

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM V • ZESZYT 3

WARSZAWA • 1957

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

O PEWNYM QUASI-USTALONYM ZAGADNIENIU TERMOSPŁĘŻYSTOŚCI

Celem pracy jest wyznaczenie stanu przemieszczenia i stanu naprężenia w półprzestrzeni sprężystej, wywołanych działaniem źródła ciepła o wydajności W , posuwającego się z jednostajną prędkością v w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą.

Zakładamy izotropię materiału zarówno w stosunku do jego własności termicznych, jak i sprężystych; wielkości charakteryzujące materiał niech będą stałe i niezależne od temperatury i naprężeń.

Pole temperatur i naprężeń zmieniać się będzie w czasie w miarę posuwania się źródła ciepła. W nieruchomym układzie współrzędnych ξ, η, ζ równanie przewodnictwa cieplnego jest następujące:

$$(1) \quad \nabla^2 T(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Tutaj $k = \lambda/\rho c$ przy czym λ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, ρ gęstością, a c ciepłem właściwym.

Przyjmując ruchomy układ współrzędnych x, y, z (w którego początku umieścimy źródło ciepła, a którego osie x i y leżą w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą) posuwający się wraz ze źródłem ciepła ze stałą prędkością v w kierunku osi ξ i stosując transformację

$$x = \xi - vt, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

otrzymamy równanie (1) w postaci, [1],

$$(2) \quad \nabla^2 T(x, y, z) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{v}{k} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

W równaniu tym nie występuje już czas t . Dla obserwatora posuwającego się wzdłuż osi ξ wraz ze źródłem ciepła pole temperatury i pole naprężeń będą niezmiennie w czasie.

Rozpatrzmy najpierw zadanie pomocnicze, mianowicie wyznaczmy stan naprężenia wywołany działaniem poruszającego się źródła ciepła w nieograniczonej przestrzeni sprężystej.

Rozwiązaniem równania (2) jest, [2].

$$(3) \quad T = \frac{W}{4\pi k} R^{-1} e^{-\mu(x+R)},$$

gdzie $\mu = v/2k$. Ilość ciepła Q wytwarzana przez źródło ciepła na jednostkę czasu obojętności wynosi $Q = W \varrho c$.

Rozwiązanie to można przedstawić również w postaci całek F o u r i e r a, zatem w postaci, która będzie przydatna w dalszych rozważaniach:

$$(4) \quad T = \frac{W}{2\pi^2 k} e^{-\mu x} \int_0^\infty K_0(r\sqrt{\beta^2 + \mu^2}) \cos \beta y d\beta =$$

$$= \frac{W}{2\pi^2 k} e^{-\mu x} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-x\delta}}{\delta} \cos \beta y \cos \gamma z d\beta d\gamma =$$

$$= \frac{W}{\pi^3 k} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a \sin ax \cos \beta y \cos \gamma z}{a^2 + \eta^2} da d\beta d\gamma,$$

gdzie

$$r = (y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \delta = (\beta^2 + \gamma^2)^{1/2}, \quad \eta = \mu + (\mu^2 + \delta^2)^{1/2}.$$

Dla wyznaczenia składowych stanu naprężenia wygodnie będzie posłużyć się tak zwanym potencjałem termosprężystego przemieszczenia Φ . Ta funkcja związana jest ze składowymi u , v i w stanu przemieszczenia następującymi związkami:

$$(5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w.$$

Wprowadzenie związków (5) do trzech równań przemieszczeniowych teorii sprężystości sprowadza je do jednego równania, [3],

$$(6) \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t T.$$

Tutaj a_t jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej, a ν liczbą P o i s s o n' a. Różniczkując (6) względem x i korzystając z równania (2) otrzymamy

$$(7) \quad \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a_t}{2\mu} \nabla^2 T,$$

skąd

$$(8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a_t}{2\mu} T, \quad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a_t}{2\mu} \int T dx.$$

Całka szczególna równania (6) będzie zatem miała postać:

$$(9) \quad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_l W}{8 \mu \pi k} \int_0^x R^{-1} \exp[-\mu(x+R)] dx = \\ = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_l W}{8 \mu \pi k} Ei[-\mu(x+R)],$$

gdzie

$$Ei(-s) = \int_s^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Funkcję Φ wyrazić można również całką

$$(10) \quad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_l W}{\pi^3 k} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{a \sin ax \cos \beta y \cos \gamma z}{(a^2 + \eta^2)(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)} da d\beta d\gamma.$$

Składowe stanu naprężenia wywołane działaniem źródła uzyskamy ze związków, [3],

$$(11) \quad \sigma_{ij} = -2G \left(\nabla^2 \Phi \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial i \partial j} \right) \quad (i, j = x, y, z),$$

gdzie δ_{ij} oznacza symbol Kroneckera.

