

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM V • ZESZYT 3

WARSZAWA • 1957

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

**STAN NAPRĘŻENIA WYWOŁANY W PRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ
DZIAŁANIEM ŹRÓDŁA CIEPŁA ZMIENIAJĄCEGO SIĘ W CZASIE
W SPOSÓB HARMONICZNY**

Niech w punkcie A , który przyjmujemy za początek układu współrzędnych, działa skupione źródło ciepła o wydajności W , zmieniające się w sposób harmoniczny. Źródło to wywoła również w sposób harmoniczny zmieniające się pole temperatury T oraz w sposób harmoniczny zmieniające się pole naprężeń σ_{ij} . Załóżmy, że częstotliwość drgań źródła ciepła jest nieznaczną, tak że zjawisko rozpatrywane traktować można jako quasi-statyczne. Pominiemy zatem w równaniach przemieszczeniowych teorii sprężystości wyrazy zawierające przyśpieszenia przemieszczeń.

Pole temperatury określone jest przez

$$(1.1) \quad \nabla^2 T = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W(t)}{k} \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

We wzorze tym $k = \lambda/\rho c$, przy czym λ jest przewodnictwem właściwym, ρ gęstością a c jest ciepłem właściwym. Ilość ciepła Q wytwarzana przez źródło na jednostkę czasu i objętości wynosi $Q = W \rho c$. Symbol δ oznacza funkcję Diraca. Ze względu na harmoniczny charakter działania źródła przyjmujemy

$$(1.2) \quad T(x, y, z, t) = U(x, y, z) e^{i(\omega t - \epsilon)}, \quad W(t) = W_0 e^{i(\omega t - \epsilon)}.$$

Równanie (1.1) doprowadzimy zatem do postaci

$$(1.3) \quad \nabla^2 U - i\eta U = -\frac{W_0}{k} \delta(x) \delta(y) \delta(z), \quad \eta = \frac{\omega}{k}.$$

Rozwiązaniem tego równania w układzie współrzędnych walcowych przy założeniu, że w nieskończoności $T = 0$, jest funkcja

$$(1.4) \quad U = \frac{W_0}{2\pi^2 k} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha (\alpha^2 + \gamma^2 + i\eta)^{-1} J_0(\alpha r) \cos \gamma z d\alpha d\gamma, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Po wykonaniu odpowiednich całkowań otrzymamy

$$(1.5) \quad U = \frac{W_0}{4\pi k} R^{-1} \exp(-R\sqrt{i\eta}), \quad R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Zważywszy na wzór (1.2) otrzymujemy

$$(1.6) \quad T = \frac{W_0}{4\pi k} R^{-1} \exp[i(\omega t - \varepsilon) - R\sqrt{i\eta}].$$

Pole temperatury ¹ T otrzymamy jako część rzeczywistą funkcji (1.6):

$$(1.7) \quad T = \frac{W_0}{4\pi k} R^{-1} \exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \cos\left(\omega t - \varepsilon - R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right).$$

Dla wyznaczenia stanu naprężenia wygodnie jest posłużyć się potencjałem termosprężystego odkształcenia Φ . Funkcja ta związana jest z polem temperatury związkiem, [1],

$$(1.8) \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t T.$$

Tutaj ν jest stałą Poissona, a α_t jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej. Ze względu na harmoniczne działanie źródła przyjmujemy, że

$$(1.9) \quad \Phi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) e^{i(\omega t - \varepsilon)}.$$

Zatem

$$(1.10) \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t U.$$

Rozwiązanie tego równania, zważywszy na związek (1.4), ma postać

$$(1.11) \quad \Psi = -\frac{W_0}{2\pi^2 k} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha (\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} (\alpha^2 + \gamma^2 + i\eta)^{-1} J_0(\alpha r) \cos \gamma z d\alpha d\gamma,$$

albo po wykonaniu zaznaczonych całkowań

$$(1.12) \quad \Psi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_t W}{4\pi k \eta} i [1 - \exp(-R\sqrt{i\eta})] R^{-1}.$$

Część rzeczywista funkcji Φ ze wzoru (1.9) przyjmuje postać²

$$(1.13) \quad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{W_0}{4\pi \omega} R^{-1} \left[\exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \sin\left(R\sqrt{\frac{\omega}{2k}} - \omega t + \varepsilon\right) + \sin(\omega t - \varepsilon) \right].$$

¹ Zakładamy, że $W(t) = W_0 \cos(\omega t - \varepsilon)$. W przypadku $W(t) = W_0 \sin(\omega t - \varepsilon)$ należy brać urojoną część funkcji T .

