantes du tenseur de déformation $\gamma_{ji}(\mathbf{x}, t)$ et du tenseur de torsion-courbure $\kappa_{ji}(\mathbf{x}, t)$. Toutes ces grandeurs seront rapportées aux axes rectangulaires des coordonnées.

Le problème d'élastocinétique, dans le cas d'un milieu isotrope, homogène et symétrique par rapport à un point, consiste à déterminer les fonctions $\sigma_{ji}(\mathbf{x}, t)$,

$\mu_{ji}(\mathbf{x}, t)$ et aussi $\gamma_{ji}(\mathbf{x}, t)$, $\kappa_{ji}(\mathbf{x}, t)$ de classe $C^{(1)}$ ainsi que les fonctions $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ de classe $C^{(2)}$ pour $\mathbf{x} \in V+A$ vérifiant :

a) les équations du mouvement

$$\sigma_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i - X_i(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} = I \ddot{\varphi}_i - Y_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0, \quad (2)$$

b) les relations linéarisées entre l'état de contrainte et celui de déformation (les équations de comportement)

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij}, \quad (3)$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \epsilon) \kappa_{ji} + (\gamma - \epsilon) \kappa_{ij} + \beta \kappa_{kk} \delta_{ij}, \quad (4)$$

où

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji} \varphi_k, \quad (5)$$

$$\kappa_{ji} = \varphi_{i,j} \quad \mathbf{x} \in V+A, \quad t > 0, \quad (6)$$

c) les conditions aux limites

$$\sigma_{ji} n_j = p_i(\mathbf{x}, t), \quad \mu_{ji} n_j = m_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in A_\sigma, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$u_i = f_i(\mathbf{x}, t), \quad \varphi_i(\mathbf{x}, t) = g_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in A_u, \quad t > 0, \quad A = A_\sigma + A_u, \quad (8)$$

d) les conditions initiales

$$u_i = k_i(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i = h_i(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\varphi_i = l_i(\mathbf{x}), \quad \dot{\varphi}_i = j_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t = 0. \quad (10)$$

Dans les expressions ci-dessus μ , λ désignent les constantes de Lamé, α , β , γ , ϵ — les autres constantes du matériel. Toutes ces données sont rapportées à des procès adiabatiques. Les fonctions $X_i(\mathbf{x}, t)$ désignent les composantes des forces de masse, tandis que $Y_i(\mathbf{x}, t)$ — les composantes du vecteur des couples de masse. Les grandeurs p_i et m_i désignent réciproquement les composantes des vecteurs des forces et des moments extérieurs sollicitant la surface A . Par les symboles f_i et g_i nous allons désigner, respectivement, les composantes données des vecteurs des déplacements et des rotations. Les grandeurs k_i , h_i , l_i , j_i sont des fonctions données au moment initial; ϵ_{ijk} désigne l'alternateur connu de Levi-Civita.

Les relations entre les composantes des contraintes et des déformations peuvent être obtenues à l'aide des équations

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}}, \quad \mu_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \kappa_{ji}}, \quad (11)$$

où U désigne l'énergie intérieure donnée par la formule

$$U = \frac{\mu + \alpha}{2} \gamma_{ji} \gamma_{ji} + \frac{\mu - \alpha}{2} \gamma_{ji} \gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2} \gamma_{kk} \gamma_{nn} + \frac{\gamma + \epsilon}{2} \kappa_{ji} \kappa_{ji} + \frac{\gamma - \epsilon}{2} \kappa_{ji} \kappa_{ij} + \frac{\beta}{2} \kappa_{kk} \kappa_{nn}. \quad (12)$$

On suppose que les constantes du matériel vérifient les inégalités

$$\begin{aligned} 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad 3\beta + 2\gamma > 0, \quad \gamma > 0, \\ \mu + \alpha > 0, \quad \gamma + \varepsilon > 0, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Les équations différentielles des déplacements forment la base des solutions des problèmes de la propagation des ondes en théorie d'élastocinétique classique. De même, en théorie d'élastocinétique micropolaire les solutions sont basées sur les équations différentielles des déplacements et des rotations.

On peut déduire ces équations en éliminant des équations du mouvement à l'aide des relations constitutives (3) et (4) — les contraintes σ_{ji} , μ_{ji} . En exprimant — conformément à la formule (6) — les déformations γ_{ji} , κ_{ji} par les déplacements u_i et les rotations φ_i , on obtient un système de six équations différentielles. Elles peuvent être écrites en notation vectorielle compacte, comme suit :

$$\square_2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{X} = 0, \quad (14)$$

$$\square_4 \boldsymbol{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} + 2\varepsilon \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{Y} = 0. \quad (15)$$

Dans ces équations on a introduit les opérateurs différentiels suivants

$$\square_2 = (\mu + \alpha) \nabla^2 - \rho \partial_t^2, \quad \square_4 = (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - 4\alpha - I \partial_t^2.$$

Les équations différentielles (14) et (15) doivent être complétées par les conditions aux limites et les conditions initiales. Rappelons que ces conditions ont été données immédiatement par les relations (7)-(10) du problème dynamique.

Les équations (14) et (15) représentent un système complexe des équations hyperboliques associées. En posant dans les équations (14) et (15) $\alpha = 0$ on obtient deux systèmes indépendants des équations

$$\square_2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{X} = 0, \quad (16)$$

$$\square_4 \boldsymbol{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{Y} = 0, \quad (17)$$

où

$$\square_2 = \mu \nabla^2 - \rho \partial_t^2, \quad \square_4 = (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - I \partial_t^2.$$

L'équation (16) équivaut au système des équations des déplacements de la théorie classique d'élasticité.

Les équations (17) réfèrent à un milieu élastique hypothétique les particules dont peuvent subir des rotations sans être déplacées.

Dans les équations (14) et (15), les propriétés de deux milieux sont conjuguées, chaque particule du matériel subissant, à la fois, les déplacements u_i et les rotations φ_i , les grandeurs u_i et φ_i étant des fonctions mutuellement indépendantes.

Faisons subir l'opération de divergence aux équations (14) et (15). Nous obtenons ainsi deux équations de la propagation des ondes

$$\square_1 \gamma_{kk} + \operatorname{div} \mathbf{X} = 0, \quad (18)$$

$$\square_3 \kappa_{kk} + \operatorname{div} \mathbf{Y} = 0. \quad (19)$$

Nous avons ici

$$\gamma_{kk} = \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \varkappa_{kk} = \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi},$$

$$\square_1 = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varrho \partial_t^2, \quad \square_3 = (\beta + 2\gamma) \nabla^2 - 4\alpha - I \partial_t^2.$$

L'équation (18) représente la propagation des ondes des dilatations cubiques — elle est identique à l'équation de la propagation des ondes de la dilatation cubique dans la théorie classique d'élasticité. Ces ondes progressent avec une vitesse constante

$$c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \right)^{1/2}, \text{ elles ne sont pas atténuées et ne subissent pas de dispersion.}$$

En théorie classique d'élasticité une expression correspondant à l'équation (19) n'est pas connue. En théorie du milieu micropolaire cette équation représente la propagation des grandeurs $\varkappa_{kk} = \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}$. Nous allons l'appeler équation des ondes de rotation ou des ondes de torsion. En électrodynamique quantique l'équation du type de (19) est connue sous le nom d'équation différentielle de Klein-Gordon. L'équation (19) représente la propagation des ondes non-atténuées, susceptibles cependant d'être dispersées. La vitesse de phase des ondes monochromatiques dépend de la fréquence des oscillations ω . Soumettons l'opération rotationnelle aux équations (14) et (15). Nous obtenons un système conjugué des équations

$$\square_2 \boldsymbol{\Omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\Xi} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{X}, \quad (20)$$

$$\square_4 \boldsymbol{\Xi} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{Y}, \quad (21)$$

où

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Xi} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}.$$