Wyliczamy kolejno

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -\frac{KG e^{-\mu(x+R)}}{R(x+R)} \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \left(\mu R + \frac{R}{\mu+R} \right) \right], \\ \sigma_{yy} = -\frac{GK e^{-\mu(x+R)}}{R(x+R)} \left\{ 1 - \frac{z^2}{R^2} \left(1 + \frac{R}{x+R} + \mu R \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{x+R}{R} \right) \left[\frac{x}{R} + \mu(x+R) \right] \right\}, \\ \sigma_{zz} = -\frac{GK e^{-\mu(x+R)}}{R(x+R)} \left\{ 1 - \frac{y^2}{R^2} \left(1 + \frac{R}{x+R} + \mu R \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{x+R}{R} \right) \left[\frac{x}{R} + \mu(x+R) \right] \right\}, \\ \sigma_{xy} = GK y \frac{e^{-\mu(x+R)}}{R^3} (1 + \mu R), \quad \sigma_{xz} = GK z \frac{e^{-\mu(x+R)}}{R^3} (1 + \mu R), \\ \sigma_{yz} = GK y z \frac{e^{-\mu(x+R)}}{R^3 (x+R)} \left(1 + \mu R + \frac{R}{x+R} \right), \end{array} \right.$$

gdzie

$$K = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_t W}{8 \mu \pi k}.$$

Składowe stanu przemieszczenia otrzymamy ze wzorów (5):

$$(13) \quad \begin{cases} u = K e^{-\mu(x+R)} R^{-1}, & v = -K y e^{-\mu(x+R)} R^{-1} (x+R)^{-1}, \\ w = -K z e^{-\mu(x+R)} R^{-1} (x+R)^{-1}. \end{cases}$$

W przypadku szczególnym $\nu \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow 0$) otrzymamy ze wzorów (11) i (12) znane rozwiązania dla zagadnienia stacjonarnego, [3].

Umieścimy w początku układu współrzędnych sprężystej przestrzeni dipolowe źródło ciepła. W tym przypadku otrzymamy w płaszczyźnie $z=0$ rozwiązanie $T=0$ (z wyjątkiem punktu stanowiącego początek układu współrzędnych). W nieskończoności będzie również $T=0$. W ten sposób zrealizowaliśmy pole temperatury w półprzestrzeni sprężystej, wywołane działaniem źródła ciepła znajdującego się w płaszczyźnie $z=0$ ograniczającej półprzestrzeń.

Zgodnie z równaniami (3) i (4) otrzymamy

$$(14) \quad T = -\frac{W}{4 \pi k} \frac{\partial}{\partial z} (R^{-1} e^{-\mu(x+R)}) = \frac{W}{4 \pi k} \frac{z}{R^3} e^{-\mu(x+R)} (1 + \mu R)$$

albo

$$(15) \quad T = \frac{W}{\pi^3 k} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \gamma \sin \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z}{a^2 + \eta^2} d\alpha d\beta d\gamma.$$

Analogicznie otrzymamy funkcję Φ w postaci

$$(16) \quad \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_t W}{8 \mu \pi k} \frac{\partial}{\partial z} \{Ei[-\mu(x+R)]\} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_t W}{8 \mu \pi k} \frac{z e^{-\mu(x+R)}}{R(x+R)}$$

albo w postaci całki Fouriera

$$(17) \quad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_t W}{\pi^3 k} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \gamma \sin \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z}{(\alpha^2 + \eta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} d\alpha d\beta d\gamma.$$

Znajomość funkcji Φ pozwoli na wyznaczenie składowych stanu naprężenia ($\bar{\sigma}_{ij}$) ze wzorów (11).

Otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (18) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{xx} &= -2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = \frac{GKze^{-\mu(x+R)}}{R^2(x+R)} \left\{ \left(\mu + \frac{1}{R} + \frac{1}{x+R} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(1 + \frac{3x^2}{R^2} \right) - \frac{z^2 + y^2}{R(x+R)^2} [2 + 2\mu(x+R) + \mu^2(R+x)^2] \right\}, \\
 \bar{\sigma}_{yy} &= -2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = -\frac{GKze^{-\mu(x+R)}}{R^2} \left\{ \left(\mu + \frac{1}{R} \right) \left(\mu + \frac{3}{R} - \right. \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{x+R} - \frac{3y^2}{R^2(R+x)} \right) - \frac{1}{R^2(R+x)^2} \left[3(x^2 + y^2) - \right. \\
 &\quad \left. - z^2 \left(2\mu R + \frac{2R}{x+R} + \mu^2 R(x+R) \right) \right] \Bigg\}, \\
 \bar{\sigma}_{zz} &= -2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = -\frac{GKze^{-\mu(x+R)}}{R^2} \left\{ \left(\mu + \frac{1}{R} \right) \left(\mu + \frac{3}{R} - \right. \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{R+x} + \frac{2y^2}{R(R+x)^2} - \frac{3z^2}{R^2(R+x)} \right) - \frac{z^2 + x^2}{R^2(R+x)^2} + \\
 &\quad \left. + \frac{2y^2}{R(R+x)^3} + \frac{\mu^2 y^2}{R(x+R)} \right\}, \\
 \bar{\sigma}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{GKye^{-\mu(x+R)}}{R^3} \left[\mu^2 + 3 \left(\mu + \frac{1}{R} \right) \right], \\
 \bar{\sigma}_{xz} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{GKe^{-\mu(x+R)}}{R^2} \left[\frac{\mu^2 z^2}{R} - \left(\mu + \frac{1}{R} \right) \left(1 - \frac{3z^2}{R^2} \right) \right], \\
 \bar{\sigma}_{yz} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = \frac{GKye^{-\mu(x+R)}}{R^2(x+R)} \left[\left(\mu + \frac{1}{R} + \frac{1}{R+x} \right) \left(\frac{3z^2}{R^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2z^2}{R(x+R)} - 1 \right) - \frac{2z^2}{R^2(x+R)} + \frac{\mu^2 z^2}{R} \right].
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że stan naprężenia (σ_{ij}) nie spełnia wszystkich warunków brzegowych w płaszczyźnie $z = 0$. Mianowicie w płaszczyźnie tej znika naprężenie $\bar{\sigma}_{zz}$, pozostają jednak naprężenia tnące $\bar{\sigma}_{xz}$ i $\bar{\sigma}_{yz}$. Do stanu naprężeń $(\bar{\sigma}_{ij})$ dodać należy stan naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ będący rozwiązaniem zagadnienia przestrzennego izotermicznego, polegającego na wyznaczeniu stanu naprężeń $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ w półprzestrzeni sprężystej, wywołanego działaniem naprężeń stycznych $-\bar{\sigma}_{xz}$ i $-\bar{\sigma}_{yz}$, działających w płaszczyźnie $z = 0$. Składowe stanu $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ otrzymamy przy użyciu funkcji przemieszczenio-

wej φ B. G. Galerkin a. Wyrażone są one przy użyciu funkcji φ następującymi związkami:

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2} \right), & \bar{\sigma}_{yy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2} \right), \\ \bar{\sigma}_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(1-\nu) \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2} \right], & \bar{\sigma}_{xy} = -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z}, \\ \bar{\sigma}_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi \right), & \bar{\sigma}_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi \right]. \end{cases}$$

Funkcja φ spełniać powinna równanie biharmoniczne

$$(20) \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(21) \quad [\bar{\sigma}_{xz} + \bar{\sigma}_{xz}]_{z=0} = 0, \quad [\bar{\sigma}_{yz} + \bar{\sigma}_{yz}]_{z=0} = 0, \quad [\bar{\sigma}_{zz}]_{z=0} = 0,$$

oraz $\varphi = 0$ w nieskończoności.

