

J  
Nr 11. 144  
Politechnika Warszawska

K A A K A D E M I A N A U K

INSTITUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

---

# ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM IV • ZESZYT 1

WARSZAWA • 1956

---

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

W. NOWACKI I Z. OLESIAK

STATECZNOŚĆ POWŁOKI WALCOWEJ  
WZMOCNIONEJ ŻEBRAMI

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XXXVII

1. Celem pracy \*) jest podanie ścisłego rozwiązania zagadnienia wyboczenia powłoki walcowej, wzmocnionej żebrami podłużnymi i poprzecznymi, położonymi w sposób symetryczny w stosunku do powierzchni środkowej powłoki. Zakładamy, że między powłoką a żebrami nie występują siły tnące przy ich wspólnym zginaniu. Założenie to da w wyniku nieco wyższe siły krytyczne. Przyjmujemy, że styk powłoki z żebrzem następuje wzdłuż linii prostej (lub łuku koła), sprowadzamy zatem występujący w rzeczywistości kontakt powierzchniowy do liniowego. Wreszcie ograniczymy zagadnienie wyboczenia powłoki do obszaru sprężystego.

Punktem wyjścia rozważań będą równania różniczkowe odkształcenia powłoki jednocześnie zginanej i ściskanej W. Z. W ł a s o w a, [1].

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{R}{Eh} \nabla^4 \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N \nabla^4 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p. \end{cases}$$

Tutaj  $w$  oznacza promieniowe przemieszczenie powłoki,  $R$  jest promieniem koła,  $N = Eh^3/12 (1 - \nu^2)$  sztywnością powłoki na zginanie,  $E$  modułem sprężystości,  $h$  grubością powłoki,  $1/\nu$  liczbą Poissona, a  $\varphi$  funkcją naprężenia,  $p$  jest obciążeniem promieniowym, a  $q$  obciążeniem ściskającym o stałej intensywności (rys. 1).

Niech na powłokę działa obciążenie  $t$  wzdłuż linii  $y = \eta$  oraz obciążenie  $r$  wzdłuż linii  $x = \xi$ . Równanie powierzchni  $w(x, y)$  dla tego obciążenia przyjmie postać, [2],

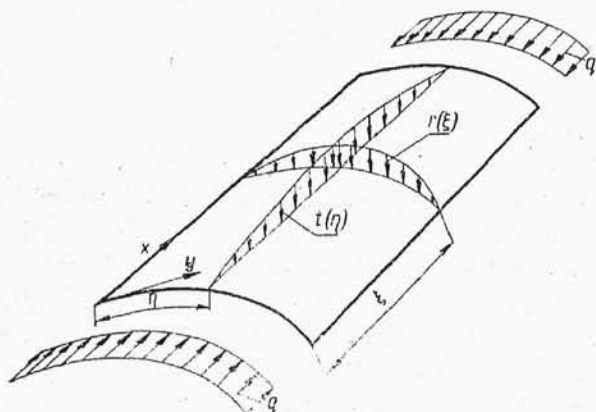
$$(1.2) \quad w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{r_m \sin a_n \xi}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y + \frac{2}{b} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{t_n \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$D_{n,m} = N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{Eh a_n^4}{R^2(a_n^2 + \beta_m^2)^2} - q a_n^2, \quad a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$

\*) Praca przedstawiona na posiedzeniu naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w dniu 8 listopada 1954.

W równaniu (1.2)  $r_m$  i  $t_n$  są współczynnikami rozwinięcia Fouriera funkcji  $r$  i  $t$ . Niech powłoka wzmocniona będzie żebrami poprzecznymi o sztywności zginania  $EI$  i żebrami podłużnymi o sztywności zginania  $EJ$ .



Rys. 1

Oba żebra są podparte w sposób przegubowo nieprzesuwny na jednym końcu, a w sposób przegubowo przesuwny na drugim swym końcu.

Dla  $q > q_{kr}$  powłoka i żebra wyginają się. Między powłoką a żebrami powstaną reakcje zwrócone w kierunku promienia krzywizny, reakcje wzajemnego oddziaływania. Oznaczmy

je przez  $t_k(x)$  dla  $k$ -tego żebra podłużnego i przez  $t_k(y)$  dla  $k$ -tego żebra poprzecznego. Załóżmy, że mamy  $p$  żeber poprzecznych i  $r$  żeber podłużnych.

Równanie różniczkowe ugięcia  $k$ -tego żebra ma postać

$$(1.3) \quad EJ_k \frac{d^4 \bar{w}_k}{dx^4} + (S_k + q A_k) \frac{d^2 \bar{w}_k}{dx^2} = -t_k(x).$$

Tutaj zakładamy, że część obciążenia ściskającego  $q$ , proporcjonalna do przekroju  $A_k$  żebra, przejdzie na żebro, a ponadto że żebro obciążone jest siłą skupioną  $S_k$ . Funkcja  $t_k(x)$  przedstawia oddziaływanie  $k$ -tego żebra na powłokę. Przyjmujemy rozwiązanie równania (1.3) w postaci szeregu trygonometrycznego

$$w_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(k)} \sin a_n x,$$

spełniającego wszelkie warunki brzegowe dla zginanego żebra. Zatem

$$(1.4) \quad \bar{w}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(k)}}{EJ_k} \frac{\sin a_n x}{a_n^4 - (S_k + q A_k) a_n^2}.$$

Równanie różniczkowe ugięcia  $k$ -tego żebra poprzecznego ma postać

$$EI_k \frac{d^4 \bar{w}_k(y)}{dy^4} = -r_k(y).$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

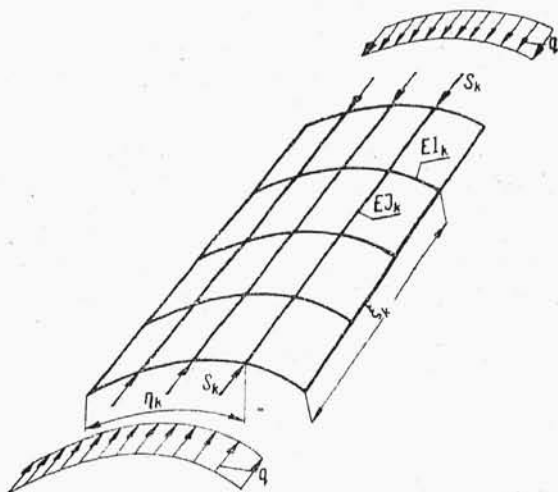
$$(1.5) \quad \bar{w}(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(k)} \sin \beta_m y}{EI \beta_m^4}.$$

Założyliśmy tu, że  $r_k(y)$  przedstawia oddziaływanie  $k$ -tego żebra poprzecznego na powłokę.