En procédant par élimination, nous obtenons le système des équations suivantes :

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\Omega} = \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Y} - \frac{1}{2} \square_4 \operatorname{rot} \mathbf{X}, \quad (22)$$

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\Xi} = \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{X} - \frac{1}{2} \square_2 \operatorname{rot} \mathbf{Y}. \quad (23)$$

En posant dans l'équation (20) $\alpha = 0$ on a

$$\square_2 \boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{X}.$$

C'est l'équation connue en théorie d'élasticité classique. Elle représente la propagation de la grandeur $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}$. Les ondes représentées par cette équation ne sont pas atténuées et ne subissent pas de dispersion ; elles progressent avec une vitesse constante, celle des ondes transversales $\hat{c}_2 = \left(\frac{\mu}{\varrho} \right)^{1/2}$.

En posant $\alpha = 0$ dans (21) nous obtenons

$$\square_4 \Xi = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{Y}. \quad (25)$$

L'équation (25) représente la propagation des ondes $\Xi = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}$ dans un milieu hypothétique, où seules les rotations des particules du matériel sont admises. Ces ondes ne sont pas dispersées, elles progressent avec une vitesse constante $c_4 = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{I} \right)^{1/2}$.

Cependant, le système des équations (14) et (15) est difficilement maniable vu que dans les deux équations vectorielles apparaissent les fonctions \mathbf{u} et $\boldsymbol{\varphi}$.

Afin de disjoindre dudit système des équations des ondes plus simples, nous allons suivre la méthode indiquée par Lamé dans la théorie d'élasticité classique.

Cette méthode consiste à décomposer \mathbf{u} et $\boldsymbol{\varphi}$ en deux vecteurs, l'un dérivé d'un potentiel scalaire, l'autre d'un potentiel vecteur. Ainsi, en admettant

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}, & \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi} &= 0, \\ \boldsymbol{\varphi} &= \operatorname{grad} \Gamma + \operatorname{rot} \mathbf{H}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

et en procédant de même avec les expressions décrivant les forces et les moments de masse, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \varrho (\operatorname{grad} \vartheta + \operatorname{rot} \boldsymbol{\chi}), & \operatorname{div} \boldsymbol{\chi} &= 0, \\ \mathbf{Y} &= I (\operatorname{grad} \sigma + \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta}), & \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

et en introduisant, enfin, les relations (26) et (27) dans le système des équations (14) et (15), nous arrivons aux équations suivantes :

$$\square_1 \Phi + \varrho \vartheta = 0, \quad (28)$$

$$\square_3 \Gamma + I \sigma = 0, \quad (29)$$

$$\square_2 \boldsymbol{\Psi} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{H} + \varrho \boldsymbol{\chi} = 0, \quad (30)$$

$$\square_4 \mathbf{H} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} + I \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (31)$$

La première de ces équations, (28), doit être considérée comme une équation de propagation des ondes longitudinales. Cette équation est identique à l'équation connue dans la théorie d'élastocinétique classique. L'équation (29) représente la propagation des ondes de rotation ; sa structure est la même que celle de l'équation décrivant la fonction $\kappa_{kk} = \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}$.

En posant $\alpha = 0$ dans les équations (30) et (31), nous obtenons les équations

$$\square_2 \boldsymbol{\Psi} + \varrho \boldsymbol{\chi} = 0, \quad \square_4 \mathbf{H} + I \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (32)$$

On voit que la première de ces équations est identique à l'équation de propagation des ondes transversales d'élastocinétique classique. L'équation (32)₂ caractérise la propagation des ondes dans un milieu hypothétique où seules les rotations sont admises.

En éliminant des équations (30) et (31), à tour de rôle, la fonction \mathbf{H} et la fonction Ψ , nous arrivons aux équations suivantes :

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \Psi = 2\alpha I \operatorname{rot} \eta - \varrho \square_4 \chi, \quad (33)$$

$$(\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \mathbf{H} = 2\alpha \varrho \operatorname{rot} \chi - I \square_2 \eta. \quad (34)$$

Nous allons appeler l'équation (33) — par analogie avec l'équation (32) — équation des ondes transversales modifiées. L'équation (34) sera dite équation des ondes de torsion modifiées.

Ainsi, nous avons réduit le système des équations (14) et (15) au système des équations plus simples (28), (29), (33) et (34). Nous allons alors démontrer le théorème inverse que nous énoncerons comme suit :

Théorème. Admettons que $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ désignent les solutions particulières du système des équations (14) et (15) dans le domaine V pour $t_1 < t < t_2$. On aura alors les fonctions scalaires Φ , Γ et les fonctions vectorielles Ψ , \mathbf{H} permettant d'exprimer les déplacements et les rotations par les relations

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \Psi, \quad \operatorname{div} \Psi = 0, \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{grad} \Gamma + \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Les fonctions Γ , Φ , Ψ , \mathbf{H} doivent confirmer les équations (28), (29), (33) et (34). Nous avons démontré ce théorème [15]. C'est une extension du théorème démontré par P. Duhem [16] en élastocinétique classique.

III. LA PROPAGATION DES ONDES ÉLASTIQUES DANS L'ESPACE INFINI

Plusieurs travaux ont été consacrés aux problèmes dynamiques dans le pseudo-continuum des Cosserat. Il faut citer avant tout le mémoire de R. D. Mindlin et H. F. Tiersten [6]. Les ondes planes monochromatiques dans le milieu infini micropolaire à six degrés de liberté ont été étudiées par V. A. Palmov [13]. Nous allons donner ci-dessous quelques solutions et remarques concernant la propagation des ondes élastiques dans un milieu micropolaire infini.

Le comportement des ondes longitudinales Φ est bien connu, vu qu'il est le même pour le milieu de Hooke et le milieu micropolaire. La propagation des ondes est définie par le potentiel retardé, les intégrales de Poisson, par le théorème de Kirchhoff et Helmholtz pour le problème tridimensionnel, par le théorème de Volterra, Riess et Weber pour les problèmes bidimensionnels [17], et enfin par le théorème classique d'Alembert pour le mouvement unidimensionnel.

Ajoutons encore que les ondes longitudinales engendrées par la source $\vartheta(\mathbf{x}, t)$ donnent le tenseur symétrique de déformation γ_{ji} et le tenseur symétrique de contrainte σ_{ji} . Il vient

$$u_i = \Phi_i, \quad \gamma_{ji} = \Phi_{ij}, \quad \sigma_{ji} = 2\mu \Phi_{ij} - \lambda \delta_{ij} \Phi_{kk}, \quad \kappa_{ij} = 0, \quad \mu_{ij} = 0. \quad (1)$$

En passant à l'équation

$$\square_3 \Gamma + I \sigma = 0, \quad (2)$$

nous retrouvons les vecteurs symétriques κ_{ji} et μ_{ji} . Etant donné

$$\varphi_i = \Gamma_{,i}, \quad \kappa_{ji} = \Gamma_{,ij}$$

il vient

$$\mu_{ji} = 2\gamma \Gamma_{,ij} + \beta \delta_{ij} \Gamma_{,kk}, \quad \sigma_{ji} = 0. \quad (3)$$

Nous donnons dans la suite quelques solutions concernant l'équation de Klein-Gordon (2). Nous nous bornerons à ne donner que les résultats qui nous semblent nouveaux [18], référant aux problèmes tridimensionnels.

