

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
INSTITUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

---

# ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM II • ZESZYT 1

WARSZAWA • 1954

---

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

WITOLD NOWACKI

STATYKA RUSZTÓW PŁASKICH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE

XVIII

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. Ogólna metoda rozwiązywania układów	145
2. Związki między siłami brzegowymi i składowymi	148
3. Równania kanoniczne	166
4. Belki ciągłe załamane i zakrzywione w planie	168
5. Ruszty o ortogonalnej siatce prętowej i ruszty nieregularne	175
6. Ruszty spoczywające na sprężystym podłożu	179

Ruszty płaskie stanowią istotny element konstrukcyjny wielu budowli inżynierskich. Występują one w rozmaitej postaci, jako stropy żebrowe, dźwigary załamane w planie, wreszcie jako układy ramowe obciążone siłami prostopadłymi do płaszczyzny układu ramowego.

Rozwiązanie tych układów metodą sił napotyka na znaczne trudności, spowodowane dużą ilością wielkości nadliczbowych, zwłaszcza w przypadku sztywnego połączenia prętów z węzłami. Dla stosunkowo prostego układu rusztowego, jakim jest ruszt o siatce ortogonalnej, podaje się w metodzie sił rozwiązanie przybliżone, pomijające sztywne połączenie belek w węzłach, a tym samym pomijające udział momentów skręcających w pracy rusztu.

Do rozwiązania tych złożonych układów posłużono się w niniejszej pracy metodą odkształceń. Stanowi ona dziś dualną formę rozwiązywania płaskich układów ramowych i znajduje szerokie zastosowanie w statyce ram wielokrotnie hyperstatycznych. Zaletą tej metody jest łatwość prawie że schematycznego ustawiania równań kanonicznych, w których współczynniki przy wielkościach nadliczbowych występują w postaci scałkowanej. Metoda omawiana posiada ponadto cechy poglądowości i zezwala na prostą interpretację mechaniczną przy rozwiązywaniu układów równań metodą iteracji.

Praca niniejsza jest próbą zastosowania metody odkształceń do złożonych układów rusztowych o węzłach sztywnych; jest zarazem rozszerzeniem dawniejszej pracy autora, [4], dotychczas nieopublikowanej.

W ustępie pierwszym podano ogólną metodę rozwiązywania układów, w ustępie drugim wyprowadzono ogólne wzory transformacyjne metody odkształceń dla prętów zakrzywionych i załamanych w planie.

W dalszych ustępach wyprowadzono równania kanoniczne metody odkształceń dla typowych układów rusztowych.

### 1. Ogólna metoda rozwiązywania układów

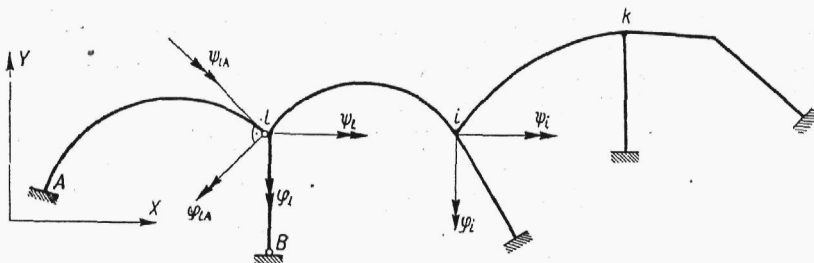
Rozważmy dowolną ramę płaską, składającą się z prętów prostych i zakrzywionych, połączonych ze sobą węzłami sztywnymi lub przegubami. Niech rama ta leży w płaszczyźnie  $XY$ . Niech rama będzie obciążona siłami skupionymi ( $P$ ) lub obciążeniem ciągłym ( $p$ ) o wektorach prostopadłych do płaszczyzny ramy oraz momentami skupionymi ( $M$ ) i w spo-



sób ciągły rozłożonymi ( $m$ ), o wektorach leżących w płaszczyźnie  $XY$ . Układ taki nazywać będziemy rusztem płaskim.