Równanie powierzchni odkształcenia  $w(x, y)$  powłoki, wywołanego siłami wzajemnego oddziaływania powłoki na żebro, przyjmie postać

$$(1.6) \quad w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{i=1}^p \sum_{n,m}^{\infty} \times \\ \times \frac{r_m^{(i)} \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y + \\ + \frac{2}{b} \sum_{j=1}^r \sum_{m,n}^{\infty} \frac{t_n^{(j)} \sin \beta_m \eta_j}{D_{n,m}} \times \\ \times \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Żebra i powłoka dla  $q > q_{kr}$  uginają się jednakowo wzdłuż linii żeber. Z warunku wspólnego ugięcia  $k$ -tego żebra podłużnego i powłoki, to jest z warunku



Rys. 2

$$w(x, \eta_k) = w_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

uzyskamy układ równań

$$(1.7.1) \quad \frac{t_n^{(k)}}{E J_k \alpha_n^4 - (S_k + q A_k) \alpha_n^2} + \frac{2}{a} \sum_{i=1}^p \sin \beta_m \eta_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(i)} \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} + \\ + \frac{2}{b} \sum_{j=1}^r t_n^{(j)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_j \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Z warunku wspólnego ugięcia powłoki i  $k$ -tego żebra poprzecznego

$$w(\xi_k, y) = \bar{w}(y) \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

otrzymamy następujący układ równań

$$(1.7.2) \quad \frac{r_m^{(k)}}{EI_k \beta_m^4} + \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{i=p} r_m^{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_k}{D_{n,m}} + \\ + \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{j=r} \sin \beta_m \eta_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(j)} \sin a_n \xi_k}{D_{n,m}} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, p).$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (1.7.1) i (1.7.2) prowadzi do warunku wyboczenia powłoki. Podany sposób rozwiązania jest rozwiązaniem ścisłym w ramach słuszności technicznej teorii powłok W. Z. W ł a s o w a.

Tak ogólnie sformułowany warunek wyboczenia dopuszcza szereg przypadków szczególnych, które warto rozpatrzyć oddzielnie.

2. Powłoka wzmocniona żebrami poprzecznymi. W tym przypadku układ dwu równań (1.7.1) i (1.7.2) uprości się do układu równań

$$(2.1) \quad \frac{r_m^{(k)}}{EI_k \beta_m^4} + \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{i=p} r_m^{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_k}{D_{n,m}} = 0.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\frac{a}{b} = \varrho, \quad \frac{EI_k}{bN} = \gamma_k, \quad S = \frac{q}{q_E},$$

gdzie

$$q_E = \frac{N \pi^2}{a^2}, \quad \mu = \frac{E h a^4}{R^2 N \pi^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left( \frac{a}{R} \right)^2,$$

otrzymamy

$$(2.2) \quad \frac{r_m^{(k)}}{2\gamma_k \varrho^3 m^4} + \sum_{i=1}^{i=p} r_m^{(i)} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_k}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - S n^2} = 0 \\ (k=1, 2, \dots, p).$$

Zauważmy przede wszystkim, że dla  $\gamma_k \rightarrow \infty$  ( $k=1, 2, \dots, p$ ) pierwszy wyraz układu równań (2.2) znika, a wyznacznik układu równań

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^{i=p} r_m^{(i)} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_k}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - S n^2} = 0$$

przyrównany do zera jest warunkiem wyboczenia powłoki walcowej podpartej na  $p$  niepodatnych żebrach, jest zatem warunkiem wyboczenia powłoki ciągłej w kierunku osi  $x$  oraz posiadającej  $(p + 1)$  przęseł. Zauważmy wreszcie, że dla  $\mu \rightarrow 0$  przechodzimy (przy  $R \rightarrow \infty$ ) z zagadnienia stateczności powłoki na zagadnienie stateczności płyt wzmocnionych żebrami poprzecznymi, [3].

Rozwiązanie układu równań (2.2) lub (2.3) upraszcza się znakomicie w przypadku symetrii układu względem osi  $x = a/2$ . W tym przypadku otrzymamy dla symetrycznej postaci wyboczenia  $r_m^{(1)} = r_m^{(p)}$ ,  $r_m^{(2)} = r_m^{(p-1)}$ , ... W przypadku antysymetrycznej postaci wyboczenia  $r_m^{(1)} = -r_m^{(p)}$ ,  $r_m^{(2)} = -r_m^{(p-1)}$ , ...

Rozważmy przypadek najprostszy powłoki wzmocnionej jednym tylko żebrzem leżącym w linii  $x = a/2$ . Układ równań (2.3) upraszcza się do jednego równania

$$r_m^{(1)} \left( \frac{1}{2\gamma\varrho^3 m^4} + \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin^2 a_n \xi}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^3 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - S n^2} \right) = 0;$$

stąd dla  $r_m^{(1)} \neq 0$  i  $\xi = a/2$  otrzymamy warunek wyboczenia w postaci

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\gamma\varrho^3 m^4} + \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^3 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - S n^2} = 0.$$

Ustalając parametry  $\varrho = a/b$ ,  $\gamma$  oraz ustalając  $m$  (ilość półfal) wyznaczyć możemy ze związku (2.4) drogą prób wartość  $S$ . Zmieniając parametr  $\gamma$  otrzymamy  $S = S(\gamma)$ . Funkcja ta ograniczona będzie od dołu wartością  $S_{0,kr}$  występującą przy założeniu  $\gamma = 0$ , od góry zaś wartością  $S$  występującą przy powstaniu linii węzłowej wzdłuż prostej  $x = a/2$ . Dla  $\gamma = \infty$  warunek wyboczenia (2.4) będzie jednoznaczny z warunkiem wyboczenia powłoki na brzegu  $x = a/2$  zupełnie utwierdzonej, na pozostałych brzegach swobodnie podpartej.