Considérons tout d'abord l'équation non homogène (2), en supposant que les conditions initiales sont homogènes. La solution de cette équation a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi c_3^2} \left\{ \int_V \frac{\sigma(\mathbf{x}, t - R/c_3)}{R(\mathbf{x}, \mathbf{\xi})} dV(\mathbf{x}) + \right. \\ & \left. + \int_V \frac{dV(\mathbf{x})}{R(\mathbf{x}, \mathbf{\xi})} \int_0^t \sigma(\mathbf{x}, t - \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{\xi}, \tau) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

où

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{\xi}, t) = -\frac{R\nu}{c_3} \frac{J_1(\nu \sqrt{t^2 - R^2/c_3^2})}{\sqrt{t^2 - R^2/c_3^2}} H\left(t - \frac{R}{c_3}\right), \quad c_3 = \left(\frac{\beta + 2\gamma}{I}\right)^{1/2}.$$

Le terme $H(z)$ désigne ici la fonction de Heaviside et le symbole R — la distance entre les points \mathbf{x} et $\mathbf{\xi}$. Le terme $J_1(z)$ représente la fonction de Bessel de premier genre et de premier ordre. La solution de l'équation (4) contient deux membres, dont le premier représente le potentiel retardé.

Considérons maintenant l'équation du mouvement ondulatoire (2) homogène en posant les conditions initiales suivantes

$$\Gamma(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \dot{\Gamma}(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}). \quad (5)$$

La solution de l'équation (2) prend la forme

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{x}, t) = & t M_{ct}\{h(\mathbf{x})\} + \frac{\partial}{\partial t} [t M_{ct}\{f(\mathbf{x})\}] + \\ & + \frac{1}{4\pi c_3^2} \int_V \left[h(\mathbf{\xi}) + g(\mathbf{\xi}) \frac{\partial}{\partial t} \right] G(\mathbf{x}, \mathbf{\xi}, t) dV(\mathbf{\xi}). \end{aligned} \quad (6)$$

L'expression

$$M_{ct}\{h(\mathbf{x})\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi h(x_i + n_i c_3 t) \sin \theta d\theta,$$

représente la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction h prises sur la surface d'une sphère du centre \mathbf{x} et d'un rayon $c_3 t$.

Les grandeurs n_i apparaissant dans la dernière intégrale sont des cosinus directeurs du rayon de sphère exprimés en coordonnées sphériques

$$n_1 = \sin \theta \cos \psi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \psi, \quad n_3 = \cos \theta, \\ 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi.$$

La formule (6) représente une généralisation de la formule intégrale de Poisson connue dans la théorie classique du mouvement ondulatoire. Si $\nu = 0$ l'équation (6) ne contient que les deux premières intégrales, ce sont les intégrales de Poisson.

Pour compléter nos remarques, nous allons donner une formule — qui n'est qu'une extension de la formule connue de Kirchhoff — sur l'équation de Klein-Gordon.

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi, t) = & -\frac{1}{4\pi} \int_A \left\{ [\Gamma] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{c_3 R} \frac{\partial R}{\partial n} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right] - \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right] \right\} dA(\mathbf{x}) + \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_A dA(\mathbf{x}) \int_0^t \left\{ \left(G(R, t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial R} \right) \Gamma(\mathbf{x}, t-\tau) + \right. \\ & \left. - \frac{1}{R} G(R, \tau) \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, t-\tau)}{\partial n} \right\} d\tau, \quad \xi \in V, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Gamma(\xi, t) = 0, \quad \xi \in C-V, \quad [\Gamma] = \Gamma\left(\mathbf{x}, t - \frac{R}{c_3}\right).$$

Cette formule donne la valeur de la fonction Γ au point ξ de la région V , exprimée en intégrales de surface contenant la fonction Γ et ses dérivées par rapport au temps et à la normale à la surface A délimitant la région V . En dérivant cette formule, on suppose que la fonction Γ et ses premières et secondes dérivées sont continues dans la région V et sur la surface A . Pour $\alpha = 0$ la formule devient la formule classique de Kirchhoff.

Pour les oscillations monochromatiques, nous obtenons l'extension de la formule de Helmholtz sur l'équation de Klein-Gordon

$$\begin{aligned} \Gamma^*(\xi) = & \frac{1}{4\pi} \int_A \left(\frac{\partial \Gamma^*}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \Gamma^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right) dA(\mathbf{x}), \quad \xi \in V, \\ \Gamma^*(\xi) = & 0, \quad \xi \in C-V, \end{aligned} \quad (8)$$

Nous avons ici

$$\Gamma(\xi, t) = \Gamma^*(\xi) e^{-i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{c_3} \left(1 - \frac{\nu^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad \nu^2 = \frac{4\alpha}{I}.$$

L'équation (8) correspond à une réalité physique uniquement lorsque $\nu^2 > \frac{4\alpha}{I}$. C'est alors seulement que la vitesse de phase est réelle.

La dépendance de la vitesse de phase $c = \frac{\omega}{k}$ de la fréquence ω indique que nous sommes en présence de la dispersion de l'onde de rotation. Si $\nu \rightarrow 0$ l'équation (8) prend la forme de l'équation classique du mouvement ondulatoire, donnée par Helmholtz.

Les équations (33) et (34) (voir le chapitre précédent) sont les moins étudiées. On n'a discuté que les équations unidimensionnelles du mouvement ondulatoire et aussi les solutions fondamentales de ces équations que nous allons donner plus loin.

IV. LES SOLUTIONS FONDAMENTALES DES ÉQUATIONS ÉLASTOCINÉTIQUES

Nous désignerons comme fondamentales les solutions des équations différentielles dépendant de la distance R entre les points \mathbf{x} et ξ dans un milieu élastique infini. Dans la suite nous allons donner les formules générales permettant de déterminer les déplacements et les rotations au point \mathbf{x} du milieu infini, engendrés par les couples et les forces de masse. On dérive lesdites formules par la transformation quadruple intégrale de Fourier, performée sur les équations du mouvement ondulatoire. En établissant la connexion entre les potentiels élastiques $\Phi, \Gamma, \Psi, \mathbf{H}$ et les déplacements \mathbf{u} et rotations $\boldsymbol{\varphi}$, nous obtenons finalement les expressions suivantes

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{W_4} \left\{ \frac{\xi_j \xi_k \tilde{X}_k}{\rho c_1^2 \xi^2 (\xi^2 - \tau_1^2)} - \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\xi^2 + \nu^2 - \tau_4^2}{c_2^2 \rho \xi^2} (\xi_j \xi_k \tilde{X}_k - \xi^2 \tilde{X}_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{is}{Ic_4^2} \epsilon_{jkl} \xi_k \tilde{Y}_l \right] \right\} \exp[-i(x_k \xi_k + \eta t)] dW, \quad (1)$$

$$\varphi_j(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{W_4} \left\{ \frac{\xi_j \xi_k \tilde{Y}_k}{Ic_4^2 \xi^2 / \xi^2 + \tau_0^2 - \tau_3^2} - \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\xi^2 - \tau_1^2}{Ic_4^2 \xi^2} (\xi_j \xi_k \tilde{Y}_k - \xi^2 \tilde{Y}_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{ip}{\rho c_2^2} \epsilon_{jkl} \xi_k \tilde{X}_l \right] \right\} \exp[-i(x_k \xi_k + \eta t)] dW. \quad (2)$$

Dans ces formules

$$dW = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\eta$$

W_4 — désigne l'intérieur de l'espace $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \eta$.