Funkcję $\varphi = 0$ przyjmujemy w postaci

$$(22) \quad \varphi = \int_0^\infty \int_0^\infty Z(\alpha, \beta, z) \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta,$$

gdzie

$$Z = (A + B \vartheta z) e^{-\vartheta z}, \quad \vartheta = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.$$

Występujące w warunkach brzegowych funkcje $\bar{\sigma}_{xz}$ i $\bar{\sigma}_{yz}$ wyrazimy również za pomocą całki Fouriera:

$$(23) \quad \begin{cases} [\bar{\sigma}_{xz}]_{z=0} = \left[2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right]_{z=0} = -2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^2 P(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta, \\ [\bar{\sigma}_{yz}]_{z=0} = \left[2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right]_{z=0} = 2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \beta P(\alpha, \beta) \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta, \end{cases}$$

gdzie

$$P(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\gamma^2 d\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}.$$

Trzeci warunek brzegowy (21) prowadzi do związku $A = -B(1-2\nu)$.

Dwa pierwsze warunki grupy (21) prowadzą do tego samego związku, mianowicie

$$(24) \quad B = -2KG \frac{\alpha P(\alpha, \beta)}{\vartheta^2}.$$

Zatem

$$(25) \quad \varphi = -2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a}{\vartheta^2} P(a, \beta) (1 - 2\nu - \vartheta z) e^{-\vartheta z} \sin ax \cos \beta y da d\beta.$$

Stąd już ze wzorów (19) wyznaczamy składowe stanu naprężenia ($\bar{\sigma}_{ij}$):

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a P(a, \beta)}{\vartheta^2} [2(a^2 + \nu \beta^2) - a^2 \vartheta z] e^{-\vartheta z} \sin ax \cos \beta y da d\beta, \\ \bar{\sigma}_{yy} &= 2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a P(a, \beta)}{\vartheta^2} [2(\beta^2 + \nu a^2) - \beta^2 \vartheta z] e^{-\vartheta z} \sin ax \cos \beta y da d\beta, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= -2KGz \int_0^\infty \int_0^\infty a P(a, \beta) \vartheta^2 e^{-\vartheta z} \sin ax \cos \beta y da d\beta, \\ \bar{\sigma}_{xz} &= -2KG \int_0^\infty \int_0^\infty P(a, \beta) a^2 (1 - \vartheta z) e^{-\vartheta z} \cos ax \cos \beta y da d\beta, \\ \bar{\sigma}_{yz} &= -2KG \int_0^\infty \int_0^\infty P(a, \beta) a \beta (1 - \vartheta z) e^{-\vartheta z} \sin ax \cos \beta y da d\beta, \\ \bar{\sigma}_{xy} &= 2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a^2 \beta}{\vartheta} P(a, \beta) (2 - 2\nu - \vartheta z) e^{-\vartheta z} \cos ax \sin \beta y da d\beta. \end{aligned} \right.$$

Superpozycja składowych stanu naprężenia ($\bar{\sigma}_{ij}$) oraz ($\bar{\sigma}_{ij}$) daje ostateczne składowe stanu (σ_{ij}). Zauważmy, że dla $\nu \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow 0$) przechodzimy do zagadnienia stacjonarnego. W tym przypadku, jak to wykazano w pracy [4], znikają naprężenia σ_{xz} , σ_{yz} i σ_{zz} , a naprężenia σ_{xx} , σ_{yy} i σ_{xy} można przedstawić w postaci zamkniętej.

Rozważmy przypadek szczególny liniowego źródła ciepła posuwającego się z jednostajną szybkością v w nieograniczonej przestrzeni sprężystej. Niech źródło to będzie rozmieszczone ze stałą wydajnością w wzdłuż osi z . Wtedy pole temperatury określone jest za pomocą funkcji

$$(27) \quad T = \frac{w}{4\pi k} e^{-\mu x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} dz = \frac{w}{2\pi k} e^{-\mu x} K_0(\mu \sqrt{x^2 + y^2}),$$

gdzie

$$r_0 = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad K_0(\mu r_0) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i \mu r_0),$$

a $H_0^{(1)}(i \mu r_0)$ jest funkcją Hankela pierwszego rodzaju i zerowego rzędu.

Analogicznie funkcja Φ zgodnie ze wzorem (8) przyjmie postać

$$(28) \quad \Phi = -N \int_0^x e^{-\mu x} K_0(\mu r_0) dx, \quad N = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a_t w}{4\pi k},$$

co jest zgodne z wynikiem uzyskanym przez E. Melana, [5].