Rozpatrzmy dalej powłokę wzmocnioną dwoma jednakowymi żebrami, umieszczonymi symetrycznie względem osi  $x = a/2$ . Dla symetrycznej postaci wyboczenia ( $r_m^{(1)} = r_m^{(2)}$ ) otrzymamy

$$(2.5) \quad \frac{1}{m^4 \gamma \varrho^3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi}{6} \sin \frac{n\pi}{2}}{\Delta_{n,m}} = 0,$$

gdzie

$$\Delta_{n,m} = (n^2 + \varrho^2 m^2)^3 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - n^2 S.$$

Zauważmy, że licznik wyrażenia stojącego pod znakiem sumy znika dla parzystych wartości  $n$  oraz dla nieparzystych wielokrotności liczby 3. Dla pozostałych wartości ( $n = 1, 5, 7, 11, 13, \dots$ ) jest

$$\sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi}{6} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{3}{4}.$$

Równanie (2.5) możemy zatem napisać w postaci

$$(2.6) \quad \frac{1}{m^4 \gamma \varrho^3} + \frac{1}{3} \sum_n^{\infty} \frac{1}{\Delta_{n,m}} = 0 \quad (n = 1, 5, 7, 11, 13, 17, \dots).$$

Dla antysymetrycznej postaci wyboczenia ( $r_m^{(1)} = -r_m^{(2)}$ ) otrzymamy z układu równań (2.2)

$$(2.7) \quad \frac{1}{m^4 \gamma \varrho^3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{3} \sin \frac{n\pi}{6}}{\Delta_{n,m}} = 0.$$

Licznik wyrażenia znajdującego się pod znakiem sumy znika dla wszelkich nieparzystych wartości  $n$  oraz dla parzystych wielokrotności liczby 3. Dla pozostałych parzystych wartości  $n$  ( $n = 2, 4, 8, 10, 14, 16, \dots$ ) licznik wyrażenia znajdującego się pod znakiem sumy ma wartość  $3/4$ . Tak więc można równanie (2.7) napisać w postaci

$$(2.8) \quad \frac{1}{m^4 \gamma \varrho^3} + \frac{1}{3} \sum_n^{\infty} \frac{1}{\Delta_{n,m}} = 0,$$

gdzie  $n = 2, 4, 8, 10, 14, \dots$ .

Dla powłoki wzmocnionej trzema żebrami o jednakowych sztywnościach na zginanie i rozłożonych w jednakowych odstępach otrzymamy z przyrównania wyznacznika układu równań do zera (2.2) następujący warunek wyboczenia:

$$(2.9) \quad \frac{1}{m^4 \gamma \varrho^3} + \frac{1}{4} \sum_n^{\infty} \frac{1}{\Delta_{n,m}} = 0,$$

gdzie  $n = 1, 7, 9, 15, 17, 23, 25, \dots$  dla symetrycznej postaci wyboczenia powłoki, oraz  $n = 2, 8, 10, 16, 18, 24, 26, \dots$  dla antysymetrycznej postaci wyboczenia. Przechodząc do układu  $p$  żeber poprzecznych o jednakowych sztywnościach i leżących w jednakowych odstępach otrzymamy dla symetrycznej postaci wyboczenia, [4],

$$(2.10) \quad \frac{1}{m^4 \gamma \varrho^3} + (1+p) \sum_n^{\infty} \frac{1}{\Delta_{n,m}} = 0,$$



gdzie

$$n = k(1 + p) - p \frac{1 + (-1)^{k-1}}{2},$$

a  $k$  przyjmuje kolejne wartości 1, 2, 3 itd.<sup>1)</sup>

Zauważmy, że dla  $p = 4$  wskaźnik  $n = 1, 9, 17, 25, \dots$ . Dlatego też dla  $p > 3$  nie popełnimy znaczniejszego błędu, jeśli w równaniu warunkowym (2.10) pominiemy wszystkie wyrazy sumy poza pierwszym i napiszemy

$$(2.11) \quad \frac{1}{m^4 \gamma \varrho^3} + (1 + p) \frac{1}{\Delta_{1,m}} \approx 0.$$

Najmniejszą wartość krytyczną  $S_{kr}$  otrzymamy przy wyboczeniu odpowiadającym jednej półfali w kierunku osi  $y$  ( $m = 1$ ).

Z równania (2.11) otrzymamy

$$(2.12) \quad S_{kr} \approx \gamma \varrho^3 (1 + p) + (1 + \varrho^2)^2 + \frac{\mu}{(1 + \varrho^2)^2}.$$

**3. Powłoka wzmocniona żebrami podłużnymi.** Dla tego przypadku wyboczenia powłoki otrzymamy bezpośrednio z równania (1.7.1) dla  $r_m^{(i)}$  następujący układ równań:

$$(3.1) \quad \frac{t_n^{(k)}}{E J_k \alpha_n^4 - (S_k + q A_k) \alpha_n^2} + \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{j=r} t_n^{(j)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_j \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, r).$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\varrho = \frac{a}{b}, \quad \frac{E J_k}{N b} = \chi_k, \quad S = \frac{q}{q_E}, \quad q_E = \frac{N \pi^2}{a^2}, \quad \frac{A_k}{b} = \delta_k, \quad \frac{S_k b}{N \pi^2} = C_k.$$

Przy tych oznaczeniach można nadać układowi równań (3.1) następującą postać:

$$(3.2) \quad \frac{t_n^{(k)}}{n^4 \chi_k - S_n^2 \delta_k - C_n n^2 \varrho^2} + 2 \sum_{j=1}^{j=r} t_n^{(j)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_j \sin \beta_m \eta_k}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - S n^2} = 0.$$

Dla  $J_k, A_k \rightarrow \infty$ , a zatem dla  $\chi, \delta_k \rightarrow \infty$  (to znaczy przy nieskończeniu sztywnych i niepodatnych żebrach) układ równań (3.2) uprości się do postaci

$$(3.3) \quad \sum_{j=1}^{j=r} t_n^{(j)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_j \sin \beta_m \eta_k}{\Delta_{n,m}} = 0,$$

<sup>1)</sup> Rozważania dotyczące rozwiązania wzmocnienia płyt żebrami umieszczonymi w sposób regularny obszernie zostały podane w pracy [4].

a wyznacznik tego układu równań przyrównany do zera da wartości krytyczne  $S_{kr}$  dla powłoki ciągłej o  $r + 1$  przęsłach. Dla  $\mu = 0$  ( $R \rightarrow \infty$ ) przechodzimy z zagadnienia stateczności powłoki do zagadnienia stateczności prostokątnej płyty cienkiej ściskanej w kierunku osi  $x$  i wzmocnionej układem  $r$  żeber, [2].