² Zakładamy, że i tutaj $W(t) = W_0 \cos(\omega t - \varepsilon)$.

Znajomość funkcji Φ zezwala na wyznaczenie stanu naprężenia ze związków

$$(1.14) \quad \sigma_{ij} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial i \partial j} - V^2 \Phi \delta_{ij} \right) \quad (i, j = x, y, z).$$

Tutaj δ_{ij} oznacza symbol Kroneckera.

W rozpatrywanym zagadnieniu mamy do czynienia z symetrią sferyczną. We współrzędnych sferycznych otrzymamy też najprostsze wyrażenia na składowe stanu naprężenia. Mamy mianowicie

$$(1.15) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = 2G \left(\frac{d^2 \Phi}{dR^2} - V^2 \Phi \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = 2G \left(\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dR} - V^2 \Phi \right), \\ \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{\theta\varphi} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \\ V^2 \Phi = \frac{d^2 \Phi}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR}. \end{cases}$$

Korzystając ze wzoru (1.13) znajdziemy, że

$$(1.16) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{(1+\nu)\alpha_t W G}{(1-\nu)\pi\omega} \left\{ \exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \left[\left(1 + R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \sin(\omega t - \varepsilon - \right. \right. \\ \left. \left. - R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) + R\sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right] - \sin(\omega t - \varepsilon) \right\} R^{-3}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr} - \frac{(1+\nu)\alpha_t W G}{(1-\nu)2\pi\omega} R^{-1} \exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \cos\left(\omega t - \right. \\ \left. - \varepsilon - R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) = -\sigma_{rr} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t 2GT, \\ \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\varphi\theta} = 0. \end{cases}$$

Na rysunku 1a podano wykres funkcji $\sigma_{\varphi\varphi}$, na rysunku 1b wykres funkcji σ_{rr} dla kilku wartości parametrów $\mu = R\sqrt{\omega/2k}$, $\tau = \omega t - \varepsilon$.

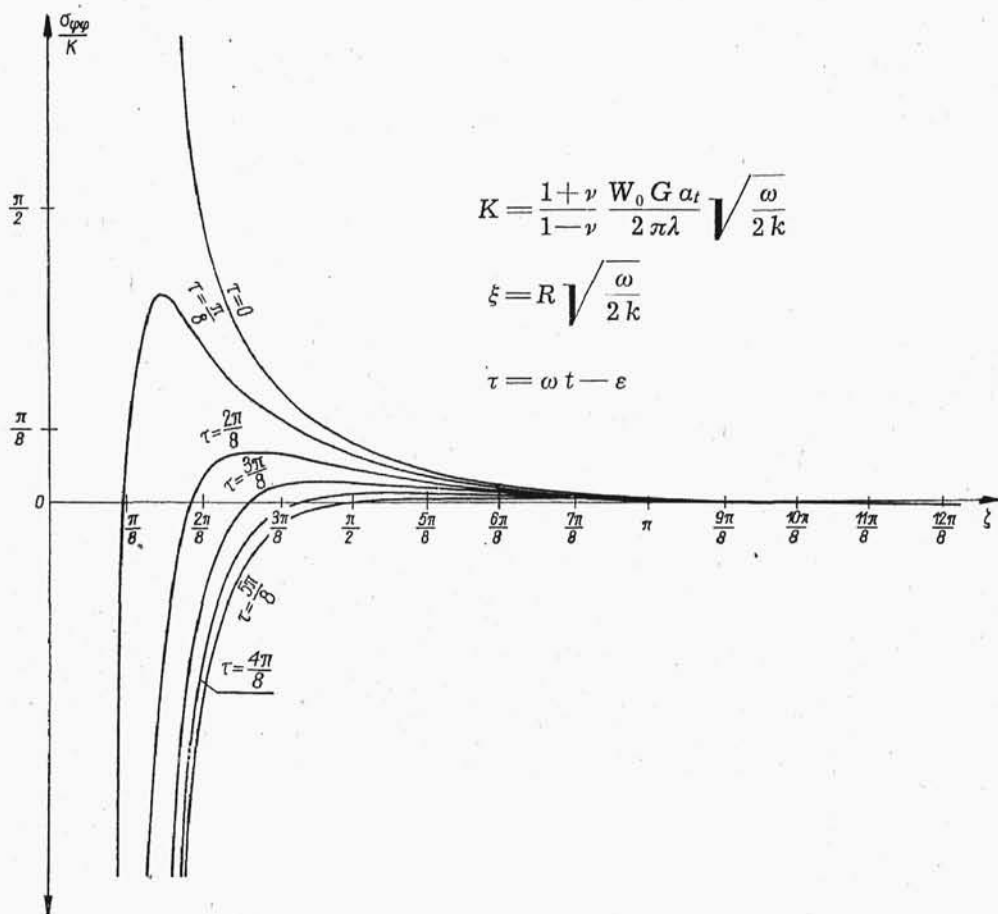
Niech w przestrzeni sprężystej działają źródła ciepła jednostajnie rozmieszczone na osi z . Mamy tu do czynienia z zagadnieniem osiowo symetrycznym.