Przez «pręt» rusztu płaskiego, łączący dwa węzły, rozumiemy pręt pryzmatyczny przenoszący momenty zginające  $M$ , momenty skręcające  $\mathfrak{M}$  oraz siły tnące  $T$ . Wektory momentów  $M$ ,  $\mathfrak{M}$  leżą w płaszczyźnie układu, wektory sił tnących są prostopadłe do tej płaszczyzny. Oś pręta może być linią zakrzywioną, prostą lub załamana, przekrój pręta stały lub zmienny. W rozważaniach ograniczymy się do prętów o przekroju symetrycznym pełnym lub grubościennym; wyłączamy zatem z naszych rozważań profile cienkościennie stosowane w budownictwie stalowym.

Układy rusztowe o węzłach sztywnych są układami o wysokim stopniu statycznej niewyznaczalności. Rozwiązanie ich przy użyciu metody sił nastrocza znaczne trudności i doprowadza do rozwiązania układu równań kanonicznych o wielkiej liczbie wielkości nadliczbowych. W niniejszej pracy rozwiązanie tych złożonych układów nastąpi przy użyciu metody odkształceń.



Rys. 1

Zajmijmy się układem, przedstawionym na rys. 1. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego układ odkształci się, a węzły doznają przesunięć i obrotów. Weźmy pod uwagę węzeł  $i$  układu ramowego. Pod wpływem obciążenia węzeł ten dozna przesunięcia  $\delta_i$  prostopadłego do płaszczyzny ramy oraz obrotu o wektorze leżącym w płaszczyźnie układu. Nieznana jest wielkość przesunięcia  $\delta_i$ , wielkość obrotu oraz nachylenie wektora obrotu względem przyjętego układu współrzędnych.

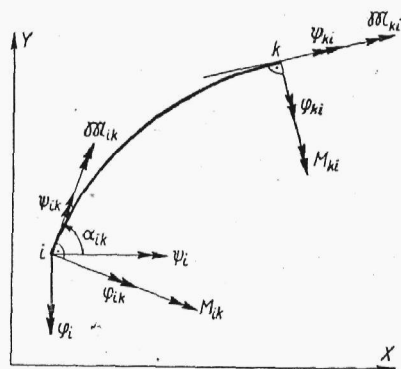
Obrót węzła rozłożymy na dwie składowe:  $\varphi_i$  i  $\psi_i$ . Tak więc węzeł scharakteryzowany jest przez trzy wielkości  $\delta$ ,  $\varphi$  i  $\psi$ . Stanowią one wielkości nadliczbowe układu lub, jak będziemy mówili krócej, «nadliczbowe».

W węźle podporowym, w którym pręt jest utwierdzony zupełnie, przesunięcie i obrót są równe zeru. Tak więc dla układu składającego się z  $r$  węzłów swobodnych i  $t$  podporowych ilość nadliczbowych geometrycznych wyniesie  $3r$ .

W przypadku węzła podporowego przegubowego, np. węzła  $B$ , otrzymamy  $\delta_B = 0$ ,  $\varphi_B \neq 0$  i  $\psi_B \neq 0$ . Zobaczymy później, że wielkości  $\varphi_B$  i  $\psi_B$  dadzą się łatwo wyeliminować z rozwiązań dzięki warunkowi zerowej wartości momentu zginającego i skręcającego w przegubie ( $M_B = \mathfrak{M}_B = 0$ ).

Rozważmy wreszcie węzeł swobodny, do którego jeden z prętów przymocowany jest za pomocą przegubu, na przykład węzeł  $l$  (rys. 1). Ruch węzła scharakteryzowany jest trzema wielkościami, przesunięciem  $\delta_l$  oraz składowymi obrotu  $\varphi_l$  i  $\psi_l$ . Przegub dozna przesunięcia  $\delta_l$  oraz obrotu o składowych  $\varphi_{lA}$  i  $\psi_{lA}$ . Te dwie wielkości można jednak wyeliminować z warunków zerowej wartości momentu zginającego i skręcającego ( $M_{lA} = 0$ ,  $\mathfrak{M}_{lA} = 0$ ) w przegubie. Tak więc w węźle swobodnym, w którym co najmniej dwa pręty są połączone w sposób sztywny, ilość nadliczbowych wyniesie trzy. W węźle, do którego wszystkie pręty przytwierdzone są za pomocą przegubu, ilość nadliczbowych ograniczy się do jednej, mianowicie do przesunięcia  $\delta$ .