Rozpatrzmy przypadek najprostszy, powłokę walcową wzmocnioną jednym tylko żebrzem podłużnym. Wyznacznik układu równań (3.2) uprości się znacznie i znajdziemy warunek

$$(3.4) \quad \frac{1}{n^4 \chi - S n^2 \delta - C_k n^2 \varrho^2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - S n^2} = 0.$$

W równaniu tym mamy kilka parametrów, które trzeba ustalić przy wyznaczeniu siły krytycznej. I tak poszukując wartości krytycznej  $S_k$  należy ustalić parametry  $\chi, \delta, \varrho$  oraz  $\mu$ . Rozpatrzmy przypadek szczególnie  $q = 0$  ( $S = 0$ ). Niech ponadto żebro znajduje się na osi symetrii powłoki. Z równania (3.4) otrzymamy

$$(3.5) \quad C_{kr} = \frac{S_k b}{N \pi^2} = \frac{n^2 \chi}{\varrho^2} + \frac{1}{2 n^2 \varrho^2 \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2}}}.$$

Mamy tu do czynienia z przypadkiem wyboczenia żebra podłużnego, wzmocnionego powłoką na brzegach swobodnie podpartą. Dla przyjętych wartości  $\varrho$  i  $\chi$  należy wyznaczyć kolejno  $C_{kr}$  przy wyboczeniu wzdłuż jednej, dwu, trzech itd. półfal. Układ wyboczy się według takiej ilości półfal, dla której  $S_{kr}$  będzie miało wartość najmniejszą. Żebro znajduje się w warunkach pręta ściskanego, spoczywającego na podłożu sprężystym, gdzie rolę podłoża sprężystego odgrywa powłoka. Postać wyboczenia powłoki zależy od stosunku sztywności na zginanie powłoki i żebra ( $\chi$ ) oraz od wymiarów powłoki ( $\varrho, \mu$ ). Zauważmy, że dla  $\chi = 0$ , a więc dla żebra o sztywności zginania równej zeru (żebro staje się jak gdyby prętem składającym się z części połączonych przegubami) obciążenie  $S$  przenosi się na powłokę i wzór

$$(3.6) \quad C_{kr} = \frac{1}{2 n^2 \varrho^2 \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2}}}$$

określa nam siłę krytyczną powłoki, ściskanej dwiema przeciwnie skierowanymi siłami. Po wprowadzeniu oznaczenia

$$M = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{R}\right)^2$$

napiszemy równanie (3.5) w postaci

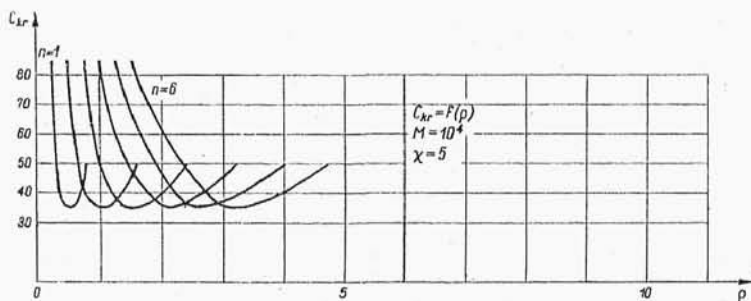
$$(3.7) \quad C_{kr} = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{1}{\frac{\varrho^2}{2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left( \frac{n^2}{p^2} + m^2 \right)^2 + M \frac{n^4}{\varrho^4} \frac{1}{\left( \frac{n^2}{\varrho^2} + m^2 \right)^2}}$$

W układzie współrzędnych  $C_{kr}, \varrho$  wykonano wykresy siły krytycznej dla  $n = 1, 2, 3, \dots, 10$  oraz dla  $0 < \varrho < 14$ . Przyjęto  $M = 10^4$ ; odpowiada to np. następującym wymiarom powłoki:  $b = 200$  cm,  $h = 1$  cm,  $R = 134$  cm,  $\nu = 0,3$ . Wykresy sporządzono dla wartości  $\chi = 5, 10, 20, 50$ , co przy wyżej założonych wymiarach powłoki daje następujące wartości momentów bezwładności:  $J = 91,58; 183,18; 366,3; 915,8$  cm<sup>4</sup>. Otrzymaliśmy w ten sposób cztery rodziny krzywych dla czterech wartości  $\chi$ . Wraz ze wzrostem  $\varrho$  odczytujemy  $\varrho$  z krzywej o coraz to większej wartości  $n$ . Wszystkie krzywe jednej rodziny osiągają minimum dla tej samej wartości  $C_{kr}$ . Zauważmy, że minimum krzywej  $C_{kr} = f(\chi, \varrho)$  ( $\chi = 5, n = 6$ ) mamy dla odciętej  $\varrho \approx 3,5$ , natomiast funkcja  $C_{kr} = f(\chi, \varrho)$  dla  $\chi = 10$  osiąga minimum dla  $\varrho > 5$  itd. Widzimy więc, że wraz ze wzrostem  $\chi$  krzywe rozciągają się, a ich minima przesuwają się w prawo. Wykresy sporządzono uwzględniając wyrazy szeregu  $m = 1, 3, \dots, 13$ . Błąd wynikający z uwzględnienia skończonej liczby wyrazów szeregu zależy od stosunku  $\varrho/n$ . Jest rzeczą oczywistą, że nie chodzi o błąd wynikający z przyjęcia równania przybliżonej, tzw. technicznej, teorii powłok. Orientacyjnie błąd nie przekracza 1% dla  $\varrho/n = 2$ , 2% dla  $\varrho/n = 1$ , 4% dla  $\varrho/n = 1/2$ .