Równanie przewodnictwa cieplnego ma tu postać

$$(1.17) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W}{k} \delta(r).$$

Dla źródła liniowego o wydajności W na jednostkę długości i przy założeniu, że zmienia się ono w czasie w sposób harmoniczny, przyjmujemy, że

$$(1.18) \quad T(r, t) = U(r) e^{i(\omega t - \varepsilon)}, \quad W = W_0 e^{i(\omega t - \varepsilon)}.$$



Rys. 1a

Równanie (1.17) doprowadzamy zatem do postaci

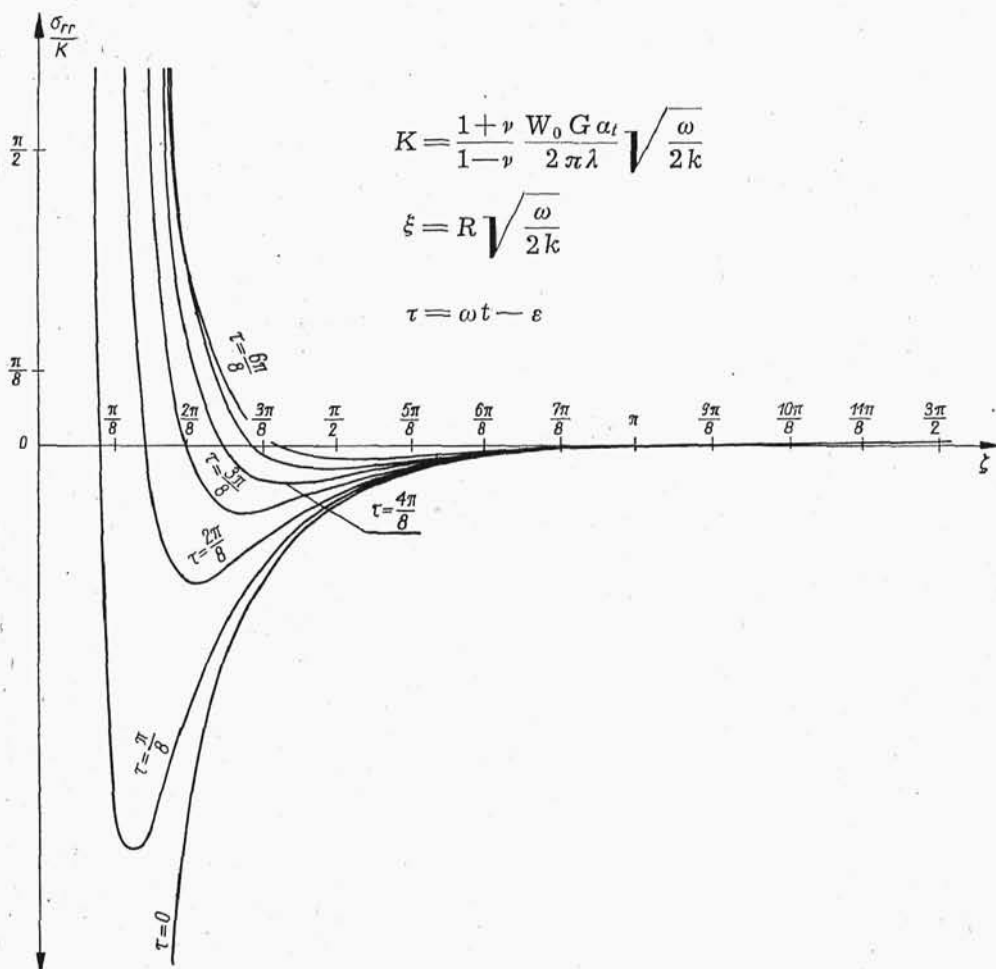
$$(1.19) \quad \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - i\eta U = -\frac{W_0}{k} \delta(r).$$