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad s = \frac{2\alpha}{\mu + \alpha}, \quad p = \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon}, \quad \tau = \eta/c_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

$$\tau_0^2 = \frac{4\alpha}{\beta + 2\gamma}, \quad \nu_0^2 = \frac{4\alpha}{Ic_4^2}, \quad \eta_0^2 = \frac{4\alpha^2}{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}, \quad \Delta = (\xi^2 - \lambda_1^2)(\xi^2 - \lambda_2^2),$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [\tau_2^2 + \tau_4^2 + \eta_0^2 - \nu_0^2 \pm \sqrt{(\tau_4^2 - \tau_2^2 - \eta_0^2 + \nu_0^2)^2 + 4ps\tau_2^2}],$$

$$c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{\mu + \alpha}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_3 = \left(\frac{\beta + 2\mu}{I} \right)^{1/2}, \quad c_4 = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{I} \right)^{1/2}.$$

Malgré la complexité de ces expressions entraînant la nécessité de l'intégration multiple par région infinie, nous obtenons assez facilement les expressions pour



les déplacements et rotations, engendrés par l'action des forces et moments concentrés, variant harmoniquement avec le temps.

Supposons que la force concentrée $X_j = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{ji} e^{-i\omega t}$ est appliquée au point $\boldsymbol{\xi}$ et dirigée parallèlement à l'axe x_i . Les déplacements $u_j = U_j^{(l)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ et les rotations $\varphi_j = \Phi_j^{(l)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ peuvent alors être exprimés par les formules

$$U_j^{(l)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\rho\omega^2} (F\delta_{jk} + \partial_j \partial_k K), \quad (3)$$

$$\Phi_j^{(l)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\rho c_2^2(k_1^2 - k_2^2)} \epsilon_{ljk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{e^{ik_1 R} - e^{ik_2 R}}{R} \right), \quad (4)$$

$j, k, l = 1, 2, 3$

dans lesquelles on a introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} F &= A_1 k_1^2 \frac{e^{ik_1 R}}{R} + A_2 k_2^2 \frac{e^{ik_2 R}}{R}, \\ K &= A_1 \frac{e^{ik_1 R}}{R} + A_2 \frac{e^{ik_2 R}}{R} + A_3 \frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}, \\ A_1 &= \frac{\sigma_2^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}, \quad A_2 = \frac{\sigma_2^2 - k_1^2}{k_2^2 - k_1^2}, \quad A_3 = -1, \\ k_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} [\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \eta_0^2 - \nu_0^2 \pm \sqrt{(\sigma_2^2 - \sigma_2^2 - \eta_0^2 + \nu_0^2)^2 + 4ps\sigma_2^2}], \quad \sigma_j = \frac{\omega}{c_j}, \\ j &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Si nous appliquons au point $\boldsymbol{\xi}$ le moment concentré $Y_j = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{ji} e^{-i\omega t}$ agissant parallèlement à l'axe x_i , alors, en désignant les déplacements par $\hat{U}_j^{(l)}$ et les rotations par $\hat{\Phi}_j^{(l)}$, nous obtenons

$$\hat{U}_j^{(l)} = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi I c_4^2 (k_1^2 - k_2^2)} \epsilon_{ljk} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{e^{ik_1 R} - e^{ik_2 R}}{R} \right), \quad (5)$$

$$\hat{\Phi}_j^{(l)} = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi I c_4^2} [L\delta_{ji} + \partial_j \partial_i N], \quad j, k, l = 1, 2, 3 \quad (6)$$

avec

$$\begin{aligned} L &= C_1 k_1^2 \frac{e^{ik_1 R}}{R} + C_2 k_2^2 \frac{e^{ik_2 R}}{R}, \\ N &= C_1 \frac{e^{ik_1 R}}{R} + C_2 \frac{e^{ik_2 R}}{R} + C_3 \frac{e^{ik_3 R}}{R}, \\ C_1 &= \frac{k_1^2 - \sigma_2^2}{k_1^2 (k_1^2 - k_2^2)}, \quad C_2 = \frac{k_2^2 - \sigma_2^2}{k_1^2 (k_2^2 - k_1^2)}, \quad C_3 = -\frac{\sigma_2^2}{k_1^2 k_2^2}, \\ k_3 &= \frac{1}{c_3} (\omega^2 - \gamma^2)^{1/2}, \quad \gamma^2 = \frac{4\alpha}{I}. \end{aligned}$$

Étudions maintenant le cas particulier, où $\alpha = 0$. Nous obtenons les formules connues des solutions fondamentales d'élastocinétique classique

$$\hat{U}_j^{(l)} = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\varrho} \left\{ \frac{1}{c_2^2} \frac{e^{i\beta_0 R}}{R} - \frac{1}{\omega^2} \partial_j \partial_l \left(\frac{e^{i\sigma_1 R} - e^{i\beta_0 R}}{R} \right) \right\}, \quad (7)$$

$$\hat{\Phi}_j^{(l)} = 0. \quad (8)$$

Nous avons ici $\beta_0 = \frac{\omega}{\hat{c}_2}$, $\sigma_1 = \frac{\omega}{c_1}$, le symbole $\hat{c}_2 = \left(\frac{\mu}{\varrho} \right)^{1/2}$ désignant la vitesse de propagation de l'onde longitudinale dans le milieu de Hooke. En posant $\alpha = 0$ on arrive, en vertu des formules (5) et (6), aux expressions suivantes

$$\hat{U}_j^{(l)} = 0, \quad (9)$$

$$\hat{\Phi}_j^{(l)} = \left[\frac{1}{4\pi(\gamma + \varepsilon)} \frac{e^{i\sigma_4 R}}{R} \delta_{jl} - \frac{1}{4\pi I \omega^2} \partial_j \partial_l \left(\frac{e^{i\sigma_3 R} - e^{i\sigma_4 R}}{R} \right) \right] e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

avec $\sigma_3 = \frac{\omega}{c_3}$.

Les rotations $\hat{\Phi}_j^{(l)}$ réfèrent à un milieu hypothétique, où les rotations seules sont possibles.

Revenons encore une fois aux solutions fondamentales (3) ÷ (6).

Si la force concentrée est dirigée parallèlement à l'axe x_l , alors, en vertu de la formule (4), il vient $\Phi_l^{(l)} = 0$. Donc, les grandeurs $\varkappa_{jl} (l = 1, 2, 3)$ sont égales à zéro.

Si le moment concentré agit parallèlement à l'axe x_l , alors $\hat{U}_l^{(l)} = 0$. Donc, les grandeurs γ_{ll} (pas de sommation par l !) sont égales à zéro.

En supposant l'action de la force concentrée, nous obtenons pour chaque valeur de l un vecteur de déplacement $\mathbf{U}^{(l)}$ et un vecteur de rotation $\Phi^{(l)}$.

En posant successivement $l = 1, 2, 3$, nous obtenons neuf composantes du tenseur de déplacement $U_j^{(l)}$ et neuf composantes du tenseur de rotation $\Phi_j^{(l)}$. Parallèlement, pour le moment concentré, nous obtenons le tenseur de déplacement $\hat{U}_j^{(l)}$ et de rotation $\hat{\Phi}_j^{(l)}$. Cette constatation élargit visiblement nos vues sur les déformations par rapport à celles qui se rattachent à l'élastocinétique classique où seul apparaît le tenseur de déplacement $\hat{U}_j^{(l)}$ donné par l'équation (7).