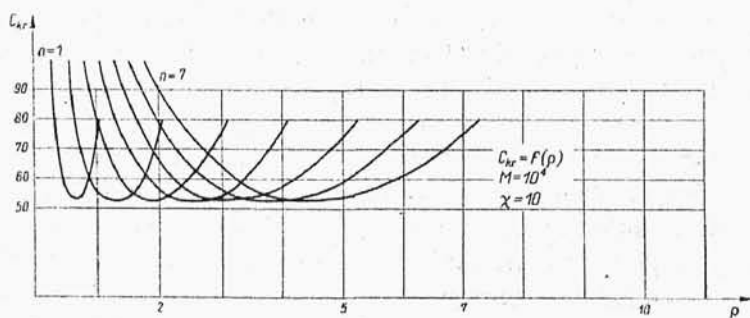
Wykres na rys. 7 przedstawia zależność  $C_{kr} = f(M)$ . Ustalimy tu, że  $n = 2$ ,  $\varrho = 2$ ,  $\chi = 10$ . Zmienną jest parametr  $M$ , który charakteryzuje wpływ zakrzywienia i wymiary geometryczne powłoki. Gdy  $R \rightarrow \infty$  ( $M \rightarrow 0$ ), równanie powłoki przechodzi w równanie płyty prostokątnej. Wykres sporządzono w skali logarytmicznej, przy czym  $C_{kr} = (f M)$  daje wartości bliskie minimum  $C_{kr}$  dla  $M \approx 10^4$ , natomiast przy  $M > 10^4$  otrzymujemy wartości krzywych na lewo, a przy  $M < 10^4$  na prawo od minimum.

Rysunki 8-10 podają wykresy krzywych  $C_{kr} = f(M, \varrho)$ , gdzie  $M = 10^2$ ,  $C_{kr} = f(M, \varrho)$  gdzie  $M = 10^4$ ,  $C_{kr} = f(M, \varrho)$ , gdzie  $M = 10^6$  dla  $\chi = 10$ . Z wykresów tych widać, że minima krzywych przy ustalonym  $n$  przesuwają się w lewo wraz ze wzorem  $M$ , przy czym odpowiadające im punkty zbliżają się do siebie, czyli wzrost tego parametru powoduje odwrotne skutki od wzrostu parametru  $\chi$ .

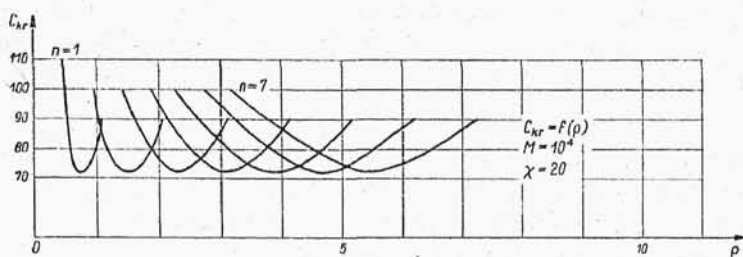
Rozpatrzmy przypadek powłoki ściskanej obciążeniem  $q$  oraz gdy  $S_k = 0$  ( $C = 0$ ). Dla żebra umieszczonego na osi symetrii powłoki znajdziemy z równania (3.4).



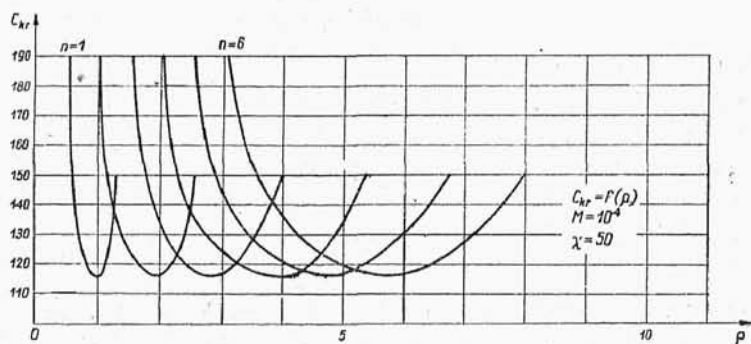
Rys. 3



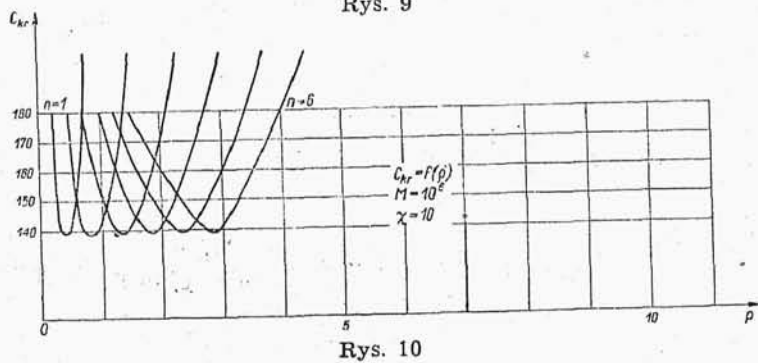
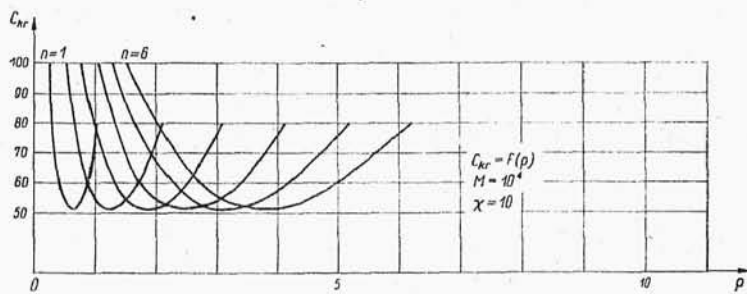
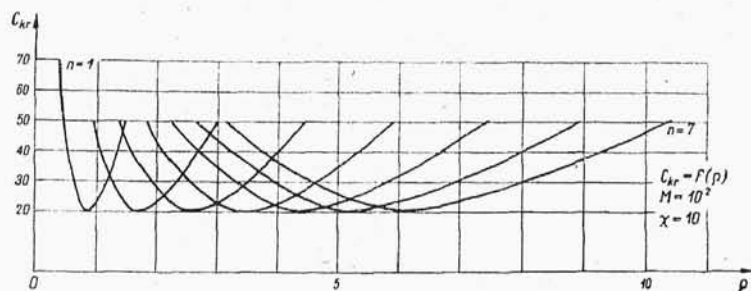
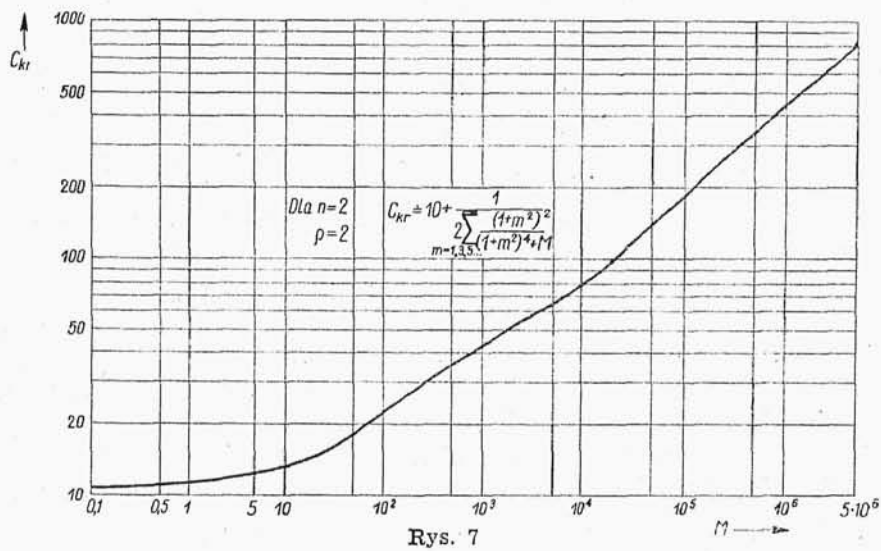
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



