POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK
TOM X · ZESZYT 3

WARSZAWA 1962
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

WITOLD NOWACKI

KIERUNKI ROZWOJU TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXIX

TOM X · ZESZYT 3 · ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Wstęp

W ostatnich latach obserwujemy wielki rozwój termosprężystości. Rozwój ten wynika z zapotrzebowania techniki i podsycany jest głównie rozwojem technik lotniczej i rakietowej, postępem w dziedzinie maszyn i inżynierii chemicznej, zwłaszcza jądrowej.

W pierwszym dziesięcioleciu po drugiej wojnie światowej rozwijano głównie klasyczną teorię naprężeń cieplnych w odniesieniu do nieustalonych przebiegów cieplnych. U podstaw teorii naprężeń cieplnych stoją założenia klasycznej teorii sprężystości oraz założenia niezmienności stałych materiałowych, ich niezależności od temperatury.

Powyższe założenia zwężają oczywiście przydatność rozwiązań do określonych przedziałów temperatury.

W ostatnich latach na plan pierwszy wysuwają się zagadnienia sprzężenia pola temperatury z polem deformacji, dalej zagadnienia naprężeń cieplnych w ciałach anizotropowych i niejednorodnych.

Pierwsze z poruszonych zagadnień ma głównie charakter poznawczy. Zagadnienie naprężeń cieplnych w ciałach anizotropowych nabiera już poważniejszego znaczenia praktycznego ze względu na coraz szersze stosowanie materiałów o strukturze anizotropowej, makroskopowej do budowy maszyn i konstrukcji lotniczych.

Coraz szerzej rozwijają się badania naprężeń cieplnych ustalonych przy podwyższonych temperaturach. W tym przypadku temperatura wywołuje niejednorodność materiału. Współczynniki materiałowe stają się funkcjami temperatury, a tym samym przy ustalonym przepływie funkcjami miejsca.

W poniższym opracowaniu nie poruszamy zagadnienia naprężeń cieplnych w ciałach geometrycznie nieliniowych.

Niniejszy artykuł przeglądowy ma za zadanie przedstawić osiągnięcia uzyskane w kilku wyżej wymienionych kierunkach i tam, gdzie to autorowi wydaje się możliwe, uwypuklić narastające tendencje rozwojowe badań.

2. Sprzężenie pola temperatury i pola deformacji

Pole temperatury w ciele stałym związane jest z deformacją tego ciała. Zmiana ilości ciepła w elemencie objętościowym wywołuje stan odkształcenia i naprężenia; odwrotnie, pole odkształceń wywołane czynnikami mechanicznymi powoduje powstanie w ciele pola temperatury. Część energii mechanicznej, wywołana odkształceniami ciała, zmienia się w ciepło; mamy do czynienia z termosprężystą dysypacją energii w ciele stałym. Sprzężenie pola temperatury i pola deformacji zezwala na ściślejsze ujęcie zagadnień elastokinetyki; umożliwia wyznaczenie pola temperatury wywołanego obciążeniami zmiennymi w czasie.

Sprzężenie to postulowane było już przez J. DUHAMELA, [1], a rozszerzone równanie przewodnictwa cieplnego, uwzględniające wyraz deformacyjny, wyprowadzone zostało przez W. VOIGTA, [2], oraz H. JEFFREYSA, [3], a ostatnio na bazie termodynamiki procesów nieodwracalnych przez M. A. BIOTA, [4]. Bardziej szczegółowe i ogólne wyprowadzenie równania przewodnictwa cieplnego znajdą czytelnicy w pracach K. ZOLLERA, [5], i H. PARKUSA, [6]. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania uogólnionego równania przewodnictwa cieplnego podał J. H. WEINER, [7].

Zlinearyzowane równanie przewodnictwa cieplnego przy założeniu, że wzrost temperatury w stosunku do stanu naturalnego jest niewielki, ma postać

$$T_{,kk}-\frac{1}{\varkappa}\dot{T}-\eta\dot{\varepsilon}_{kk}=-\frac{Q}{\varkappa}. \tag{2.1}$$

W powyższym wzorze $T=T^*-T_0$, przy czym T^* jest temperaturą bezwzględną, a stan $T=0$ przyjęty jest za stan początkowy, w którym w ciele nie ma ani naprężeń, ani odkształceń. Inne symbole mają następujące znaczenie: $\varkappa=\bar{\lambda}/c\varrho$ (gdzie $\bar{\lambda}$ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, c ciepłem właściwym, a ϱ gęstością); $Q=W/\varrho c$ (gdzie W jest ilością ciepła wytworzoną w elemencie jednostkowym objętościowym i w jednostce czasu); $\eta=\gamma T_0/\bar{\lambda}$ (gdzie $\gamma=(3\lambda+2\mu)\,\alpha_t=3K\alpha_t$, przy czym K jest modułem ściśliwości, a α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej); wreszcie ε_{kk} jest dylatacją, a $\dot{T}=\partial_t T$, $\dot{\varepsilon}_{kk}=\partial_t\varepsilon_{kk}$ (gdzie $\partial_t=\partial/\partial t$).

Dołączając do równania (2.1) równania przemieszczeniowe teorii sprężystości

$$\mu u_{i,kk}+(\lambda+\mu)\,u_{k,ki}+F_i-\gamma T_{,i}=\varrho\ddot{u}_i,\qquad i=1,2,3, \tag{2.2}$$

mamy komplet równań sprzężonego pola mechano-termicznego. W równaniach (2.2) **u** jest wektorem przemieszczenia, **F** wektorem sił masowych, a μ, λ stałymi izotermicznymi Lamégo.

Przedstawmy równanie (2.1) i (2.2) w postaci wektorowej

$$\Delta^2 T-\frac{1}{\varkappa}\dot{T}-\eta\,\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}}=-\frac{Q}{\varkappa}, \tag{2.3}$$

$$\mu\Delta^2\,\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mathbf{F}-\gamma\operatorname{grad}T=\varrho\ddot{\mathbf{u}} \tag{2.4}$$

i wykonajmy dekompozycję przemieszczenia i siły masowej na część potencjalną i wirową:

$$\mathbf{u}=\operatorname{grad}\Phi+\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi},\qquad \mathbf{F}=\varrho\,(\operatorname{grad}\vartheta+\operatorname{rot}\boldsymbol{\chi}). \tag{2.5}$$

Podstawiając (2.5) do (2.3) i (2.4) otrzymamy po eliminacji temperatury następujący układ równań:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)\Phi - \bar{\varepsilon}\partial_t\nabla^2\Phi = -\frac{mQ}{\varkappa} - \frac{1}{c_1^2}\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\vartheta, \tag{2.6}$$

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c_2^2}\ddot{\psi} = -\frac{1}{c_2^2}\chi, \quad \bar{\varepsilon} = m\eta. \tag{2.7}$$

Tutaj $c_1^2 = (\lambda+2\mu)/\varrho$, $c_2^2 = \mu/\varrho$, gdzie c_1 jest prędkością rozprzestrzeniania się fali sprężystej podłużnej, a c_2 fali poprzecznej. Temperatura T związana jest z funkcją Φ zależnością

$$T = \frac{1}{m}\left(\Delta^2 - \frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)\Phi + \frac{\vartheta}{mc_1^2}. \tag{2.8}$$

Z równań (2.6) i (2.7) wnioskujemy, że przy $\chi = 0$ wystąpią w przestrzeni sprężystej jedynie fale podłużne. Jeśli natomiast brak źródeł ciepła oraz części potencjalnej sił masowych ($Q=0$ i $\vartheta=0$), to w przestrzeni nieograniczonej powstaną jedynie fale poprzeczne nie wywołujące jednak [ze względu na (2.8), w którym $\vartheta = 0$, $\Phi = 0$] sprzężonego z polem deformacji pola temperatury. W ciele sprężystym ograniczonym powstaną oczywiście tak fale podłużne jak i poprzeczne.