Pour les tenseurs de déplacement et de rotation $U_j^{(l)}$, $\Phi_j^{(l)}$, ... les relations suivantes restent valables

$$U_j^{(l)}(\xi, \mathbf{x}, t) = U_j^{(j)}(\mathbf{x}, \xi, t),$$

$$\Phi_j^{(l)}(\xi, \mathbf{x}, t) = \Phi_j^{(j)}(\mathbf{x}, \xi, t),$$

$$\hat{U}_j^{(l)}(\xi, \mathbf{x}, t) = \hat{\Phi}_j^{(j)}(\mathbf{x}, \xi, t).$$

Elles sont la conséquence de la structure des expressions (3) ÷ (6) et du théorème de réciprocité (14).

En connaissant déjà les solutions fondamentales pour une force et un moment concentré, on peut passer à la recherche des singularités d'ordre supérieur. De la solution connue se rattachant à une force concentrée, on peut déduire les solutions se rattachant à une force double sans moment, à une force double avec un moment et à un centre de compression.

De même, de la solution connue se rattachant à un moment concentré, on peut déduire la solution pour le cas d'un moment double et d'un centre de torsion (fig. 1 et 2).

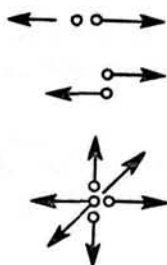


FIG. 1

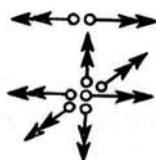


FIG. 2

Citons quelques résultats. Dans le cas d'un centre de compression on trouve

$$u_j = \frac{1}{4\pi\rho} \partial_j \left(\frac{e^{-i\omega(t - \frac{R}{c_1})}}{R} \right),$$

$$\varphi_j = 0.$$

C'est une solution identique à la solution du problème analogue en théorie classique d'élastocinétique.

Si le centre de torsion se trouve à l'origine des coordonnées, on a

$$u_j = 0$$

$$\varphi_j = \frac{1}{4\pi I k_3^2 c_3^2} \partial_j \left(\frac{e^{-i\omega t + i k_3 R}}{R} \right),$$

où

$$k_3 = \frac{1}{c_3} (\omega^2 - \nu^2)^{1/2}, \quad \nu^2 = \frac{4\alpha}{I},$$

donc, dans ce cas, le mouvement ondulatoire est dispersé.

Supposons qu'à l'origine des coordonnées le milieu est sollicité par deux paires des forces avec un moment — ainsi que le montre la fig. 3.

En réduisant deux paires de forces avec un moment on obtient, pour le déplacement u_j , l'expression

$$u_j = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\rho\omega^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_2}, -\frac{\partial F}{\partial \xi_1}, 0 \right),$$

$$F = A_1 k_1^2 \frac{e^{i k_1 R}}{R} + A_2 k_2^2 \frac{e^{i k_2 R}}{R}.$$

Pour obtenir une solution qui donnerait l'effet du moment concentré $Y_j = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{j3} e^{-i\omega t}$ on peut recourir à la formule (5) et poser $l = 3$. On voit que les deux formules ne donnent pas les mêmes résultats. C'est que dans la théorie du milieu micropolaire on ne peut pas substituer les doublets (avec le moment) des forces concentrées à l'action du moment concentré. Dans cette théorie, le moment concentré est une sollicitation analogue à une force concentrée.

Les solutions fondamentales obtenues pour le milieu infini peuvent servir à construire des solutions pour les régions limitées. Nous allons appliquer des formules analogues à celles de Somigliana, déduites en élastocinétique classique.

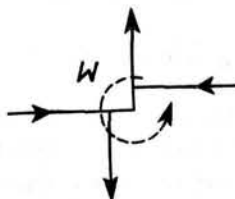


FIG 3.

V. PROPAGATION DES ONDES DANS LES MILIEUX LIMITÉS

Les équations trouvées dans les chapitres précédents, donnent la possibilité de déduire des solutions référant à la propagation des ondes dans des milieux limités. Dans ce qui suit nous allons considérer deux problèmes, d'ailleurs les plus simples. Le premier concerne la propagation de l'onde longitudinale, monochromatique dans une plaque infinie [19], l'autre touche la propagation de l'onde longitudinale [20] et de l'onde de torsion dans une barre infinie à section circulaire [21].

Le premier est un problème bidimensionnel. L'onde étudiée progresse avec une vitesse de phase constante $c = \frac{\omega}{k}$ dans la direction x_2 . On suppose que les causes et les effets ne dépendent pas de la variable x_3 .

L'étude de ce problème conduit à un système de six équations différentielles contenant deux groupes indépendants d'équations.

Le premier groupe contient les équations :

$$\begin{aligned} [(\mu + \alpha) \nabla_1^2 - \rho \partial_t^2] u_1 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 e + 2\alpha \partial_2 \varphi_3 &= 0, \\ [(\mu + \alpha) \nabla_1^2 - \rho \partial_t^2] u_2 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_2 e - 2\alpha \partial_1 \varphi_3 &= 0, \\ [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha - I \partial_t^2] \varphi_3 + 2\alpha (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

dans lesquelles

$$\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2.$$

Les vecteurs de déplacement $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ et de rotation $\boldsymbol{\varphi} \equiv (0, 0, \varphi_3)$ apparaissant dans l'équation (1) se trouvent liés aux contraintes σ_{ji} et μ_{ji}

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Le second groupe contient les équations

$$\begin{aligned} [(\gamma + \varepsilon)\nabla_1^2 - 4\alpha - I\partial_t^2]\varphi_1 + (\beta + \gamma - \varepsilon)\partial_1\kappa + 2\alpha\partial_2u_3 &= 0, \\ [(\gamma + \varepsilon)\nabla_1^2 - 4\alpha - I\partial_t^2]\varphi_2 + (\beta + \gamma - \varepsilon)\partial_2\kappa - 2\alpha\partial_1u_3 &= 0, \\ [(\mu + \alpha)\nabla_1^2 - \rho\partial_t^2]u_3 + 2\alpha(\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

dans lesquelles

$$\kappa = \partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2.$$

Les contraintes σ_{ji} et μ_{ji}

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

sont liées aux vecteurs des déplacements $\mathbf{u} \equiv (0, 0, u_3)$ et de rotations $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, 0)$.