Rozwiązaniem równania (1.19) jest funkcja

$$(1.20) \quad U = \frac{W_0}{2\pi k} \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) (\alpha^2 + i\eta)^{-1} d\alpha = \frac{W_0}{2\pi k} K_0(r \sqrt{i\eta}).$$

Tutaj $K_0(r\sqrt{i\eta})$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela trzeciego rodzaju tzw. funkcją Basseta. Tak więc

$$(1.21) \quad T = \frac{W_0}{2\pi k} e^{i(\omega t - \varepsilon)} K_0(r\sqrt{i\eta}).$$



Rys. 1b

Zważywszy, że

$$e^{-i\nu\pi/2} K_\nu(r\sqrt{i\eta}) = \ker_\nu(r\sqrt{\eta}) + i \operatorname{kei}_\nu(r\sqrt{\eta}),$$

gdzie funkcje $\ker_\nu(z)$, $\operatorname{kei}_\nu(z)$ są funkcjami Kelvina, możemy rzeczywistą część funkcji (1.21) wyrazić wzorem

$$(1.22) \quad T = \frac{W_0}{2\pi k} \left[\ker_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \cos(\omega t - \varepsilon) - \operatorname{kei}_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \sin(\omega t - \varepsilon) \right].$$

Z równania

$$(1.23) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t T$$

wyznamy funkcję Φ korzystając ze wzoru (1.20) w postaci

$$\Phi = -\frac{W_0}{2\pi k} \int_0^\infty a^{-1} (\alpha^2 + i\eta)^{-1} J_0(ar) da = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{W_0 \alpha_t}{2\pi k i\eta} \left[\ln \frac{a}{r} - K_0(r \sqrt{i\eta}) \right].$$

Znajomość funkcji Φ pozwala na wyznaczenie naprężeń zespolonych na podstawie wzorów

$$(1.24) \quad \sigma_{rr}^* = -2G \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^* = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi}^* = 0.$$

Otrzymamy tutaj

$$(1.25) \quad \begin{cases} \sigma_{rr}^* = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{W_0 G}{\pi k} \frac{e^{i(\omega t - \varepsilon)}}{i\eta} \left[\sqrt{i\eta} K_1(r \sqrt{i\eta}) - \frac{1}{r^2} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{W_0 G}{\pi k} \frac{e^{i(\omega t - \varepsilon)}}{i\eta} \left[\sqrt{i\eta} K_1(r \sqrt{i\eta}) + \eta i K_0(r \sqrt{i\eta}) - \frac{1}{r^2} \right] = \\ = -\sigma_{rr}^* - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t 2GT, \\ \sigma_{r\varphi}^* = 0. \end{cases}$$

Naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ uzyskamy jako część rzeczywistą funkcji σ_{rr}^* i $\sigma_{\varphi\varphi}^*$. Otrzymamy mianowicie

$$(1.26) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{W_0 G}{\pi \omega} \left\{ \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \left[kei_1 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - ker_1 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) \right] \cos(\omega t - \varepsilon) + \left[ker_1 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + kei_1 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) \right] \sin(\omega t - \varepsilon) + \frac{1}{r^2} \sin(\omega t - \varepsilon) \right\}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma_{rr} - W_0 \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{G}{\pi k} \left[ker_0 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) \cos(\omega t - \varepsilon) - \right. \\ \left. - kei_0 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) \sin(\omega t - \varepsilon) \right], \\ \sigma_{r\varphi} = 0. \end{cases}$$

Rozważmy jeszcze następujące zagadnienie. Niech w przestrzeni sprężystej w płaszczyźnie $x = \xi$ działają równomiernie rozłożone źródła ciepła

ne. Wydajność tych źródeł na jednostkę płaszczyzny $x = \xi$ oznaczamy przez $W = W_0 e^{i(\omega t - \varepsilon)}$. Równanie przewodnictwa ciepła ma tu postać

$$(1.27) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W}{k} \delta(x - \xi).$$