Przedstawiona tu droga przekształcania układu równań (2.3) i (2.4) na układy prostych równań drogą dekompozycji wektora przemieszczenia i sił masowych nie jest drogą jedyną. I tak np. S. Kaliski, [8], podał układ funkcji przemieszczeniowych rozwiązujących układ (2.3) i (2.4) i stanowiących rozszerzenie funkcji Galerkina na zagadnienie termosprężystości. Analogicznie J. S. Podstrigacz, [9], rozszerzył funkcję Papkowicza-Neubera na rozpatrywane tu zagadnienie. W. Nowacki, [10], podał drogę rozwiązania płaskich dynamicznych zagadnień termosprężystości przy użyciu trzech funkcji, które dla zagadnienia statycznego sprowadzają się do jednej funkcji, funkcji Airy'ego.

W przypadku wolnych zmian temperatury i sił masowych w czasie pominąć można w równaniach (2.4) wyrazy inercyjne i traktować zagadnienie jako quasistatyczne. W przypadku ciała nieograniczonego przy założeniu, że $u_i = \Phi_{,i}$, równania (2.3) i (2.4) redukują się do dwu

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa}\dot{T} - \eta\nabla^2\dot{\Phi} = \frac{Q}{\varkappa}, \tag{2.9}$$

$$\nabla^2\Phi = mT. \tag{2.10}$$

Eliminując z powyższych równań funkcję Φ otrzymamy

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa_1}\dot{T} = -\frac{Q}{\varkappa}, \quad \frac{1}{\varkappa_1} = \frac{1}{\varkappa} + \bar{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

Otrzymaliśmy tu dla temperatury równanie o takiej samej budowie jak dla zagadnienia niesprzężonego. Zamiast wielkości $\varkappa$ mamy tu $\varkappa_1 = \varkappa/(1+\varepsilon\varkappa)$. Spostrzeżenie to zostało podane przez H. ZORSKIEGO, [11].

Dotychczas rozwiązano stosunkowo mało problemów tak płaskich jak i przestrzennych. Wynika to z wielkich trudności natury matematycznej zagadnienia. Omówimy je po kolei, grupując odpowiednio.

H. DERESIEWICZ, [12], oraz P. CHADWICK i I. N. SNEDDON zajęli się rozchodzeniem fal harmonicznych płaskich, [13], w przestrzeni nieograniczonej. W zagadnieniu tym prędkość fazowa c fali płaskiej dana jest za pomocą wzoru

(2.12)
$$c = \frac{\omega}{\operatorname{Im}(k)},$$

a współczynnik rozproszenia ϑ

(2.13)
$$\vartheta = \operatorname{Re}(k),$$

gdzie ω jest częstotliwością drgań harmonicznych.

Wielkość k spełniać powinna równanie

(2.14)
$$k^4 + k^2 [\sigma^2 - q(1+\varepsilon)] - \sigma^2 q = 0,$$

gdzie

$$q = \frac{i\omega}{\varkappa}, \qquad \sigma^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \qquad \varepsilon = \eta\varkappa m.$$

Pierwiastkami równania (2.14) są liczby $\pm k_1$, $\pm k_2$, gdzie

(2.15)
$$k_{1,2}^2 = \frac{c_1^2}{2\varkappa^2}[-\lambda^2 + i\lambda(1+\varepsilon) \pm \Delta], \qquad \Delta = \{\lambda^2[\lambda^2-(1+\varepsilon)^2] + 2i\lambda^3(1-\varepsilon)\}^{1/2}.$$

Symbol $\lambda = \omega/\omega^*$ oznacza wielkość bezwymiarową, a $\omega^* = c_1^2/\varkappa$ jest wielkością charakterystyczną dla ośrodka termosprężystego. Pierwiastek k_1 odpowiada fali dyfuzyjnej cieplnej, k_2 fali sprężystej.

Z dyskusji pierwiastków równań (2.15) wynika, że współczynnik rozproszenia ϑ jest funkcją rosnącą częstotliwości ω, zmieniającą się jak ω^2 przy niskich częstotliwościach i dążąca asymptotycznie do wartości $\vartheta_\infty = (\varepsilon/2)(\omega^*/c_1)$, gdy $\omega \to \infty$. Dla niskich częstotliwości $c \approx (1+\varepsilon/2)c_1$, dla wysokich $(\lambda \gg 1)$ $c \approx c_1$. Dla $\lambda \to 1$ $(\omega \to \omega^*)$ wielkość ϑ i c ulegają nader szybkim zmianom. Częstotliwość ω w występujących w przyrodzie drganiach mechanicznych jest ograniczona od góry częstotliwością ω_c wynikającą z widma Debeya, [14], przy czym $\omega_c = 2\pi c_1(3\varrho/4\pi M)^{1/3}$, gdzie M jest masą atomu materiału tworzącego ośrodek. Dla wszystkich metali $\omega^* < \omega_c$ Wielkość ω^* jest znacznie większa od częstotliwości otrzymanych eksperymentalnie przy stosowaniu drgań ultradźwiękowych.

Zagadnienie propagacji naprężeń termicznych w prętach metalowych, wywołanych bądź wzbudzeniem termicznym, bądź mechanicznym, zostało rozpatrzone przez I. A. SNEDDONA, [15]. Podał on również rozwiązanie przybliżone, oparte na metodzie perturbacji. Inną drogę rozwiązania dla pręta półnieskończonego, dogodną w przypadku jednorodnych warunków brzegowych ale niejednorodnych warunków początkowych, podał J. IGNACZAK, [16].

Zagadnieniem propagacji fal powierzchniowych Rayleigha w ośrodku termosprężystym przy swobodnej wymianie cieplnej w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą zajął się F. J. LOCKETT, [17], zagadnieniem propagacji fal termosprężystych harmonicznych w warstwie sprężystej zajmowali się W. NOWACKI i M. SOKOŁOWSKI, [18].

Fale harmoniczne podłużne rozprzestrzeniające się w walcach pełnych i wydrążonych przy uwzględnieniu efektów termosprężystych stały się przedmiotem pracy F. J. LOCKETTA, [19]. J. IGNACZAK i W. NOWACKI, [20] i [21], zajęli się zagadnieniem drgań wymuszonych periodycznych w walcach o przekroju prostokątnym, wywołanych ich ogrzaniem oraz drganiami wymuszonymi płyt średniej grubości.

Działanie źródeł ciepła w przestrzeni nieograniczonej termosprężystej stało się przedmiotem szeregu prac. I tak np. H. ZORSKI, [22], zajął się zagadnieniem działania chwilowego i skupionego źródła ciepła, stosując dla tego zagadnienia cechującego się symetrią sferyczną transformację Laplace'a. G. EASON i I. N. SNEDDON, [23], oraz F. J. LOCKETT i I. N. SNEDDON, [24], podali ogólne rozwiązanie zagadnienia propagacji naprężeń przy założeniu dowolnego rozkładu źródeł ciepła tak w przestrzeni jak i w czasie. Zastosowano tu technikę Fouriera, poczwórną transformację wykładniczą.