$$(3.8) \quad \chi = \frac{Sh}{n^2} + \frac{1}{2n^4 \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - Sn^2}}.$$

Spotkać się tu można z dwoma typami zadań. Pierwsze, prostsze, dotyczy dobrania takich wartości  $\gamma$  i  $h$  (a, więc takiego  $EJ$  i przekroju  $A$ ); które by przy danym  $a$  (a więc i danej wartości  $S$ ) spełniało równanie (3.8). Drugie, znacznie trudniejsze, dotyczy wyznaczenia wartości  $S_{kr}$  przy danym  $\chi$  i  $h$ . Przyjmując kolejno  $n = 1, 2, \dots$  (wyboczenie związane z jedną półfalą w kierunku osi  $x$ , z dwiema półfalami itd.) wyznaczyć możemy wartość  $S_{kr}$ .

W przypadku żeber jednakowych, wymiarów umieszczonych w jednakowych odstępach otrzymamy przy  $r$  żebrach podłużnych następujące związki:

$$(3.9) \quad C_{kr} = \frac{n^2 \chi}{\varrho^2} + \frac{1}{n^2 \varrho^2 (1+r) \sum_m^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2}}},$$

gdzie

$$m = k(1+r) - r \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Wzór (3.9) dotyczy przypadku wyboczenia żeber wzmocnionych powłoką, gdy występuje układ sił  $S$ . Dla  $r > 3$  można ograniczyć się do pierwszego wyrazu szeregu występującego we wzorze (3.9). W rezultacie otrzymamy

$$(3.10) \quad C_{kr} \approx \frac{n^2 \chi}{\varrho^2} + \frac{1}{n^2 \varrho^2 (1+r)} \frac{(n^2 + \varrho^2 m^2)^4 + \mu n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2}.$$

W przypadku braku sił ściskających  $S_k$  otrzymamy dla jednakowych żeber

$$(3.11) \quad \chi = \frac{Sh}{n^2} + \frac{1}{n^4 (1+r) \sum_m^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - Sn^2}},$$

gdzie

$$m = k(1+r) - r \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Dla  $r > 3$  otrzymamy z dostateczną dla celów technicznych dokładnością

$$(3.12) \quad \chi = \frac{S_{kr} h}{n^2} + \frac{1}{n^4 (1+r)} \left[ (n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \frac{\mu n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - S_k n^2 \right].$$

4. Wyboczenie powłoki wzmocnionej gęstą siatką żebier. Ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia prowadzi do wyznaczenia najmniejszego pierwiastka wyznacznika odpowiedniego układu równań. Przydatność jednak tego sposobu rozwiązania ograniczona jest trudnościami rachunkowymi, piętrzącymi się w przypadku większej ilości żebier. Droga wskazana prowadzi do celu w przypadku tylko kilku krzyżujących się żebier. Podamy więc prostszy sposób wyznaczania sił krytycznych, oparty na modelu powłoki ortotropowej.

Niech dana będzie powłoka walcowa wzmocniona walcowym rusztem żebrowym. Żebra podłużne o sztywności na zginanie  $EJ$  i o przekroju  $A$  rozmieszczone są w jednakowych odległościach  $a_1$ ; żebra poprzeczne o sztywności  $EI$  niech leżą w odległości  $b_1$  od siebie. Niech ponadto żebra podłużne ściskane będą siłami  $S_k$  i  $qA$ . Równanie różniczkowe ugięcia rusztu walcowego przy założeniu, że obciążenie działające nań skierowane jest w kierunku normalnej przy swobodnym podparciu jego brzegów ma postać

$$(4.1) \quad \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left( \frac{S}{b_1} + \frac{qA}{b_1} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = \bar{r}(x, y).$$

Równanie różniczkowe powłoki ściskanej wzdłuż krawędzi  $x = 0$ ,  $x = a$  oraz poddanej działaniu obciążenia  $r(x, y)$  skierowanego wzdłuż osi  $z$  ma postać

$$(4.2) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N \nabla^4 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = r(x, y), \quad \frac{R}{Eh} \nabla^4 \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Zakładamy równość ugięcia powłoki i rusztu oraz równość sił wzajemnego oddziaływania powłoki na ruszt w każdym punkcie obszaru powłoki

$$(4.3) \quad w(x, y) = \bar{w}(x, y), \quad r(x, y) = -\bar{r}(x, y).$$

Ostatnie warunki prowadzą do układu równań różniczkowych:

$$(4.4) \quad \begin{cases} N \nabla^4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left( \frac{S}{b_1} + q \frac{A}{b_1} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = \bar{r}(x, y), \\ \frac{R}{Eh} \nabla^4 \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{cases}$$