Wprowadzając funkcję $T(x, t) = U(x) e^{i(\omega t - \varepsilon)}$ doprowadzamy równanie różniczkowe cząstkowe (1.27) do równania zwyczajnego

$$(1.28) \quad \frac{d^2 U}{dx^2} - i\eta U = -\frac{W_0}{k} \delta(x - \xi).$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$(1.29) \quad U = \frac{W_0}{\pi k} \int_0^\infty (a^2 + i\eta)^{-1} \cos a(x - \xi) da = \frac{W_0}{2k} (i\eta)^{-1/2} \exp[-(x - \xi) \sqrt{i\eta}].$$

Stąd

$$(1.30) \quad T = \frac{W_0}{2k} (i\eta)^{-1/2} \exp[i(\omega t - \varepsilon) - (x - \xi) \sqrt{i\eta}].$$

Część rzeczywista powyższej funkcji określa poszukiwane pole temperatury:

$$(1.31) \quad T = \frac{W_0}{4k} (\eta)^{-1/2} \exp[-(x - \xi) \sqrt{\eta}] \cos[\omega t - \varepsilon - (x - \xi) \sqrt{\eta}].$$

Równanie (1.8) redukuje się do postaci

$$(1.32) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t T.$$

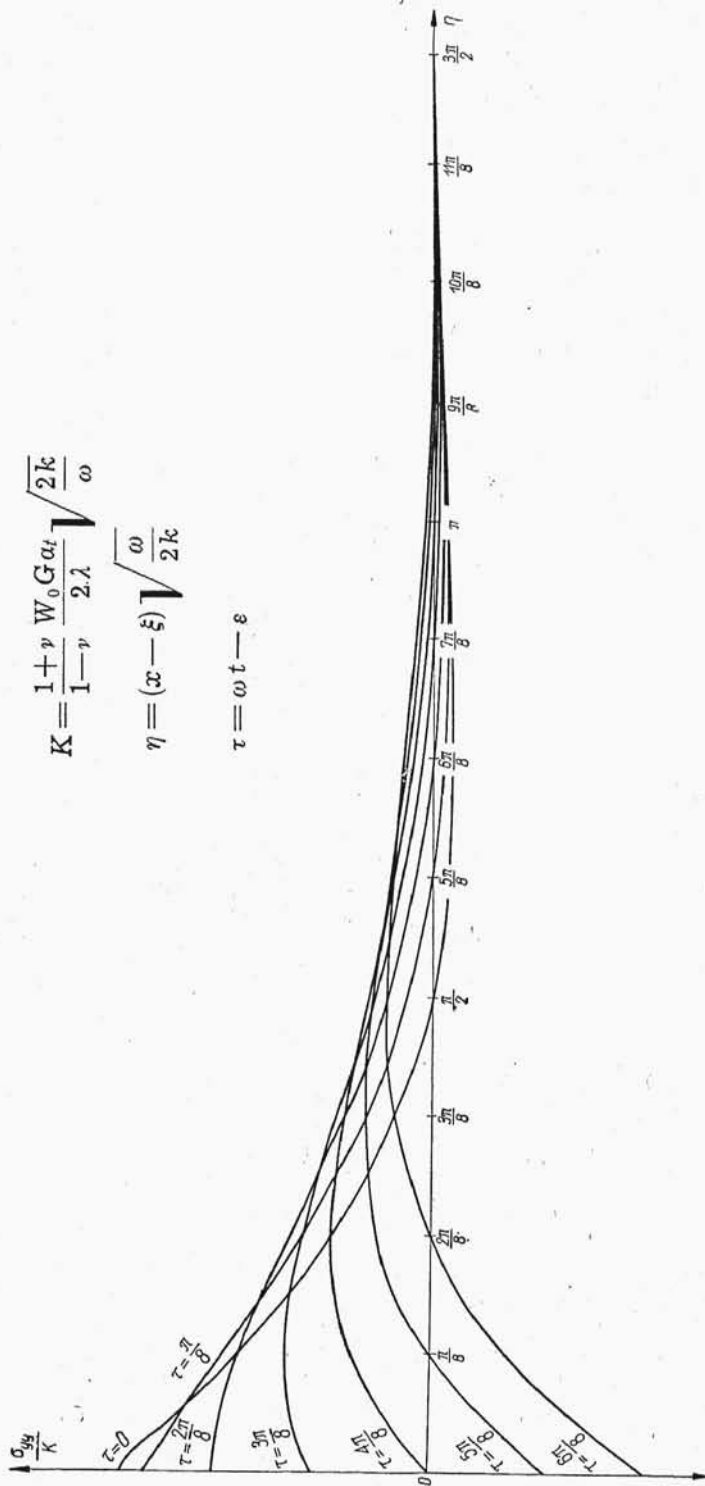
Ze wzorów (1.14) widoczne jest, że $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{zx} = 0$, $\sigma_{zy} = 0$, $\sigma_{xy} = 0$ oraz

$$(1.33) \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2G \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t T.$$