W. NOWACKI, [25]. przedstawił szereg rozwiązań w postaci skończonej dla harmonicznie zmieniających się w czasie źródeł ciepła.

Zagadnienie propagacji naprężeń w półprzestrzeni termosprężystej, ogrzanej na powierzchni lub pobudzonej do drgań siłami mechanicznymi, ma już obszerną literaturę. Tak więc zagadnienie nierównomiernego ogrzania płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń termosprężystą i przy użyciu techniki transformacji wykładniczej Fouriera zostało omówione w wymienionej wyżej pracy [1] G. EASONA i I. N. SNEDDONA, [23]. Rozszerzone na półprzestrzeń termosprężystą zagadnienie Lamba, tak osiowo symetryczne jak i płaskie, zostało opracowane przez W. NOWACKIEGO, [25]. Dodać jednak należy, że uzyskane tu ogólne rozwiązania mają w dużej mierze charakter rozwiązań formalnych; na tym etapie nie udało się nawet dla najprostszych przypadków uzyskać wyników w postaci zamkniętej przy użyciu znanych funkcji; przeważnie wyniki przedstawiono w postaci całek niewłaściwych.

Zanotować tu należy kilka prac odnoszących się do przybliżonego rozwiązania zagadnienia półprzestrzeni termosprężystej. Tak więc LESSEN, [26]. oraz HETNARSKI, [27], podali rozwiązanie rozszerzonego na ośrodek lepko-sprężysty problemu

[1] W pracy tej rozwiązanie składa się z dwu części, z całki szczególnej i rozwiązania ogólnego tak dobranego, aby na brzegu półprzestrzeni spełnione zostały wszelkie warunki brzegowe. O ile całka szczególna dotyczy ośrodka termosprężystego, to rozwiązanie ogólne odnosi się do ośrodka sprężystego ($\varepsilon = 0$). Pełne rozwiązanie znajdzie czytelnik w pracy [30].

W. I. DANIŁOWSKIEJ, [28], dla małych wartości czasu t. Interesujące jest również rozwiązanie G. PARII, [29], dotyczące ogrzania płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń sprężystą do temperatury $T = T_0 H(t)$, gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a. Rozwiązanie PARII odnosi się do zagadnienia osiowo-symetrycznego przy małych wartościach czasu t.

Zanotujmy jeszcze analogiczne rozwiązanie odnoszące się do małych wartości t, uzyskane przez NARIBOLIEGO, [31], dla przypadku przestrzeni termosprężystej z pustką. Brzeg pustki ogrzany jest tu do temperatury $T_0 H(t)$. Interesujące w tej pracy jest zastosowanie metody perturbacyjnej.

Zagadnienie osiowo symetryczne, odnoszące się do koncentracji naprężeń, wywołanych płaskim przepływem ciepła (przepływ ten zmienia się w sposób harmoniczny w czasie) wokół pustki walcowej i kulistej, stało się przedmiotem pracy J. IGNACZAKA i W. NOWACKIEGO, [32]. Zagadnienie działania sił skupionych oraz centrum ściskania w przestrzeni nieograniczonej zostało rozwiązane przez W. NOWACKIEGO, [25].

Jak z powyższego przeglądu prac wynika, rozwiązane zostały dotąd zagadnienia najprostsze. Rozwiązania w postaci zamkniętej uzyskano jedynie dla nielicznych przypadków szczególnych, jednowymiarowych i to przy założeniu harmonicznej w czasie zmienności temperatury czy też sił.

Wydaje się, że jednym z kierunków dalszych badań, będzie dążenie do uzyskania rozwiązań dla dowolnej zmienności w czasie obciążeń i temperatury. Ze względu na złożoność matematyczną zagadnienia poszukiwania pójdą w kierunku rozwiązań przybliżonych. Ponieważ uwzględnienie sprzężenia termosprężystego nieznacznie tylko wpływa na zmianę naprężeń, stosować się będzie z powodzeniem metodę perturbacji. Metoda ta okaże się szczególnie dogodna dla zagadnień quasi-statycznych.

Dalszą rysującą się drogą, to uzyskanie ogólnych metod całkowania układu równań różniczkowych (2.3) i (2.4), przekształcanie ich na układ równań całkowych, przedstawienie rozwiązań tych równań w postaci całkowej analogicznej do przedstawienia całkowego Kirchhoffa i Poissona dla zagadnienia sprężystego, [33]. Dodać należy, że usiłowania w tym kierunku zainicjowane były już w 1910 r. przez A. ROSENBLATTA, [34], przy założeniu jednak dość ograniczających warunków brzegowych.

Nietknięte zostały zagadnienia jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych termosprężystości.

Zapewne jedną z dróg rozwojowych będzie rozszerzenie omawianych tu zagadnień na ciała termosprężyste anizotropowe i termo-lepkosprężyste.

Zaczątki tego drugiego kierunku obserwujemy w pracy HUNTERA, [35]. Przedstawiony w tym ustępie kierunek badań ma głównie charakter poznawczy. Dla celów praktycznych, dla określenia naprężeń cieplnych występujących w konstrukcjach maszynowych i budowlanych, sprzężenie pola temperatury i pola odkształceń można pominąć.

O ile teoria naprężeń cieplnych w ciałach jednorodnych anizotropowych ma już za sobą bogatą literaturę naukową, to zagadnienia naprężeń cieplnych w ciałach anizotropowych rozpatrywane były jedynie sporadycznie. Wynika to nie tylko z większej matematycznej złożoności zagadnienia, ale również wypływa z nielicznych dotąd praktycznych zastosowań. Obecnie coraz więcej występują w zastosowaniach technicznych materiały o strukturze makroskopowo-anizotropowej (płyty, tarcze i powłoki, rury grubościenne itp.), cechujące się różnymi własnościami sprężystymi i termicznymi w wyróżnionych kierunkach. Podamy pokrótce związki ogólne oraz przegląd rozwiązanych dotąd zagadnień.

W ciele o ogólnej anizotropii prostoliniowej równanie przewodnictwa cieplnego (przy pominięciu sprzężenia pola deformacji i temperatury) ma postać, [36],

$$\lambda_{ij} T_{,ij} - \varrho c\dot{T} = -W, \quad i,j = 1,2,3. \tag{3.1}$$

Wielkości $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ są współczynnikami przewodnictwa cieplnego. Związki między składowymi stanu odkształcenia, stanu odkształcenia i temperaturą (uogólnione prawo Hooke'a-Duhamela) dane są za pomocą wzorów, [37],