Niech teraz źródło liniowe równomiernie rozłożone wzdłuż osi z posuwa się w kierunku osi x z jednostajną prędkością v w płaszczyźnie $y = 0$ ograniczającej półprzestrzeń sprężystą. Pole temperatury określone jest tu funkcją

$$(29) \quad T = -\frac{w}{2\pi k} e^{-\mu x} \frac{\partial}{\partial y} [K_0(\mu r_0)] = \frac{w\mu}{2\pi k} \frac{y}{r_0} e^{-\mu x} K_1(\mu r_0),$$

albo też

$$(30) \quad T = \frac{w}{\pi^2 k} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \beta \sin \alpha x \sin \beta y}{\alpha^2 + \eta_0^2} d\alpha d\beta,$$

gdzie $\eta_0 = \mu + (\mu^2 + \beta^2)^{1/2}$.

W analogiczny sposób znajdziemy, że

$$(31) \quad \Phi = -N \mu y \int_0^x \frac{e^{-\mu x} K_1[\mu(x^2 + y^2)^{1/2}]}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dx$$

albo

$$(32) \quad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{w a_t}{\pi^2 k} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \beta \sin \alpha x \sin \beta y}{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \eta_0^2)} d\alpha d\beta.$$

Znajomość funkcji Φ zezwala na wyznaczenie składowych stanu naprężenia ($\bar{\sigma}_{ij}$).

Tak więc

$$(33) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{xx} = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2GN\mu^2 \frac{e^{-\mu x}}{r_0^2} xy K_2(\mu r_0), \\ \bar{\sigma}_{yy} = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2GN\mu^2 \frac{e^{-\mu x}}{r_0} [K_1(\mu r_0) + \frac{x}{r_0} K_2(\mu r_0)], \\ \bar{\sigma}_{zz} = -2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = -4GN \frac{\mu^2 y}{r_0} e^{-\mu x} K_1(\mu r_0), \\ \bar{\sigma}_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -2GN \frac{\mu}{r_0} e^{-\mu x} [(1 - \mu y) K_1(\mu r_0) - \mu \frac{y^2}{r_0} K_2(\mu r_0)], \\ \bar{\sigma}_{xz} = 0, \quad \bar{\sigma}_{yz} = 0. \end{cases}$$

Dla $y = 0$ jest $\bar{\sigma}_{yy} = 0$, ale $\bar{\sigma}_{xy} \neq 0$.

Do stanu $(\bar{\sigma}_{ij})$ dodajemy stan naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ tak dobrany, aby spełnione były wszelkie warunki brzegowe na brzegu $y = 0$. Dla wyznaczenia stanu $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ posłużymy się funkcją Airy'ego. Rozwiązać należy równanie biharmoniczne

$$(34) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0$$

z warunkami brzegowymi dla $y = 0$

$$(35) \quad \bar{\sigma}_{xy} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Funkcję F przyjmujemy w postaci

$$(36) \quad F = \int_0^\infty (A + B a y) e^{-a y} \sin a x da.$$

Z drugiego warunku grupy (35) wynika, że $A = 0$.

Z pierwszego warunku (35), zważywszy na (32) otrzymamy

$$(37) \quad F = \frac{8 \mu G N y}{\pi} \int_0^\infty P(a) a e^{-a y} \sin a x da,$$

gdzie

$$P(a) = \int_0^\infty \frac{\beta^2 d\beta}{(a^2 + \beta^2)(a^2 + \eta_0^2)}.$$

Znajomość funkcji F pozwoli na wyznaczenie składowych stanu $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$.

Otrzymamy tu

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{xx} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{8 \mu G N}{\pi} \int_0^\infty P(a) a^2 e^{-a y} (2 - a y) \sin a x da, \\ \bar{\bar{\sigma}}_{yy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{8 \mu G N}{\pi} y \int_0^\infty P(a) a^3 e^{-a y} \sin a x da, \\ \bar{\bar{\sigma}}_{zz} &= -\nu \nabla^2 F = \frac{16 \mu \nu G N}{\pi} \int_0^\infty P(a) a^2 e^{-a y} \sin a x da, \\ \bar{\bar{\sigma}}_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{8 \mu G N}{\pi} \int_0^\infty P(a) a^2 e^{-a y} (1 - a y) \cos a x da. \end{aligned} \right.$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xz} = 0, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{yz} = 0.$$

Ostateczne naprężenia otrzymamy ze związków $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}$. Dla $\nu \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow 0$), a więc w przypadku nieruchomego i ustalonego źródła ciepła znikają naprężenia σ_{xx} , σ_{yy} i σ_{xy} , a pozostaje jedynie naprężenie σ_{zz} .