Przyjmijmy rozwiązanie tego układu równań w postaci

$$(4.5) \quad \varphi = a_{n,m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \quad w = b_{n,m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y,$$



które spełniają wszelkie warunki brzegowe na obwodzie swobodnie podpartej powłoki. Wstawiając funkcje (4.5) do układu (4.4) otrzymamy jako warunek wybożenia równanie

$$(4.6) \quad N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{Eh}{R^2} \frac{\alpha_n^4}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} - q\alpha_n^2 + \frac{EJ}{b_1} \alpha_n^4 + \\ + \frac{EI}{a_1} \beta_m^4 - \left( \frac{S}{b_1} + q \frac{A}{b_1} \right) \alpha_n^2 = 0,$$

albo, uwzględniając oznaczenia uprzednio wprowadzone a ponadto  $b = b_1(1+r)$ ,  $a = a_1(1+r)$ , otrzymamy równanie

$$(4.7) \quad (n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - Sn^2 + n^4(1+r)\chi + m^4(1+p)\varrho^2\gamma - \\ - c\varrho^2(1+r)n^2 - h(1+r)n^2S = 0.$$

Rozważmy przypadki szczególne.

(1) Niech ruszt składa się jedynie z żeber poprzecznych. W tym przypadku  $S = 0$ ,  $EJ = 0$ ,  $A = 0$  ( $c = \chi = \delta = 0$ ). Z równania (4.7) otrzymamy

$$(4.8) \quad S_{kr} = \frac{1}{n^2} \left[ (n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} + m^4(1+p)\gamma\varrho^2 \right].$$

Dla wybożenia związanego z jedną półfalą w kierunku osi  $x$  ( $n = 1$ ) wzór (4.8) pokrywa się ze wzorem (2.11).

(2) Niech ruszt składa się z żeber jedynie podłużnych. Niech obciążenie  $q$  działające wzdłuż linii  $x = 0$ ,  $x = a$  będzie równe zeru. Z równania (4.7) otrzymamy

$$(4.9) \quad C_{kr} = \frac{S_{kr}b}{N\pi^2} = \left[ (n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} \right] \frac{1}{\varrho^2(1+r)n^2} + \frac{n^2\chi}{\varrho^2}$$

zgodnie ze wzorem (3.10).

(3) Niech ruszt składa się z żeber podłużnych, ale niech  $S = 0$ . Wtedy z równania (4.7) znajdziemy

$$(4.10) \quad \chi = \frac{S_{kr}\delta}{n^2} + \frac{1}{n^4(1+r)} \left[ (n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - S_{kr}n^2 \right]$$

zgodnie ze wzorem (3.12).

(4) Niech powłoka będzie wzmocniona  $r$  żebrami podłużnymi i  $p$  żebrami poprzecznymi. Załóżmy, że powłoka nie jest ściskana ( $q = 0$ ). Z równania (4.7) otrzymamy



$$(4.11) \quad C_{kr} = \frac{1}{n^2 \varrho^2 (1+r)} \times \\ \times \left[ (n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} + n^4 (1+r) \chi + m^4 (1+p) \varrho^8 \gamma \right].$$

W przypadku płyty ściskanej w kierunku osi  $x$  siłami  $q$  otrzymamy przy  $p$  żebrach poprzecznych i  $r$  podłużnych ze wzoru (4.7)

$$(4.12) \quad S_{kr} = \left[ (n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} + n^4 (1+r) \chi + m^4 (1+p) \varrho^8 \gamma \right] \times \\ \times \frac{1}{n^2 [\delta (1+r) + 1]}.$$

5. Stateczność powłoki ortotropowej wzmocnionej żebrami. Rozpatrzmy następujące zadanie. Niech dana będzie powłoka wzmocniona gęstym rusztem żebrowym. Niech powłoka ta będzie wzdłuż linii  $x = a$  wzmocniona żebrzem poprzecznym o sztywności na zginanie  $EJ_a$ . Punktem wyjścia jest tu równanie różniczkowe powłoki ortotropowej pod działaniem obciążenia liniowego  $r$  wzdłuż prostej  $x = \xi$ . Układ równań (4.4) rozwiązujemy analogicznie do układu równań (1.1). Otrzymamy w wyniku

$$(5.1) \quad w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n,m} \frac{r_m \sin a_n \xi}{A_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$(5.2) \quad A_{n,m} = D_{n,m} + \frac{EJ}{b_1} a_n^4 + \frac{EI}{a_1} \beta_m^4 - q \frac{A}{b_1} a_n^2.$$

Założyliśmy tu brak sił ściskających  $S$ . Ugięcie żebra wzmacniającego powłokę ortotropową określa wzór

$$(5.3) \quad \bar{w}(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m}{EI_a \beta_m^4} \sin a_n x.$$

We wzorach (5.1) i (5.3)  $r_m$  oznacza współczynnik rozwinięcia Fouriera funkcji określającej wielkość wzajemnego oddziaływania żebra i powłoki wzdłuż prostej  $x = \xi$ . Z warunku wspólnego ugięcia żebra i powłoki znajdziemy, że

$$(5.4) \quad r_m \left( \frac{1}{EI_a \beta_m^4} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n^2 \xi}{A_{n,m}} \right) = 0.$$

Ponieważ  $r_m \neq 0$ , to (biorąc pod uwagę  $El_a/bN = \gamma_a$  i  $\xi = a/2$  oraz oznaczenia poprzednio wprowadzone) otrzymamy warunek wyboczenia w postaci

$$(5.5) \quad \frac{1}{2\gamma_a \varrho^3 m^4} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\bar{A}_{n,m}} = 0.$$

W równaniu tym przyjęto jeszcze oznaczenie

$$\begin{aligned} \bar{A}_{n,m} = & (n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - \\ & - Sn^2 + n^4(1+r)\chi + m^4(1+p)\varrho^3\gamma - \delta(1+r)n^2S. \end{aligned}$$