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl} + \alpha_{ij} T, \quad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{3.2}$$

przy czym liczba 81 współczynników a_{ijkl} redukuje się ze względu na własność symetrii

$$a_{ijkl} = a_{ijlk} = a_{jikl} \tag{3.3}$$

do 36. Współczynniki te jednak nie określają bezpośrednio stałych materiałowych, gdyż ich wartości zmieniają się ze zmianą kierunków osi współrzędnych. Dopiero stosując teorię niezmienników do przekształcenia powyższych form liniowych i postulując istnienie jednorodnej funkcji energii sprężystej zredukować można ilość współczynników a_{ijkl} o dalszych 15, uzyskując dla ciała o najogólniejszej anizotropii (struktura trikliniczna) 21 niezależnych współczynników. Wielkości α_{ij} występujące w związkach (3.2), zwane współczynnikami rozszerzalności liniowej termicznej, tworzą tensor symetryczny. Wykorzystując symetrię uzyskuje się coraz prostsze struktury. I tak dla struktury monoklinicznej mamy 13, dla ortorombicznej 9, dla heksagonalnej 5, dla kubicznej 3, wreszcie dla izotropii 2 niezależne od siebie współczynniki materiałowe. Rozwiązując (3.2) względem σ_{ij} otrzymamy

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \beta_{ij} T, \quad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{3.4}$$

przy czym

$$A_{ijkl} = A_{ijlk} = A_{jikl}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}.$$

Wielkości A_{ijkl} nazywamy współczynnikami sztywności. Wstawiając (3.4) do równania ruchu

$$\sigma_{ij,j} = \varrho \ddot{u}_i \tag{3.5}$$

i wyrażając odkształcenie przez przemieszczenie przy użyciu związków

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{3.6}$$

uzyskamy, po uporządkowaniu względem u_i, następujące równanie przemieszczeniowe:

$$\tfrac{1}{2} A_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k})_{,j}+\beta_{ij}T_{,j} = \varrho\ddot{u}_i, \quad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{3.7}$$

albo

$$L_{ij}(u_j)+\beta_{ij}T_{,j} = 0, \quad i,j = 1,2,3, \tag{3.7.1}$$

gdzie L_{ij} są operatorami różniczkowymi 2 rzędu zmiennych przestrzennych i czasu.

Rozwiązanie równań (3.7) złożyć można z dwu części, z rozwiązania $\bar{u}_i$, spełniającego niejednorodny układ równań (3.7.1) oraz z rozwiązania $\bar{\bar{u}}_i$, spełniającego układ równań

$$L_{ij}(\bar{\bar{u}}_j) = 0, \tag{3.8}$$

przy czym $\bar{\bar{u}}_i$ wyrażamy przy pomocy trzech funkcji χ_i ($i = 1,2,3$), dobieranych w analogiczny sposób jak dla ciała izotropowego (por. np. [8] lub [30]). Funkcje χ_i spełniają równanie jednorodne

$$|L_{ij}|\,\chi_i = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{3.9}$$

Funkcje χ_i traktować można jako poszerzone na zagadnienia dynamiczne funkcje B. G. Galerkina dla ciała anizotropowego, [8]. Chociaż dla przestrzeni nieograniczonej i półprzestrzeni sprężystej podać można formalne rozwiązanie układu równań (3.7) przy użyciu poczwórnej, wykładniczej transformacji Fouriera, nie udało się uzyskać rozwiązań przydatnych do celów praktycznych dla ciała o anizotropii ogólnej a nawet dla ortotropii, [38].

Równania przemieszczeniowe dla ośrodka o dowolnej ortotropii krzywoliniowej zostały podane i przedyskutowane w pracy J. Nowińskiego, W. Olszaka i W. Urbanowskiego, [39]. Autorzy rozwiązali ponadto trzy przykłady, z których pierwszy dotyczy nierównomiernie ogrzanego grubościennego walca o ortotropii walcowej, drugi dotyczy analogicznego zadania dla tarczy, a trzeci powłoki o ortotropii sferycznej.

Interesujące wnioski dotyczące stanu beznaprężeniowego w ciałach anizotropowych poddanych ogrzaniu wyprowadził W. Olszak, [40]. Wykazał on, że dla ciała odkształcającego się swobodnie i cechującego się anizotropią prostoliniową jedynie liniowy rozkład temperatury nie wywołuje naprężeń. Jednak dla ośrodka o anizotropii krzywoliniowej równania geometrycznej zgodności narzucają większe ograniczenia niż dla ciał o anizotropii prostoliniowej. I tak dla ośrodka o ortotropii walcowej tylko stały rozkład temperatury nie wywołuje naprężeń, a dla ciał o ortotropii sferycznej każde pole temperatury różne od zera wywołuje stan naprężenia.

Z zagadnień trójwymiarowych najszerzej zbadane jest zagadnienie naprężeń cieplnych ustalonych i nieustalonych w ciele o anizotropii poprzecznej. I tak B. SHARMA, [41], zbadał naprężenia cieplne wywołane ogrzaniem płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń sprężystą, przy czym rozwiązanie uzyskał przez wprowadzenie dwu funkcji naprężeń spełniających równanie różniczkowe drugiego rzędu. Inną drogę rozwiązań obmyślili Z. MOSSAKOWSKA i W. NOWACKI, [42], wprowadzając trzy funkcje, stanowiące rozszerzenie funkcji Galerkina na ciała sprężyste o anizotropii poprzecznej. Rozwiązano i w postaci zamkniętej przedstawiono naprężenia cieplne wywołane działaniem źródeł ciepła w przestrzeni nieograniczonej i w półprzestrzeni sprężystej przy różnorodnych warunkach brzegowych tak natury statycznej jak i termicznej. Analogiczne rozwiązania podano dla przypadku działania jądra termosprężystego odkształcenia. Rozpatrzono zagadnienie ustalonego ogrzania półprzestrzeni oraz warstwy sprężystej. Wykazano, że naprężenia o wektorze prostopadłym do płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń nie znikają, jak to ma miejsce w problemie E. L. McDowella i E. Sternberga, [43], a dążą do zera, gdy izotropia poprzeczna przechodzi w izotropię.

Podano wreszcie rozwiązanie dla kilku zagadnień quasi-statycznych, a dotyczących działania chwilowego źródła ciepła w przestrzeni i półprzestrzeni sprężystej. Szereg zadań, odnoszących się do naprężeń cieplnych osiowo-symetrycznych a występujących w półprzestrzeni sprężystej o izotropii poprzecznej, rozwiązał A. SINGH, [44].

Znacznie obszerniej opracowane są zagadnienia dwuwymiarowe, odnoszące się do płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia, naprężenia cieplne w płytach i tarczach. I tak W. H. PELL, [45], zajął się zagadnieniem jednoczesnego zginania i ściskania płyty anizotropowej, wywołanym ustalonym polem temperatury. Przyjął on, że temperatura zmienia się w sposób liniowy wzdłuż grubości płyty. Szczegółowo rozpatrzył W. H. PELL przypadek jednoczesnego zginania i ściskania płyty kołowej.

J. MOSSAKOWSKI, [46], stosując metodę funkcji zmiennej zespolonej uzyskał szereg rozwiązań odnoszących się do działania źródeł ciepła w półnieskończonej tarczy o anizotropii izogonalnej. Dla tarcz ortotropowych dogodnym narzędziem staje się stosowanie funkcji Airy'ego, [47], lub też funkcji przemieszczeniowej, [48]. Z zagadnień dynamicznych rozwiązane zostały dwa problemy jednowymiarowe dla przestrzeni nieograniczonej dla półprzestrzeni sprężystej, [49] i [50].