Zatem

$$(1.34) \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{G W_0 \alpha_t (1 + \nu)}{2k(1 - \nu)} \left(\frac{2k}{\omega} \right)^{1/2} \exp \left[-(x - \xi) \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right] \times \\ \times \cos \left[\omega t - \varepsilon - (x - \xi) \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right].$$

Na rysunku 2 przedstawiono funkcję σ_{yy} dla rozmaitych wartości parametrów $\mu = (x - \xi) \sqrt{\omega/2k}$ oraz $\tau = \omega t - \varepsilon$.

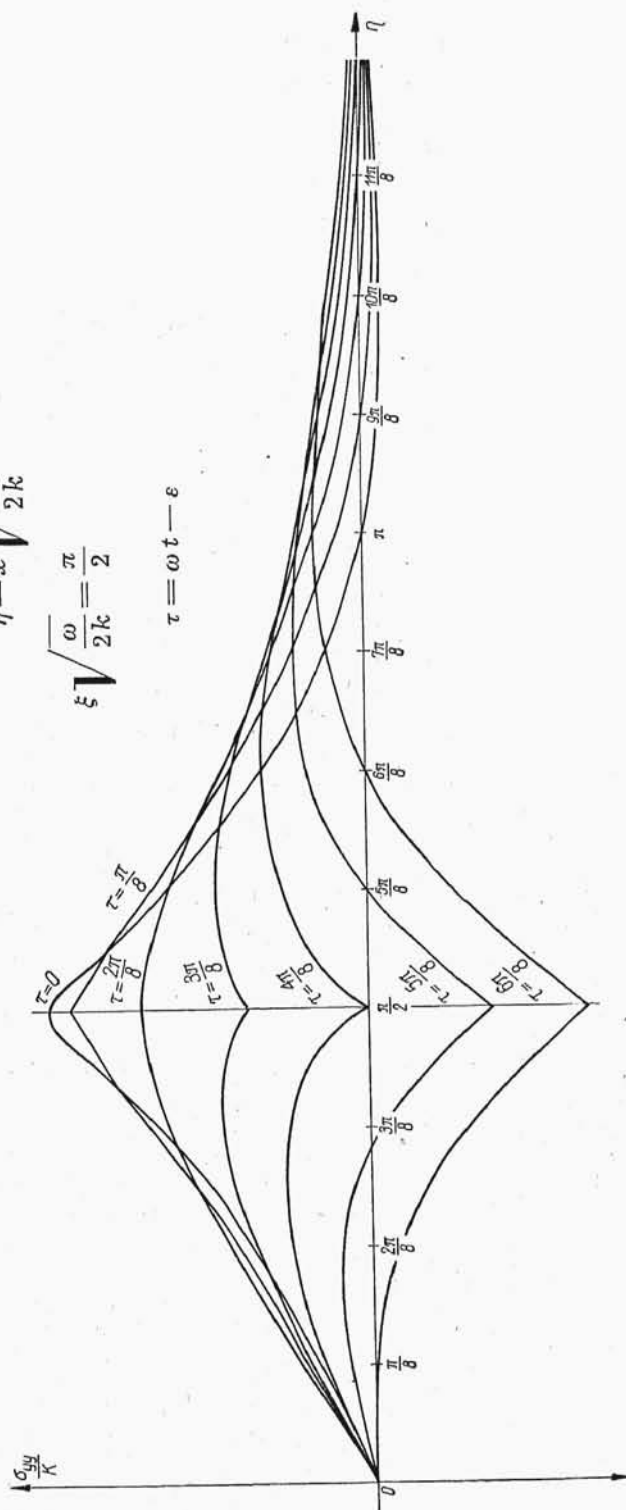


$$K = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{W_0 G \alpha_t}{2\lambda} \sqrt{\frac{2k}{\omega}}$$

$$\eta = x \sqrt{\frac{\omega}{2k}}$$

$$\xi \sqrt{\frac{\omega}{2k}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\tau = \omega t - \varepsilon$$