Nous commençons par l'examen du premier des deux groupes d'équations que nous venons d'écrire. Considérons une plaque élastique infinie d'épaisseur $2h$. Une onde longitudinale monochromatique progresse dans cette plaque avec une vitesse de phase constante $c = \frac{\omega}{k}$, conformément à la direction de l'axe x_2 . On suppose que les bords de la plaque ne sont pas chargés. Ainsi, pour $x_1 = \pm h$ on a

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \mu_{13} = 0. \quad (5)$$

En introduisant les potentiels élastiques Φ, Ψ liés avec les déplacements u_1, u_2 par les relations

$$u_1 = \partial_1\Phi - \partial_2\Psi, \quad u_2 = \partial_2\Phi + \partial_1\Psi, \quad \varphi_3 = \varphi, \quad (6)$$

nous réduisons le système des équations (1) aux trois équations

$$\begin{aligned} \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_1^2} \partial_t^2 \right) \Phi &= 0, \\ \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2 \right) \Psi - 2s\varphi &= 0, \\ \left(\nabla^2 - \frac{v^2}{c_3^2} - \frac{1}{c_3^2} \partial_t^2 \right) \varphi + p\nabla_1^2\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

En tenant compte des conditions aux limites et en posant

$$(\Phi, \Psi, \varphi) = (\Phi^*(x_1), \Psi^*(x_1), \varphi^*(x_1)) e^{-i\omega t}$$

nous obtenons la solution des équations (7) qui nous donne deux équations transcendentes, l'une pour la forme symétrique des oscillations, et l'autre pour la forme asymétrique. Dans le premier cas nous obtenons l'équation caractéristique suivante

$$\frac{\operatorname{tgh}(\delta h)}{\operatorname{tgh}(\lambda_1 h)} = \frac{(2\mu + \lambda)\delta^2 - k^2\lambda}{4\mu^2 k^2 \lambda_1 \delta (\kappa_2 - \kappa_1)} \left(a_1 \kappa_2 - a_2 \kappa_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\operatorname{tgh}(\lambda_2 h)}{\operatorname{tgh}(\lambda_1 h)} \right) \quad (8)$$

où

$$a_j = \mu(k^2 + \lambda_j^2) + \alpha(\lambda_j - k^2) - 2\alpha\kappa_j,$$

$$\kappa_j = \frac{1}{s} (\sigma_j^2 - k^2 - \lambda_j^2), \quad j = 1, 2, \quad \delta = (k^2 - \sigma_1^2)^{1/2}$$

$$\lambda_{1,2}^2 = k^2 - \frac{1}{2} [\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \eta_0^2 - \nu_0^2 \mp \sqrt{(\sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \eta_0^2 - \nu_0^2)^2 + 4\sigma_2^2(\nu_0^2 - \sigma_4^2)}].$$

Dans l'expression (8) les grandeurs δ , λ_1 , λ_2 sont des fonctions du paramètre $k = \omega/c$, le symbole c désignant la vitesse de phase cherchée. L'équation (8) nous donne la possibilité de déterminer successivement les valeurs des racines k et les formes correspondantes des oscillations.

En posant dans l'équation (8) $\alpha = 0$ — ce qui correspond à l'élastocinétique classique — nous obtenons l'équation connue de Lamb

$$\frac{\operatorname{tgh}(kh \sqrt{1 - c^2/c_1^2})}{\operatorname{tgh}(kh \sqrt{1 - c^2/\hat{c}_2^2})} = \frac{(2 - c^2/\hat{c}_2^2)^2}{4 \sqrt{(1 - c^2/c_1^2)(1 - c^2/\hat{c}_2^2)}}, \quad (9)$$

$$\hat{c}_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Considérons maintenant deux cas particuliers. Supposons tout d'abord que la longueur de l'onde est insignifiante par rapport à l'épaisseur de la plaque $2h$. Dans ce cas, les grandeurs δh , $\lambda_1 h$, $\lambda_2 h$ sont considérables et, par conséquent, nous pouvons supposer le rapport des tangentes comme étant égal à l'unité. Il vient alors [22]

$$\kappa_2 \lambda_2 a_1 - a_2 \lambda_1 \kappa_1 = \frac{4\mu^2 k^2 \lambda_1 \lambda_2 \delta}{(2\mu + \lambda)\delta^2 - k^2 \lambda} (\kappa_2 - \kappa_1). \quad (10)$$

C'est l'équation caractéristique pour les ondes de surface dans le demi-espace. Pour $\alpha = 0$ l'équation (10) devient l'équation de Rayleigh

$$(2 - c^2/\hat{c}_2^2)^2 = 4 \sqrt{(1 - c^2/c_1^2)(1 - c^2/\hat{c}_2^2)}. \quad (11)$$

Si la longueur de l'onde est considérable par rapport à l'épaisseur $2h$ de la plaque, les grandeurs δh , $\lambda_1 h$, $\lambda_2 h$ sont insignifiantes et les tangentes hyperboliques dans (8) peuvent être remplacées par leurs arguments. Dans ce cas on a

$$4\mu^2 k^2 \delta^2 (\kappa_2 - \kappa_1) = [(2\mu + \lambda)\delta^2 - k^2 \lambda] (a_1 \kappa_2 - a_2 \kappa_1). \quad (12)$$

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire en passant à l'élastocinétique classique — nous obtenons la formule connue définissant la vitesse de phase

$$c = \frac{2\hat{c}_2}{c_1} (c_1^2 - \hat{c}_2^2)^{1/2}.$$

Etudions encore la forme antisymétrique des oscillations par rapport au plan $x_1 = 0$. Dans ce cas nous obtenons une équation transcendante

$$\left(\frac{a_1 \kappa_2 \lambda_2}{\operatorname{tgh}(\lambda_1 h)} - \frac{a_2 \kappa_1 \lambda_1}{\operatorname{tgh}(\lambda_2 h)} \right) \operatorname{tgh}(\delta h) = \frac{4\mu^2 k^2 \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 (\kappa_2 - \kappa_1)}{(2\mu + \lambda) \delta^2 - k^2 \lambda}. \quad (13)$$

Considérons les deux cas extrêmes.

Pour les longueurs des ondes insignifiantes par rapport à l'épaisseur $2h$ de la plaque, nous obtenons encore l'équation (10) c'est-à-dire l'équation des ondes de surface de Rayleigh.

Si la longueur de l'onde par rapport à l'épaisseur de la plaque est considérable, alors, en développant les tangentes hyperboliques en série et en ne retenant que les deux premiers termes, nous avons l'équation transcendante

$$\left(1 - \frac{\delta^2 h^2}{3} \right) \left[\frac{a_1 \kappa_2}{\lambda_1^2 \left(1 - \frac{\lambda_2^2 h^2}{3} \right)} - \frac{a_2 \kappa_1}{\lambda_2^2 \left(1 - \frac{\lambda_1^2 h^2}{3} \right)} \right] = \frac{4\mu^2 k^2 (\kappa_2 - \kappa_1)}{(2\mu + \lambda) \delta^2 - k^2 \lambda} \quad (14)$$

dont nous pouvons déterminer la vitesse de phase $c = \frac{\omega}{k}$ de l'onde de flexion. Pour $\alpha = 0$ l'équation (12) prend la forme connue en élastocinétique classique

$$c^2 = \frac{4}{3} (kh)^2 \hat{c}_2^2 \left(1 - \frac{\hat{c}_2^2}{c_1^2} \right). \quad (15)$$

Passons ensuite au système des équations (3). Du point de vue d'élastocinétique classique c'est un système nouveau. Il représente la propagation de l'onde transversale monochromatique $u_3 = u_3^*(x_1) e^{i(kx_2 - \omega t)}$ suivant la direction x_2 . Cette onde est accompagnée des rotations φ_1 et φ_2 . Les ondes dudit type, nommées ondes de Love — ne sont connues que dans le demi-espace élastique stratifié. Elles ne peuvent intervenir que dans les cas, où certaines inégalités pour les constantes du matériel de ces couches sont satisfaites.