4. Naprężenia cieplne w ciałach niejednorodnych

Dziedziną teorii sprężystości, będącą obecnie w rozwoju, jest teoria ciał niejednorodnych izotropowych i anizotropowych. Niejednorodność materiału jest tu rozumiana w sensie makroskopowym. Wielkości mechaniczne, moduły sprężystości E, G, współczynnik Poissona ν oraz gęstość ϱ są funkcją miejsca i w ogólnym przypadku są funkcjami ciągłymi punktu przestrzeni. Pierwsze prace dotyczące ośrodka niejednorodnego odnoszą się do propagacji fal sprężystych sejsmicznych, [51]-[56].

Skorupa ziemska bowiem zmienia swą gęstość i własności mechaniczne wraz z głębokością.

Zagadnienia statyczne teorii sprężystości ośrodka niejednorodnego stały się przedmiotem badań szeregu autorów w ostatnich latach, [57]-[59]. Zagadnieniom tym poświęcono sympozjum I.U.T.A.M. w roku 1958.

Rozpatrzmy ciało niejednorodne, w którym stałe materiałowe tak mechaniczne jak i termiczne są funkcjami jedynie współrzędnych przestrzeni, nie zależą natomiast od czasu i temperatury, a zmienność tych wielkości jest spowodowana procesem technologicznym w trakcie wytwarzania materiału (odlewy żeliwne, beton itp.). Związki między składowymi tensora naprężenia i odkształcenia mają w tym przypadku postać

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma T)\,\delta_{ij}, \tag{4.1}$$

gdzie $\mu, \lambda, \gamma = (3\lambda+2\mu)\,\alpha_t$ są funkcjami współrzędnych x_r. Wstawiając (4.1) do równań ruchu

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \varrho \ddot{u}_i \tag{4.2}$$

oraz wyrażając odkształcenie przez przemieszczenia otrzymamy następujące równanie przemieszczeniowe:

$$\begin{aligned} \mu u_{i,kk} + [(\lambda+2\mu)\,u_{k,k}]_{,i} - \mu u_{k,ki} - 2u_{k,k}\,\mu_{,i} + \\ + (u_{i,k}+u_{k,i})\,\mu_{,k} + F_i - (\gamma T)_{,i} = \varrho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.3}$$

W symbolice wektorowej mają one następującą postać:

$$\begin{aligned} \mu\nabla^2 \mathbf{u} - \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - 2\,(\operatorname{grad}\mu)\,(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \\ + 2\,(\operatorname{grad}\mu\cdot\Phi) + \operatorname{grad}\,[(\lambda+2\mu)\operatorname{div}\mathbf{u}] + \mathbf{F} - \operatorname{grad}(\gamma T) = \varrho\ddot{\mathbf{u}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

gdzie Φ jest tensorem stanu odkształcenia.

Równanie przewodnictwa cieplnego jest w przypadku ciała niejednorodnego równaniem typu parabolicznego o zmiennych współczynnikach

$$(\bar{\lambda} T_{,k})_{,k} - c\varrho\dot{T} = -W. \tag{4.5}$$

Przez $\bar{\lambda}$ oznaczono współczynnik przewodnictwa cieplnego w odróżnieniu od stałej Lamégo λ. Zmienność współczynników μ, λ, γ, α_t, $\bar{\lambda}$ jako funkcji położenia powoduje spiętrzenie się trudności matematycznych rozwiązania układu równań (4.3) i (4.5). Tylko w nielicznych przypadkach udało się dotąd uzyskać rozwiązanie w postaci znanych funkcji.

Spodziewać się należy, że w rozwoju teorii ciał niejednorodnych wielkie usługi oddadzą metody wariacyjne i ortogonalizacyjne. Dla ciał sprężystych niejednorodnych w mocy pozostają wszelkie twierdzenia energetyczne, zasada Hamiltona i zasada d'Alemberta. We wszystkich zasadach i twierdzeniach wielkości μ, λ, α_t, $\bar{\lambda}$ traktować należy jako funkcje współrzędnych przestrzeni.

W ostatnich latach, wobec coraz częstszego stosowania elementów konstrukcyjnych pracujących w temperaturach ustalonych podwyższonych, zarysowuje się nowy kierunek badań, w którym uwzględnia się wpływ temperatury na własności termiczne i mechaniczne ciała. Ciało staje się niejednorodne wskutek wzrostu temperatury, a ponieważ temperatura (w przypadku przepływu ustalonego) jest funkcją punktu przestrzeni, zatem i w konsekwencji wielkości μ, λ, α_t, $\bar{\lambda}$ są funkcjami miejsca.

Zamiast związków (4.1) mamy

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \left[\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda+2\mu)\int\limits_0^T \alpha_t(\eta)\,d\eta\right]\delta_{ij}, \tag{4.6}$$

gdzie

$$\mu = \mu\,[T(x_r)], \qquad \lambda = \lambda\,[T(x_r)].$$

Wstawiając naprężenie σ_{ij} do równań równowagi otrzymamy układ równań (4.3), w którym należy pominąć wyrazy inercyjne. Ponadto mamy tu

$$\mu_{,i} = \frac{\partial\mu}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial x_i}, \qquad \lambda_{,i} = \frac{\partial\lambda}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

oraz

$$\gamma T = (3\lambda+2\mu)\int\limits_0^T \alpha_t(\eta)\,d\eta.$$

Równanie przewodnictwa cieplnego jest nieliniowe

$$[\bar{\lambda}(T)\,T_{,k}]_{,k} = -W. \tag{4.7}$$

Wprowadzając funkcję pomocniczą

$$G(T) = \frac{1}{\bar{\lambda}_0}\int\limits_0^T \bar{\lambda}(\tau)\,d\tau = G\,[T(x_r)], \tag{4.8}$$

przekształcimy równanie (4.7) do postaci

$$\nabla^2 G(x_r) = -\frac{1}{\bar{\lambda}_0}W(x_r), \qquad \bar{\lambda}_0 = \text{const}. \tag{4.9}$$

Po rozwiązaniu ostatniego równania uzyskamy z (4.8) pole temperatury w postaci uwikłanej.

Jeśli z rozwiązania nieliniowego równania przewodnictwa cieplnego wyznaczymy temperaturę $T(x_r)$, to znając zależność współczynników μ, λ, α_t od temperatury (a tym samym od miejsca) przystąpić można do rozwiązywania równań przemieszczeniowych, równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach. Wobec trudności rozwiązania równań przemieszczeniowych uciekać się trzeba do uproszczeń.

Jednym z nich jest przyjęcie, że współczynnik Poissona jest wielkością stałą ($\nu = \text{const}$). Dalszym uproszczeniem jest przyjęcie dla odkształcenia termicznego $\varepsilon^0 = \int_0^T \alpha_t(\eta)\, d\eta$ średniej wartości tego odkształcenia: $\varepsilon^0 = \alpha_t^* T$. Do tej pory rozwiązano zaledwie kilka zadań jednowymiarowych [60]-[65], odnoszących się głównie do naprężeń cieplnych w walcu grubościennym i w kuli wydrążonej.