Rys. 3

Niech w płaszczyźnie $x = \xi$ działa dodatnie płaskie źródło ciepła, a w płaszczyźnie $x = -\xi$ ujemne źródło ciepła. W tym przypadku w płaszczyźnie $x = 0$ mamy $T = 0$ oraz $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xx} = 0$. Mamy tutaj do czynienia z przypadkiem półprzestrzeni sprężystej ($x > 0$), w której w płaszczyźnie $x = \xi$ działa płaskie źródło ciepła. W przypadku $x > \xi$ naprężenia σ_{yy} , σ_{zz} otrzymamy ze wzorów

$$(1.35) \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{G W_0 a_l (1 + \nu)}{2 k (1 - \nu)} \left(\frac{2k}{\omega} \right)^{1/2} \left\{ \exp \left[- (x - \xi) \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right] \times \right. \\ \times \cos \left[\omega t - \varepsilon - (x - \xi) \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right] - \\ \left. - \exp \left[- (x + \xi) \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right] \cos \left[\omega t - \varepsilon - (x + \xi) \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right] \right\}.$$

Dla $x < \xi$ należy na miejsce $(x - \xi)$ wstawić $(\xi - x)$.

Na rysunku 3 przedstawiono funkcję σ_{yy} dla rozmaitych wartości parametrów μ i τ .

Uzyskane rozwiązania dla źródła ciepła zmieniającego się w czasie w sposób harmoniczny posłużyć mogą dla skonstruowania rozwiązań dla źródeł ciepła zmieniających się w sposób periodyczny w czasie.

Rozwijając funkcję $W(t)$ w szereg Fouriera

$$(1.36) \quad W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n \omega t - \varepsilon_n),$$

otrzymamy pole temperatury i pole naprężeń jako wynik superpozycji poszczególnych wyrazów harmoniczych.

I tak w przypadku działania w nieograniczonej przestrzeni sprężystej źródła o wydajności $W(t)$ zmieniającego się w czasie w sposób periodyczny otrzymamy dla pola temperatury następujące wyrażenie:

$$(1.37) \quad T = \frac{1}{4 \pi k R} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp \left(- R \sqrt{\frac{\omega n}{2k}} \right) \cos \left(n \omega t - \varepsilon_n - R \sqrt{\frac{\omega n}{2k}} \right).$$

Ponadto uzyskane rozwiązania posłużyć mogą do wyznaczenia pola temperatury i naprężeń w przypadku źródeł ciepła rozmieszczonych w dowolnym obszarze Γ przestrzeni sprężystej. Jeśli w obszarze Γ działa źródło ciepła harmoniczne w czasie i będące funkcją miejsca, to pole temperatury wyrazimy w następujący sposób:

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{4 \pi k} \int \int \int_{(\Gamma)} \frac{W_0(\xi, \eta, \zeta)}{R} \exp \left(- R \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) \times \\ \times \cos \left(\omega t - \varepsilon - R \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) d\xi d\eta d\zeta,$$

gdzie

$$R = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}.$$

Literatura cytowana w tekście

[1] E. Melan i H. Parcus, *Wärmespannungen stationärer Temperaturfelder*, Wiedeń 1953.

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА, ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ГАРМОНИЧЕСКИ ВО ВРЕМЕНИ

Работа задается целью определить напряженное состояние, вызванное действием источника тепла, изменяющегося гармонически во времени. Рассматриваются последовательно: действие сосредоточенного источника, линейного источника и наконец плоского источника, находящегося в бесконечном упругом пространстве. Из решения уравнения теплопроводности (1.1) получают поле температуры. При использовании потенциала термоупругого перемещения Φ , связанного с температурой уравнением (1.8), определяют из уравнений (1.14) составляющие напряженного состояния σ_{ij} . Задача решается при пренебрежении инерционными силами, следовательно, как квазистатическая.

Summary

THE STATE OF STRESS IN AN ELASTIC SPACE DUE TO A SOURCE OF HEAT VARYING WITH TIME IN A HARMONIC MANNER

This paper seeks to determine stresses due to a heat source varying with time in a harmonic manner. A concentrated, linear and plane source is considered in an infinite elastic space. From the solution of the heat equation (1.1), the temperature field is obtained. Using the thermoelastic potential of displacements Φ , related to the temperature by the Eq. (1.8), the stress components σ_{ij} are found from the Eqs. (1.14). The problem is solved disregarding the inertia forces. It is therefore considered to be a quasi-static problem.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1957 r.