W sposób analogiczny do sposobu przedstawionego w p. 1 i 3 tej pracy można wyprowadzić podobne równania warunkowe wyboczenia powłoki ortotropowej wzmocnionej silniejszymi żebrami podłużnymi lub żebrami poprzecznymi i, podłużnymi jednocześnie. W poprzednich punktach omawiano jedynie przypadki swobodnego podparcia powłoki na brzegach. Bez trudu jednak podać można rozwiązania dla wyboczenia powłoki wzmocnionej regularną siatką żeber przy utwierdzeniu zupełnym na krawędziach od jednej do czterech. Sposób rozwiązania tego zagadnienia przedstawiony został dla powłoki nie wzmocnionej żebrami w pracy [2]. Podamy tu adaptację wskazanej tam drogi postępowania dla powłoki ortotropowej. Powierzchnia ugięcia  $w$  powłoki ortotropowej odpowiadająca działaniu momentów brzegowych  $A(y)$ ,  $B(x)$ ,  $C(y)$  i  $D(x)$  na brzegach powłoki  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $y=b$  przyjmie w omawianym przypadku postać

$$(5.6) \quad w = \frac{2}{a} \sum_{n,m}^{\infty} \{a_n [A_m - (-1)^n C_m] + \varrho \beta_m [B_n - (-1)^m D_n]\} \times \frac{\sin a_n x \sin \beta_m y}{A_{n,m}}.$$

Tutaj  $A_m$ ,  $B_n$ ,  $C_m$  i  $D_n$  są współczynnikami rozwinięcia F o u r i e r a funkcji określającej momenty utwierdzenia. Z warunków zupełnego utwierdzenia powłoki ( $\partial w / \partial n = 0$ ) na poszczególnych krawędziach otrzymamy z równania (5.6) układ jednorodnych równań, a stąd (z przyrównania do zera wyznacznika układu) otrzymamy poszukiwaną siłę krytyczną.

Rozważmy przypadek szczególny utwierdzenia zupełnego powłoki wzdłuż brzegu  $x=0$ . Na pozostałych brzegach niech będzie powłoka swobodnie podparta. Przyjmujemy zatem w równaniu (5.6)  $B_n = 0$ ,  $C_m = 0$ ,  $D_n = 0$ .

Z warunku brzegowego

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$$

otrzymamy

$$A_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{A_{n,m}} = 0.$$

Ponieważ  $A_m \neq 0$ , zatem warunek wyboczenia ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 : \{ (n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \mu \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} + n^4 (1+r) \chi + m^4 (1+p) \varrho^3 \gamma - \\ - S n^2 [(1+r) \delta + 1] \} = 0.$$

Najmniejszy pierwiastek  $S$  powyższego wyrażenia daje najmniejszą wartość siły krytycznej. Zauważmy, że dla  $R \rightarrow \infty$  (zatem dla  $\mu \rightarrow 0$ ) przechodzimy z zagadnienia wyboczenia powłoki do płyty prostokątnej.

Przykładów tego typu może być znacznie więcej.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Z. Własow, *Obszczaja tieorija oboloczek i jej prilożenie w tiechnike*, Moskwa 1949.
- [2] W. Nowacki, *Wyboczenie i drgania własne powłoki walcowej*, Arch. Mech. Stos. 1 (1955).
- [3] W. Nowacki, *Stateczność płyt prostokątnych wzmocnionych żebrami*, Arch. Mech. Stos. 2 (1954).
- [4] W. Nowacki i A. Kacner, *Stateczność rusztów wzmocnionych płytą*, Arch. Inż. Łąd. 1 (1955).

#### Резюме

#### УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

В работе приводится точное решение проблемы устойчивости цилиндрической оболочки с продольными и поперечными ребрами жесткости. Исходной точкой являются дифференциальные уравнения так наз. технической теории оболочек В. З. Власова. Решение задачи при помощи двойных тригонометрических рядов ведет к двойной системе уравнений (1.7.1) и (1.7.2). Приравнение к нулю детерминанта системы ведет к условию устойчивости изгиба. Рассматриваются только оболочки свободно опертые на краях. Дается способ решения для оболочки защемленной на одном до четырех краях, причем этот вопрос рассматривается более подробно в работе [2]. Рассматриваются следующие частные случаи: оболочка только с по-

перечными ребрами жесткости (наиболее простые случаи одного или двух ребер), оболочка с продольными ребрами (случай одного ребра), причем или нагрузка оболочки постоянна с интенсивностью  $q$ , или ребра нагружены силами  $S$ . Для последнего случая, оболочки с продольным ребром в середине, даны графики  $C_{kr} = f(\rho)$  и  $C_{kr} = f(M)$ . В п. 4 приводится решение для оболочки с густой сеткой ребер жесткости, используя модель ортотропной оболочки. Сетка ребер может состоять из одних продольных ребер, или из одних поперечных, или из поперечных и продольных ребер. Цилиндрическая оболочка с густой сеткой ребер и с одним ребром, обладающим особенно большой жесткостью, рассматривается в п. 5. Оболочка с густой сеткой ребер рассматривается как ортотропная.

### S u m m a r y

#### THE STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL WITH RIBS

In this paper the buckling problem of a cylindrical shell with longitudinal and transversal ribs is solved in an exact manner. The differential equations of the so-called engineer's theory of shells due to V. Z. Vlasov are taken as the starting point. The solution, by means of double trigonometric series, leads to a double system of equations (1.7.1) and (1.7.2). Taking the determinant of the system equal to zero we obtain the buckling condition. The cases under review concern only a free support at the edges. For a shell built in at one to four edges, an approximate solution is obtained; a more detailed discussion being given in Ref. [2]. Particular problems are investigated: a shell with transversal ribs only, in the most simple cases of one or two ribs, and a shell with one longitudinal rib. In these problems are discussed shells with uniformly distributed load  $q$  or loaded by forces  $S$  on the ribs. For the last case (a shell with a longitudinal rib in the middle) the diagrams  $C_{kr} = f(\rho)$  and  $C_k = f(M)$  are presented. In Sec. 4, a solution for a shell reinforced with a dense net of ribs is given, using the model of an orthotropic shell. The net can be composed of longitudinal or transversal ribs or both. A shell with a dense net of ribs and one particularly rigid rib is investigated in Sec. 5. The shell with a net of ribs is treated as orthotropic.