Przy założeniu niezależności współczynnika Poissona ν od temperatury oraz przy przyjęciu średniej wartości odkształcenia termicznego otrzymuje się następujące równanie przemieszczeniowe, [65]:

a) dla płaskiego stanu naprężenia i osiowo-symetrycznego pola temperatury

$$\partial_r \{E\, [\partial_r u_r + r^{-1} u_r - (1+\nu)\, \alpha_t^* T]\} = (1-\nu)\, r^{-1} u_r \partial_r E, \tag{4.10}$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \partial_r = \frac{\partial}{\partial r};$$

b) dla płaskiego stanu odkształcenia

$$\partial_r \left\{E \left[\partial_r u_r + r^{-1} u_r - \frac{1+\nu}{1-\nu}\, \alpha_t^* T\right]\right\} = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\, r^{-1} \partial_r E; \tag{4.11}$$

c) dla zagadnienia o symetrii sferycznej

$$\partial_R \left\{E \left[\partial_R u_R + 2R^{-1} u_R - \frac{1+\nu}{1-\nu}\, \alpha_t^* T\right]\right\} = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}\, R^{-1} u_R \partial_R E, \tag{4.12}$$

$$R = r^2 + x_3^2, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial R}.$$

Z powyższego zestawienia widać, że znaczne uproszczenie dać może przyjęcie, że $\nu = 1/2$. W tym bowiem przypadku odpadają prawe strony równań (4.11) i (4.12), co oczywiście nader ułatwia całkowanie tych równań.

J. Nowiński, [61], rozpatrzył naprężenie cieplne w walcu grubościennym przy założeniu, że $E(T) = E_0 e^{-\beta T}$, co prowadzi do zależności $E(r) = \varkappa r E_0$. S. A. Szestierikow, [64], rozpatruje przy analogicznym założeniu dla $E(T)$ stan naprężenia w tarczy kołowej. J. Nowiński w dalszej pracy, [66], rozpatruje stan naprężenia w kuli pełnej i wydrążonej uzyskując przy $\nu = 1/2$ oraz $\varepsilon^0 = \int_0^T \alpha_t(\eta)\, d\eta$ rozwiązanie w postaci zamkniętej. Z przykładu liczbowego, wykonanego przy założeniu liniowo zmieniających się względem T współczynników α_t, E, λ wynika, że naprężenia cieplne σ_{RR}, $\sigma_{\varphi\varphi}$ nie wiele odbiegają od naprężeń σ_{RR}^*, $\sigma_{\varphi\varphi}^*$, wyznaczonych przy założeniu średnich wartości α_t^*, E^*. R. Trostel w pierwszej z wymienionych prac, [62], zakłada, że $\nu = 1/2$. Dzięki temu równanie (4.11) daje się rozwiązać w sposób ścisły. W następnej pracy, [63], podaje metodą perturbacyjną rozwiązanie równań przemieszczeniowych przy założeniu nieznacznej zmiany modułu E wraz ze zmianą temperatury. Mamy tu

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial T}=\frac{d}{dT}\left(\ln\frac{E}{E_0}\right)=\varepsilon\Phi(T),$$

gdzie ε jest małym parametrem. Przy użyciu metody perturbacji R. TROSTEL rozwiązuje w sposób szczegółowy problem rozkładu naprężeń cieplnych w walcu wydrążonym przyjmując, że $\nu=\mathrm{const}\neq 1/2$ oraz, że $\lambda(T)$ i $\alpha_t(T)$ są funkcjami liniowymi.

M. SOKOŁOWSKI, [65], bada naprężenie cieplne w walcu nieograniczonym oraz w kuli, wywołane ogrzaniem powierzchni zewnętrznej oraz działaniem źródeł ciepła. M. SOKOŁOWSKI przyjmuje, że $\nu=\mathrm{const}$ oraz że pochodne E względem promienia są tak małe, że prawe strony równań (4.10)-(4.12) można przyjąć za równe zeru. Punkt ciężkości spoczywa tu na rozpatrzeniu zmienności współczynnika $\bar{\lambda}(T)$ oraz ustaleniu reguł, według których naprężenia cieplne wzrastają (zależnie od rodzaju zmienności $\bar{\lambda}(T)$ i kierunku przepływu ciepła) lub maleją.

Uogólnienie twierdzenia o wzajemności przemieszczeń E. Bettiego na ciała sprężyste z zależnymi od temperatury współczynnikami zawdzięczamy J. NOWIŃSKIEMU, [67]. Twierdzenie to ma postać

$$(4.13)\qquad \int_V F_i' u_i dV+\int_\Gamma p_i' u_i d\Gamma=\int_V F_i u_i' dV+\int_\Gamma p_i u_i' d\Gamma+\int_V\Big[\int_0^T \alpha_t(\eta)\,d\eta\Big]\Lambda^{(t)}dV.$$

Tutaj przemieszczenia u_i' wywołane są siłami p_i', F_i' w ośrodku niejednorodnym, w którym $T=0$, natomiast przemieszczenia u_i powstają w wyniku działania sił p_i, F_i oraz temperatury T w tym samym niejednorodnym ośrodku. Dalej $\Lambda^{(t)}$ oznacza sumę naprężeń normalnych, wywołanych siłami p_i', F_i'. Przemieszczenie u_i wywołane działaniem pola temperatury w ciele o objętości V i wolnym od obciążeń na powierzchni oraz przy $F=0$ przyjmuje postać

$$(4.14)\qquad u_i=\int_V \Lambda'\,dV\int_0^T \alpha_t(\eta)\,d\eta.$$

We wzorze tym Λ' jest sumą naprężeń, wywołaną w punkcie (ξ_r) działaniem siły skupionej umieszczonej w punkcie (x_r) i działającej w kierunku osi x_i.

5. Naprężenia cieplne w ciałach fizykalnie nieliniowych

Wiele materiałów konstrukcyjnych nie podlega prawu liniowej zmienności między składowymi stanu odkształcenia i naprężenia (prawo Hooke'a) i to nawet w obszarze małych odkształceń i w obszarze sprężystym. Nieliniowość tego typu, mającą swe źródło w strukturze fizycznej materiałów, nazywamy nieliniowością fizykalną. Z natury nieliniowych związków między naprężeniami i odkształceniami wynika, że odkształcenia nie zwiększają się proporcjonalnie do obciążeń. Nie ma zastosowania zatem zasada superpozycji skutków obciążeń. Ma jednak zastosowanie prawo przemienności działania sił, według którego zmiana kolejności działania sił nie wpływa w ogólności na wynik końcowy działania układu sił.

Obmyślono dotychczas kilka wariantów fizykalnie nieliniowej teorii sprężystości, [68]-[71]. Zagadnienie ustalonych naprężeń cieplnych w ramach fizykalnie nieliniowej teorii sprężystości zapoczątkowane zostały pracą F. JINDRA, [72], który oparł się na teorii H. KAUDERERA, [70].

W teorii tej związki między stanem naprężenia i odkształcenia mają postać

$$s_{ij} = 2G\gamma(\psi_0^2)\, e_{ij}, \tag{5.1}$$

$$\sigma_{kk} = 3K\varkappa(\varepsilon_{kk})(\varepsilon_{kk} - 3\alpha_t T). \tag{5.2}$$

Tutaj s_{ij}, e_{ij} są dewiatorami stanu naprężenia i odkształcenia, a $\varkappa(\varepsilon_{kk})$ i $\gamma(\psi_0^2)$ są funkcjami wydłużenia i ścinania, przy czym

$$\lim_{\varepsilon_{kk}\to 0} \varkappa(\varepsilon_{kk}) = 1, \qquad \lim_{\psi_0^2\to 0} \gamma(\psi_0^2) = 1, \tag{5.3}$$

tak że dla $\varepsilon_{kk} \to 0$, $\psi_0^2 \to 0$ związki (5.1) i (5.2) dają prawo Hooke'a, sformułowane za pomocą wzorów

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}, \qquad \sigma_{kk} = 3K(\varepsilon_{kk} - 3\alpha_t T). \tag{5.4}$$

Tu G i K są odpowiednio modułami odkształcenia postaciowego i ściśliwości w teorii liniowej.