Литература цитована в текście

- [1] D. Rosenthal, R. H. Cameron, *Temperature Distribution in Cylinder Heated by Point Source Moving Along Its Axis*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engr., t. 68, 1947.
- [2] D. Rosenthal, *The Theory of Moving Sources of Heat and Its Applications to Metal Treatments*, Trans. Amer. Soc. Engr., t. 68, 1946.
- [3] E. Melan, H. Parcus, *Wärmespannungen stationärer Temperaturfelder*, Wiedeń 1953.
- [4] W. Nowacki, *O pewnym ustalonym zagadnieniu przestrzennym termo-sprężystości*, Rozpr. Inżyn. 3 (1957).
- [5] E. Melan, *Wärmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Wärmequelle*, Ing. Archiv., 1953.

Резюме

О НЕКОТОРОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Работа имеет целью определить напряженное состояние в упругом полупространстве, вызванное действием источника тепла с производительностью W , перемещающегося с постоянной скоростью v в плоскости, ограничивающей полупространство. Помещая в плоскости $z = 0$ дипольный источник тепла, получено поле температуры (1.14) и (1.15), удовлетворяющее краевым условиям ($T = 0$) в плоскости $z = 0$ и в бесконечности.

Составляющие напряженного состояния ($\bar{\sigma}_{ij}$) были определены при использовании потенциала термоупругого перемещения Φ , удовлетворяющего уравнению (1.6). Знание частного интеграла этого уравнения [формулы (1.16) и (1.17)] дает возможность на основании зависимостей (1.11), определить составляющие напряженного состояния $\bar{\sigma}_{ij}$. Эти составляющие, однако, не удовлетворяют всем краевым условиям, а именно — напряжения $\bar{\sigma}_{xz}$ и $\bar{\sigma}_{yz}$ отличны от нуля в плоскости $z = 0$. К напряженному состоянию ($\bar{\sigma}_{ij}$) следует прибавить состояние ($\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$) удовлетворяющее в плоскости $z = 0$ краевым условиям (1.21). Составляющие состояния ($\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$) были определены при использовании функции перемещений Б. Г. Галеркина. Суперпозиция состояний ($\bar{\sigma}_{ij}$) и ($\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$) дает искомое напряженное состояние (σ_{ij}). Наконец, обсуждается особый случай, а именно напряженное состояние, вызванное в упругом полупространстве действием линейного источника тепла расположенного равномерно вдоль оси z и передвигающегося по направлению оси x с постоянной скоростью.

Summary

A QUASI-STEADY STATE THREE-DIMENSIONAL THERMO-ELASTIC PROBLEM

The object here is to determine the state of stress in an elastic semi-space due to the action of a source of heat of intensity W , moving with a constant velocity v in the plane bounding the semi-space. Allowing

a heat dipole to act in the plane $z = 0$, a temperature field is obtained, (1.14) and (1.15), satisfying the boundary conditions ($T = 0$) in the plane $z = 0$, and at infinity. The stress components $(\bar{\sigma}_{ij})$ are determined by means of the thermo-elastic potential of displacements Φ satisfying the equation (1.6). The knowledge of a particular integral of this equation the Eqs. (1.16) and (1.17) enables us to determine, on the basis of the Eqs. (1.11), the stress components $(\bar{\sigma}_{ij})$. These components do not, however, satisfy all boundary conditions, the stresses $\bar{\sigma}_{xz}$ and $\bar{\sigma}_{yz}$ not vanishing in the plane $z = 0$. The state $(\bar{\sigma}_{ij})$ satisfying the boundary conditions (1.21) in the plane $z = 0$, should be superposed over the stresses $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$. The $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ components are determined by means of the displacement function of B. G. Galerkin. The superposition of the stresses $(\bar{\sigma}_{ij})$ and $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ gives the stress (σ_{ij}) , which is sought. Finally, consideration is given to the particular case of the state of stress due to a linear heat source uniformly distributed along the z -axis and moving in the x -direction with a constant velocity.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1957 r.