Dans un milieu micropolaire, les ondes de ce type peuvent apparaître aussi bien dans le demi-espace que dans la couche élastique. En introduisant dans les équations (3) les relations

$$\varphi_1 = \partial_1 \Gamma - \partial_2 H, \quad \varphi_2 = \partial_2 \Gamma + \partial_1 H, \quad (16)$$

nous obtenons un système de trois équations pour les fonctions Γ , H , u_3 :

$$\begin{aligned} \left(\nabla_1^2 - \frac{\nu^2}{c_3^2} - \frac{1}{c_3^2} \partial_t^2 \right) \Gamma &= 0, & \left(\nabla_1^2 - 2p - \frac{1}{c_4^2} \partial_t^2 \right) H - 2p u_3 &= 0, \\ \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2 \right) u_3 + 2s \nabla_1^2 H &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

La solution des équations (17) obtenue en posant

$$(\Gamma, H, u_3) = (\Gamma^*(x_1), H^*(x_1), u_3^*(x_1)) e^{i(kx_2 - \omega t)}$$

sera introduite dans la formule représentant les conditions aux limites. Elles s'écrivent comme suit

$$\mu_{11} = 0, \quad \mu_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{pour} \quad x_1 = \pm h. \quad (18)$$

Pour les oscillations symétriques nous obtenons l'équation transcendante suivante

$$\frac{\operatorname{tgh}(\sigma h)}{\operatorname{tgh}(\lambda_1 h)} = \frac{4\gamma\alpha k^2 \left(e_2 \lambda_1 \frac{\operatorname{tgh}(\lambda_2 h)}{\operatorname{tgh}(\lambda_1 h)} - e_1 \lambda_2 \right) + [(2\gamma + \beta)\sigma^2 - \beta k^2] \left(e_1 d_2 - e_2 d_1 \frac{\operatorname{tgh}(\lambda_2 h)}{\operatorname{tgh}(\lambda_1 h)} \right)}{4k^2 \gamma^2 \sigma (\lambda_1 d_2 - d_1 \lambda_2)} \quad (19)$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} e_j &= \gamma(\lambda_j^2 + k^2) + \varepsilon(\lambda_j^2 - k^2), \quad d_j = (\mu + \alpha)\lambda_j \varrho_j + 2\alpha\lambda_j, \\ \varrho_j &= \frac{s(k^2 - \lambda_j^2)}{\lambda_j^2 - k^2 + \sigma_j^2}, \quad j = 1, 2, \quad \sigma = (k^2 + \kappa_0^2 - \sigma_3^2)^{1/2}, \quad \kappa_0^2 = \frac{4\alpha}{\beta + 2\gamma}. \end{aligned}$$

Cette équation détermine les valeurs successives du paramètre $k = \frac{\omega}{c}$, ainsi que les vitesses de phase et les formes des oscillations correspondantes.

Pour les longueurs des ondes insignifiantes par rapport à l'épaisseur de la plaque $2h$, nous obtenons l'équation

$$4k^2 \gamma \sigma (\lambda_1 d_1 - d_2 \lambda_2) = 4\alpha \gamma k^2 (e_2 d_1 - e_1 d_2) + [(2\gamma + \beta)\sigma^2 - \beta^2 k^2] (e_1 d_2 - e_2 d_1) \quad (20)$$

qui nous permet de déterminer la vitesse de phase de l'onde de surface. Dans le demi-espace micropolaire peuvent aussi progresser, à côté des ondes du type de Rayleigh, des ondes du type de Love $u_3 = u_3^*(x_1) e^{i(kx_2 - \omega t)}$, accompagnées par les ondes de torsion modifiées φ_1, φ_2 .

Nous allons ensuite donner une brève ébauche de la voie à suivre en vue de déterminer les vitesses de phase $c = \frac{\omega}{k}$ pour les ondes longitudinales et les ondes de torsion dans une barre infinie à section circulaire. Dans ce but, considérons un système des équations différentielles notées en déplacement \mathbf{u} et en rotations $\boldsymbol{\varphi}$. En écrivant ces équations dans le système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) et en supposant que les causes et les effets ne dépendent pas tous de l'angle θ , nous obtenons deux systèmes d'équations indépendants l'un de l'autre.

Le premier contient les équations

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_r + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial e}{\partial r} - 2\alpha \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial z} &= \varrho \ddot{u}_r, \\ (\mu + \alpha) \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{2\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \varphi_\theta) &= \varrho \ddot{u}_z, \end{aligned} \quad (21)$$

$$(\gamma + \varepsilon) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \varphi_\theta - 4\alpha \varphi_\theta + 2\alpha \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = I \ddot{\varphi}_\theta,$$

dans lesquelles

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad c = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

L'état des contraintes des forces σ_{ji} et celui des contraintes des moments μ_{ji} se trouvent subordonnés au champ des déplacements $\mathbf{u} \equiv (u_r, 0, u_z)$ et au champ des rotations $\boldsymbol{\varphi} \equiv (0, \varphi_\theta, 0)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_{r\theta} & 0 \\ \mu_{\theta r} & 0 & \mu_{\theta z} \\ 0 & \mu_{z\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Le second système des équations, indépendant du système (21), comprend les déplacements $\mathbf{u} \equiv (0, u_\theta, 0)$ et les rotations $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_r, 0, \varphi_z)$:

$$\begin{aligned} (\gamma + \varepsilon) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \varphi_r - 4\alpha \varphi_r + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \kappa}{\partial r} - 2\alpha \frac{\partial u_\theta}{\partial z} &= I \ddot{\varphi}_r, \\ (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \varphi_z - 4\alpha \varphi_z + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \kappa}{\partial z} + \frac{2\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) &= I \ddot{\varphi}_z, \\ (\mu + \alpha) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_\theta + 2\alpha \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} \right) &= \varrho \ddot{u}_\theta, \end{aligned} \quad (23)$$

ou

$$\kappa = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varphi_r) + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}.$$

Les contraintes σ_{ji} et les moments μ_{ji}

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{\theta r} & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{zr} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{rr} & 0 & \mu_{rz} \\ 0 & \mu_{\theta\theta} & 0 \\ \mu_{zr} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (24)$$

sont subordonnés au vecteur de déplacement $\mathbf{u} \equiv (0, u_\theta, 0)$ et au vecteur de rotations $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_r, 0, \varphi_z)$.

Considérons le cas de l'onde longitudinale monochromatique, progressant le long de l'axe z de la barre avec une vitesse de phase constante c . En introduisant les potentiels élastiques Φ , Ψ liés aux déplacements par les relations

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right), \quad \varphi_\theta = -\frac{\partial \Lambda}{\partial r},$$

nous arrivons au système suivant d'équations

$$\square_1 \Phi = 0, \quad (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) (\Psi, \Lambda) = 0. \quad (25)$$

La première de ces équations représente l'onde longitudinale, la seconde — les ondes transversales modifiées.

En posant

$$(\Phi, \Psi, \Lambda) = (\Phi^*(r), \Psi^*(r), \Lambda^*(r)) e^{i(kz - \omega t)} \quad (26)$$

et en tenant compte des conditions aux limites stipulant que la surface du cylindre est libre des charges

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \mu_{r\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a, \quad (27)$$

on obtient un système de trois équations linéaires homogènes. En égalisant au zéro leur déterminant, nous obtenons l'équation caractéristique. Nous renonçons à écrire cette équation en forme développée : elle est extrêmement complexe, elle se prête donc difficilement à la discussion sous sa forme générale. Cependant, en supposant que la longueur de l'onde est considérable par rapport au rayon du cylindre, nous pouvons développer les fonctions de Bessel apparaissant dans l'équation générale en série infinie et ne prendre en considération que les deux premiers termes de ce développement. Nous obtenons ainsi, en première approximation, la valeur de la vitesse de phase suivante

$$c = \left\{ \frac{4 \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_4^2} \right) - 2\beta_3 \frac{1}{c_1^2} - \beta_3 \left(2\beta_1 \frac{1}{c_1^2} + \beta_2 \frac{1}{c_2^2} \right) + 4 \frac{\eta_0^2}{c_2^2 \beta_3 k^2}}{4 \frac{1}{c_1^2} \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_4^2} \right) + \left(2\beta_1 \frac{1}{c_1^2} + \beta_2 \frac{1}{c_2^2} \right) \left[2 \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_4^2} \right) + 4 \frac{2}{\beta_3 c_2^2} - 2 \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{c_1^2 c_2^2} \right]} \right\}^{1/2} \quad (28)$$

ou

$$\beta_1 = 1 + \frac{\lambda}{\mu}, \quad \beta_2 = 1 + \frac{\alpha}{\mu}, \quad \beta_3 = \frac{\nu^2 - \eta_0^2}{k^2}.$$