Rozwiązując równania (5.1) i (5.2) względem odkształceń uzyskamy

$$\varepsilon_{ij} = \frac{g(t_0^2)}{2G}\sigma_{ij} + \left\{\left[\frac{k(s_0)}{3K} - \frac{1}{2G}g(t_0^2)\right]\sigma_0 + \alpha_t T\right\}\delta_{ij}, \tag{5.5}$$

gdzie $g = g(t_0^2)$ oraz $k = k(s_0)$ są funkcjami zmiennych $s_0 = \sigma_0/3K$, $t_0 = \tau_0/G$ a wielkości σ_0 i τ_0 są niezmiennikami o postaci

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad \tau_0^2 = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}[(\sigma_{11}-\sigma_0)^2+(\sigma_{22}-\sigma_0)^2+(\sigma_{33}-\sigma_0)^2]+\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2\right\}.$$

Zastosowanie związków (5.5) będzie szczególnie dogodne, jeśli funkcje $k(s_0)$ i $g(t_0)$ uda się przedstawić jako szeregi potęgowe

$$\begin{aligned} k(s_0) &= 1+k_1 s_0+k_2^2 s_0^2+\dots, \\ g(t_0^2) &= 1+g_2 t_0^2+g_4 t_0^4+\dots . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Współczynniki występujące w tych szeregach oznaczają stałe materiałowe.

W licznych do tej pory rozwiązanych przykładach (skręcenie pręta, płaski stan naprężenia w tarczach) H. KAUDERER i jego współpracownicy przyjmują na podstawie doświadczeń laboratoryjnych jako pierwsze przybliżenie zależności

$$k(s_0) = 1, \qquad g(t_0^2) = 1+g_2 t_0^2. \tag{5.7}$$

Powyższe związki podkreślają fakt, że fizykalna nieliniowość w większym stopniu wpływa na zmiany postaciowe niż na zmiany objętościowe ciała.

F. JINDRA w wymienionej wyżej pracy rozpatrzył dwa jednowymiarowe zagadnienia, mianowicie wyznaczył przebieg naprężeń w kuli wydrążonej oraz w cienkiej tarczy pierścieniowej. Założył on ustalony przepływ ciepła wyznaczony z równania przewodnictwa cieplnego o stałych współczynnikach. W obu przykładach eliminując przemieszczenia uzyskał równanie nieliniowe dla naprężeń radialnych. Korzystając z zależności (5.7) i stosując metodę perturbacji otrzymał rozkłady naprężeń radialnych. Z opracowanych przykładów (dla czystej miedzi) wynika, że w stosunku do teorii liniowej otrzymuje się tu poważne zmiany naprężeń obwodowych, zwłaszcza na brzegu wewnętrznym kuli wydrążonej i pierścienia.

Złożoność równań nieliniowych, tak przemieszczeniowych jak i naprężeniowych, nie rokuje nadziei na uzyskanie rozwiązań ścisłych. Przy rozwiązaniu zagadnień fizykalnie nieliniowych bardzo skuteczne mogą się okazać metody przybliżone, metoda Galerkina i metoda perturbacji.

Literatura cytowana w tekście

[1] J. M. C. DUHAMEL, *Second mémoire sur les phenomènes thermomécaniques*, J. de l'Ecole Polytech., **15** (1937).

[2] W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, 1910.

[3] H. JEFFREYS, *The Thermodynamics of an Elastic Solid*, Proc. Camb. Phil. Soc., **26** (1930).

[4] M. A. BIOT, *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*, J. Appl. Phys., **27** (1956).

[5] K. ZOLLER, *Die Wärmegleichung bei Wärmespannungen*, Ing. Arch., **28** (1959).

[6] H. PARKUS, *Über eine Erweiterung des Hamilton'schen Principes auf termoelastische Vorgänge*, Beiträge zur ang. Mechanik, Federhofer-Girkmann Festschrift, Wien 1950.

[7] J. H. WEINER, *A Uniqueness Theorem for the Coupled Thermoelastic Problem*, J. Appl. Math., **15** (1957).

[8] S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, Warszawa 1957.

[9] J. S. PODSTRIGACZ, *Ogólne rozwiązanie niestacjonarnego problemu termosprężystości* (w języku ukraińskim), Prikl. Miech., 2, **6** (1960).

[10] W. NOWACKI, *On the Treatment of the Two-Dimensional Coupled Thermoelastic Problem in Terms of Stresses*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 3, **9** (1961).

[11] H. ZORSKI *On a Certain Property of Thermoelastic Media*, Bull. Acad. Polon., Sér. Sci. Techn., **6** (1958).

[12] H. DERESIEWICZ, *Plane Waves in a Thermoelastic Solid*, J. Acoust. Soc. Amer., **29** (1957).

[13] P. CHADWICK, I. N. SNEDDON, *Plane Waves in an Elastic Solid Conducting Heat*, J. Mech. Phys. Solids, **6** (1958).

[14] L. BRILLOUIN, *Tenseurs en mécanique et en élasticité*, Paris 1938, s. 324.

[15] I. SNEDDON, *The Propagation of Thermal Stresses in Thin Metallic Rods*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sci. A, **65** (1959).

[16] I. IGNACZAK, *Note of the Propagation of Thermal Stresses in a Long Mettalic Rod*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 5, **7** (1959).

[17] F. J. LOCKETT, *Effect of Thermal Properties of a Solid on the Velocity of Rayleigh Waves*, J. Mech. Phys. of Solids, **7** (1958).

[18] W. NOWACKI, M. SOKOŁOWSKI, *Propagation of Thermoelastic Waves in Plates*, Arch. Mech. Stos., 6, **9** (1959).

[19] F. J. Lockett, *Longitudinal Elastic Waves in Cylinders and Tubes Including Thermoelastic Effects*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 11, part 3, 1959.

[20] J. Ignaczak, W. Nowacki, *Transversal Vibrations of a Plate, Produced by Heating*, Arch. Mech. Stos., 5, **13** (1961).

[21] J. Ignaczak, W. Nowacki, *The Plane Dynamic Problem of Thermoelasticity*, Proc. Vibr. Probl., 4, **2** (1961).

[22] H. Zorski, *Singular Solutions for Thermoelastic Media*, Bull. Acad. Polon., Sér. Sci. Techn., 6, **6** (1958).

[23] G. Eason, I. N. Sneddon, *The Dynamic Stress Produced in Elastic Bodies by Uneven Heating*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 65, ser. A, 1959.

[24] F. J. Lockett, I. N. Sneddon, *Propagation of Thermal Stresses in an Infinite Medium*, Proc. Edinburg Math. Soc., II, 4 (1959).

[25] W. Nowacki, *Some Dynamic Problems of Thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., 2, **11** (1959).

[26] M. Lessen, *Thermoelastic Waves and Thermal Shock*, J. Med. Phys. Solids, 2, **7** (1959).

[27] R. Hetnarski, *Coupled One-Dimensional Thermal Shock Problem for Small Times*, Arch. Mech. Stos., 2, **13** (1961).

[28] В. И. Даниловская, *Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы*, Прикл. Мат. Мех., **14** (1950).

[29] G. Paria, *Coupling of Elastic and Thermal Deformations*, Indian Inst. Techn. Kharagpur, India, 1959.

[30] W. Nowacki, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, London 1962.

[31] G. A. Nariboli, *Spherically Symmetric Thermal Shock in a Medium with Thermal and Elastic Deformations Coupled*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1961.

[32] J. Ignaczak, W. Nowacki, *The Sommerfeld Radiation Conditions for Coupled Problems of Thermoelasticity. Examples of Coupled Stress and Temperature Concentration Around Cylindrical and Spherical Cavities*, Arch. Mech. Stos., 1, **13** (1962).

[33] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 2, Warszawa 1954.

[34] A. Rosenblatt, *Rendiconti del circolo mathematico di Palermo*, V. 29, 1910.

[35] S. C. Hunter, *Tentative Equations for the Propagation of Stress, Strain and Temperature Field in Viscoelastic Solid*, J. Mech. Phys. Solids, 1, **9** (1961).

[36] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solid*, Oxford 1959.

[37] F. J. Nye, *Physical Properties of Crystals*, Oxford 1957.

[38] G. F. Carrier, *The Thermal-Stress and Body-Force Problems of the Infinite Orthotropic Bodies*, Quart. Appl. Math., 1948.

[39] J. Nowiński, W. Olszak, W. Urbanowski, *On Thermoelastic Problems in the Case of a Body of an Arbitrary Type of Curvilinear Orthotropy*, Arch. Mech. Stos., 2, **7** (1955).

[40] W. Olszak, *Autocontraints des milieux anisotropes*, Bull. Acad. Pol. Sci. Lettr. Cl. Sci. Math., PAU, I, 1950.

[41] B. Sharma, *Thermal Stresses in Transversally Isotropic Semi-Infinite Elastic Solids*, J. Appl. Mech., **25** (1958).

[42] Z. Mossakowska, W. Nowacki, *Thermal Stresses in Transversally Isotropic Bodies*, Arch. Mech. Stos., 4, **10** (1958).

[43] E. Sternberg, E. L. McDowell, *On the Steady-State Thermoelastic Problem for the Half-Space*, Quart. Appl. Math., **14** (1957).

[44] A. Singh, *Axisymmetrical Thermal Stresses in Transversally Isotropic Bodies*, Arch. Mech. Stos., 3, **12** (1960).

[45] W. H. Pell, *Thermal Deflection of Anisotropic Thin Plates*, Quart. Appl. Mech., **4** (1946).

[46] J. Mossakowski, *The State of Stress and Displacement in a Thin Anisotropic Plate Due to a Concentrated Source of Heat*, Arch. Mech. Stos., 5, **9** (1957).

[47] W. Nowacki, *Ustalone naprężenia w walcu ortotropowym oraz w tarczy ortotropowej*, Rozpr. Inżyn., 3, **8** (1960).

[48] W. Nowacki, *Thermal Stresses in Orthotropic Plates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 1, **7** (1959).

[49] Z. Mossakowska, *One-Dimensional Dynamical Problem for Thermoelasticity for Anisotropic Medium*, Arch. Mech. Stos., 1, **12** (1960).

[50] Z. Mossakowska, *Dynamical Problem for Anisotropic Semi-space with Discontinuous Field Temperature*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 12, **9** (1961).

[51] E. Meissner, *Elastische Oberflächenwelle mit Dispersion in einem Inhomogenen Medium*, Viertj. Naturforsch. Gess. Zürich. **66** (1921).

[52] K. Uller, *Die Front- und Rückengeschwindigkeit von Verzerrungswellen in festen, schweren Körpern*, Gerlands Beitr. Geophys., **15** (1926).

[53] R. Yosiyama, *Elastic Waves from a Point in an Isotropic Heterogeneous Sphere*, I. Bull. Earthquake Research Inst., Tokyo, V. 11, 1933; II. V. 18, 1940; III, V. 19, 1941.

[54] S. Sobolev, *Sur l'équation d'onde pour le cas d'un milieu hétérogéne Isotrope*, Publ. Inst. Seism. Acad. Sci. U.R.S.S., **2** (1930).

[55] S. Sobolev, *L'équation d'onde pour un milieux hétérogéne*, Publ. Inst. Seism. Acad. Sci. U.R.S.S., **6** (1930).

[56] R. Stoneley, *The Transmission of Rayleigh Waves in a Heterogeneous Medium*, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl., **3** (1934).

[57] J. Nowiński, St. Turski, *Z teorii sprężystości cial izotropowych niejednorodnych*, Arch. Mech. Stos., 1, **5** (1953).

[58] J. Nowiński, St. Turski, *Studium nad stanami naprężenia w cialach sprężystych niejednorodnych*, Arch. Mech. Stos., 3, **5** (1953).

[59] *Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity*, Edited by W. Olszak, Pergamon Press, London 1959.

[60] H. H. Hilton, *Thermal Stresses in Bodies Exhibiting Temperature-Dependent Properties*, J. Appl. Mech., **74** (1952).

[61] J. Nowiński, *Naprężenia cieplne w walcu grubościennym, którego material przejawia zmienne wlasności sprężyste*, Arch. Mech. Stos., 4, **5** (1953).

[62] R. Trostel, *Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Werten*, Ing. Arch., **26** (1958).

[63] R. Trostel, *Stationäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Werten*, Ing. Arch., **26** (1958).

[64] С. А. Шестериков, *Температурные напряжения в упругом диске постоянной толщины*, Изв. АН СССР, Мех. и Машиностроение, **5** (1959).

[65] M. Sokołowski, *One-Dimensional Thermoelastic Problems for Elastic Bodies with Material Constants Dependent on Temperature*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 4, **8** (1960).

[66] J. Nowiński, *Thermoelastic Problem for an Isotropic Sphere with Temperature Dependent Properties*, ZAMP, **10** (1959).

[67] J. Nowiński, *A Betti-Rayleigh Theorem for Elastic Bodies Exhibiting Temperature Dependent Properties*, Appl. Sci. Res. Sci. A, 9, 6, 1960.

[68] E. Sternberg, *Non-Linear Theory of Elasticity with Small Deformations*, J. Appl. Mech., **13** (1946).

[69] H. Kauderer, Ing. Arch., **17** (1949).

[70] H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.

[71] J. Nowiński, W. Olszak, *O podstawach teorii cial sprężystych fizykalnie nieliniowych*, Arch. Mech. Stos., 1, **6** (1954).

[72] F. Jindra, *Wärmespannungen bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz*, Ing. Arch., **28** (1959).

Резюме

НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В работе, имеющей характер обзора, приводятся результаты исследований и вырисовывающиеся направления развития некоторых областей термоупругости.

Рассматриваются вопросы, касающиеся сопряжения температурного поля и поля деформации, вопросов термических напряжений в анизотропных однородных телах и в изотропных неоднородных телах, а также в физически нелинейных телах.

Summary

MODERN DEVELOPMENT TRENDS IN THERMOELASTICITY

This survey presents the results of investigations and the development trends that can be observed in some domains of thermoelasticity. The problem of coupling between the temperature field and the strain field is discussed as well as the problem of thermal stresses in anisotropic homogeneous bodies, isotropic non-homogeneous bodies and physically non-linear bodies.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 9 marca 1961 r.