Pour $\alpha \rightarrow 0$, c'est-à-dire dans le cas d'élastocinétique classique, on dérive de (28)

la formule connue de Pochhammer [23] : $c = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2}$. Si la longueur de l'onde est insignifiante par rapport au rayon a du cylindre circulaire, la transition asymptotique accomplie, on déduit de l'équation générale transcendante l'équation caractéristique des ondes de surface du type de Rayleigh dans le demi espace élastique.

Passons alors au cas des ondes de torsion progressant dans une barre infinie à section circulaire. L'onde monochromatique de torsion progresse le long de l'axe du cylindre avec une vitesse de phase constante $c = \omega/k$. En substituant

$$\varphi_r = \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}, \quad \varphi_z = \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right), \quad u_\theta = -\frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad (29)$$

on obtient, en vertu de (23), un système de trois équations d'onde

$$\square_3 \Gamma = 0, \quad (\square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) (\Psi, \Omega) = 0. \quad (30)$$

La première de ces équations représente les ondes de rotation, tandis que les deux autres — les ondes transversales modifiées.

En posant

$$(\Gamma, \Psi, \Omega) = (\Gamma^*(r), \Psi^*(r), \Omega^*(r)) e^{i(kz - \omega t)} \quad (31)$$

et en tenant compte des conditions aux limites

$$\mu_{rr} = 0, \quad \mu_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a$$

on obtient l'équation transcendante en termes des fonctions de Bessel $J_0(\eta)$ et $J_1(\eta)$. Nous pouvons donc déterminer les valeurs successives des vitesses de phase et les formes correspondantes des oscillations. Pour $\alpha \rightarrow 0$, on obtient l'équation caractéristique connue pour les ondes de torsion dans le cadre d'élastocinétique classique

$$\xi J_0(\xi) = 2J_1(\xi), \quad \xi = a \sqrt{\frac{\omega^2}{\hat{c}_2^2} - k^2}. \quad (32)$$

Les solutions que nous venons de présenter, n'ont été discutées que sommairement du point de vue quantitatif. Les valeurs des constantes du matériel $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ restent inconnues. Nous ne connaissons que leur ordre de grandeur. Par conséquent, nous ne pouvons nous servir dans les calculs que des valeurs approximatives.

Au cours de cette conférence nous avons exposé quelques problèmes — d'ailleurs les plus simples — de la propagation des ondes monochromatiques dans les milieux des Cosserat. En procédant de manière tout à fait analogue, on peut résoudre — en recourant aux équations générales de la propagation des ondes (voir § 2, éqs. (28) ÷ (31)) — des problèmes plus complexes, comme par ex. celui de la propagation des ondes évoquées par les charges mobiles et celui de la propagation des ondes monochromatiques dans des milieux stratifiés.

Remarquons que la recherche des solutions fondamentales des problèmes des oscillations apériodiques est d'une grande importance. On n'a obtenu jusqu'ici que quelques solutions de ces problèmes, par ex. la solution générale de la propagation des ondes rotatives, donnée plus haut. Quant au problème fondamental, à savoir celui de la recherche des solutions singulières du problème dynamique pour des forces et des instantanés et concentrés, les résultats obtenus jusqu'ici s'appliquent uniquement aux intervalles des temps très brefs ou bien très longs.

Ainsi, il reste encore à résoudre un grand nombre de problèmes particuliers. Cependant, les rapides progrès des recherches dans ce domaine permettent d'espérer que nous aurons, au cours des prochaines années, une élastocinétique complète des milieux des Cosserat, formant un nouveau domaine de l'élastocinétique classique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. VOIGT, *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle*, Abh. Ges. Wissen. Göttingen, 34 (1887).
- [2] E. et F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*, A. Hermann, Paris 1909.
- [3] C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The classical field theories. Encyclopedia of Physics*, 3 No. 1, Springer Vlg., Berlin 1960.

- [4] R. A. TOUPIN, *Elastic materials with couple stresses*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **11** (1962).
- [5] G. GRIOLI, *Elasticità asimetrica*, Ann. di Mat. pura ed appl., Sér. IV, **50** (1950).
- [6] R. D. MINDLIN, H. F. TIERSTEN, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **11** (1962), 385.
- [7] R. A. TOUPIN, *Theories of elasticity with couple-stresses*, *ibid.*, **17** (1964), 85.
- [8] W. GÜNTHER, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges., **10** (1958), 195.
- [9] H. SCHAEFER, *Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuum*, Misz. Angew. Math. Festschrift Tollmien, Berlin 1962, Akademie Verlag.
- [10] S. KESSEL, *Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Continuum*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges., **16** (1964), 1.
- [11] A. C. ERINGEN, E. S. SUHUBI, *Non-linear theory of microelastic solids*, Int. J. Eng. Sci. **2** (1964), 189, 389.
- [12] E. V. KUVŠINSKII, A. L. AERO, *La théorie d'élasticité asymétrique* [en russe], Fiz. Tviord. Tiela, **5** (1963), 2591.
- [13] N. A. PALMOV, *Les équations fondamentales d'élasticité asymétrique* [en russe], Prikl. Mat. Mech., **28** (1964), 401.
- [14] W. NOWACKI, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., **14** (1966), 505.
- [15] W. NOWACKI, *On the completeness of potentials in micropolar elasticity*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969), 1.
- [16] P. DUHÉMY, *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch*, J. Mat. Pures et Appl., **6** (1900), 215.
- [17] B. B. BAKER, E. T. COPSON, *The mathematical theory of Huygen's principle*, Oxford, Clarendon Press, 1939.
- [18] W. NOWACKI, *Propagation of rotation waves in asymmetric elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., **16** (1968), 10.
- [19] W. NOWACKI, W. K. NOWACKI, *Propagation of monochromatic waves on an infinite micropolar elastic plate*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., **17** (1969), 29.
- [20] W. NOWACKI, W. K. NOWACKI, *Propagation of elastic waves in a micropolar cylinder. I.*, *ibid.*, **17** (1969), 39.
- [21] W. NOWACKI, W. K. NOWACKI, *Propagation of elastic waves in a micropolar cylinder. II.*, *ibid.*, **17** (1969), 49.
- [22] S. KALISKI, J. KAPELEWSKI, C. RYMARZ, *Surface waves on an optical branch in a continuum with rotational degrees of freedom*, Proc. Vibr. Problems, **9** (1968), 107.
- [23] L. POCHHAMMER, *J. rein. und angew. Math.*, **81** (1876), 324.

TABLE DES MATIÈRES

I. Introduction	3
II. Le problème d'élastocinétique	5
III. La propagation des ondes élastiques dans l'espace infini	10
IV. Les solutions fondamentales des équations élastocinétiques	13
V. Propagation des ondes dans les milieux limités	17
Bibliographie	24