Rozważmy pręt  $i-k$ , połączony w sposób sztywny z węzłami  $i$  oraz  $k$ . Dla dalszych rozważań będzie rzeczą wygodną rozłożyć składowe obroty węzła  $i$  na dwie składowe: składową  $\varphi_{ik}$  o wektorze, którego kierunek pokrywa się z kierunkiem normalnej, i składową  $\psi_{ik}$  o wektorze zwróconym w kierunku stycznej do osi pręta w punkcie  $i$ .



Rys. 2

Z rys. 2 odczytamy proste zależności

$$(1.1) \quad \varphi_{ik} = \varphi_i \sin \alpha_{ik} + \psi_i \cos \alpha_{ik}, \quad \psi_{ik} = \psi_i \cos \alpha_{ik} - \varphi_i \sin \alpha_{ik}.$$

Ponadto jest  $\delta_{ik} = \delta_i$ .

W przekrojach, którymi wycięto pręt, działają składowe stanu naprężeń: momenty zginające  $M_{ik}$  i  $M_{ki}$ , momenty skręcające  $\mathfrak{M}_{ik}$  i  $\mathfrak{M}_{ki}$ , o wektorach leżących w płaszczyźnie układu, oraz siły tnące  $T_{ik}$  i  $T_{ki}$  o wektorach prostopadłych do płaszczyzny  $XY$ . Wielkości te nazywać będziemy ogólnie siłami brzegowymi pręta  $i-k$ .

Siły brzegowe wyrazić możemy (uczynimy to szczegółowo w p. 2) jako funkcje liniowe obciążenia zewnętrznego oraz nieznanymi wielkościami  $\varphi_{ik}$ ,  $\varphi_{ki}$ ,  $\psi_{ik}$ ,  $\psi_{ki}$ ,  $\delta_{ik}$  i  $\delta_{ki}$ . Dzięki związkom (1.1) możemy siły brzegowe pręta  $i-k$  wyrazić jako funkcje liniowe obciążenia oraz nieznanymi wielkościami układu, przesunięć  $\delta_i$  i  $\delta_k$  oraz obrotów  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$ ,  $\varphi_k$  i  $\psi_k$ .

Ilości nieznanymi wielkościami nadliczbowymi przeciwstawić możemy tyleż równań warunkowych. Otrzymamy je ze zrównoważenia węzłów.

Dla każdego węzła swobodnego wyciętego z układu ustawić można trzy równania równowagi. Tak więc dla węzła  $i$  mamy

$$(1.2) \quad \Sigma M_{\varphi_i} = 0, \quad \Sigma M_{\psi_i} = 0, \quad \Sigma R_{\delta_i} = 0.$$

$M_{\psi_i}$  i  $M_{\varphi_i}$  oznaczają tutaj rzuty momentów przywęzłowych (które działają na węzeł z przeciwnymi zwrotami niż na pręt) na kierunki działania nadliczbowych  $\varphi_i$  i  $\psi_i$ , a  $R_{\delta_i}$  oznacza siły tnące, działające na węzeł. Jeżeli bezpośrednio na węzeł działa siła skupiona  $P_i$  oraz moment skupiony  $M_i$  o składowych  $M_{X_i}$  i  $M_{Y_i}$ , to zamiast (1.2) uzyskamy

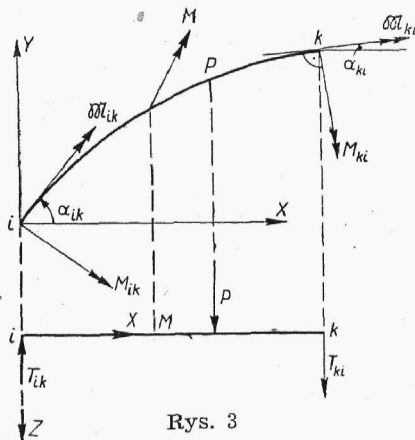
$$(1.3) \quad M_{X_i} + \Sigma M_{\varphi_i} = 0, \quad M_{Y_i} + \Sigma M_{\psi_i} = 0, \quad P_i + \Sigma R_{\delta_i} = 0.$$

Ponieważ siły przywęzłowe są funkcjami liniowymi nadliczbowych i obciążenia zewnętrznego, to z równań (1.3) wypisanych dla węzła swobodnego otrzymamy układ trzech równań liniowych niejednorodnych o nadliczbowych  $\varphi$ ,  $\psi$  i  $\delta$ .

Otrzymane z układu równań  $\delta$ ,  $\varphi$  i  $\psi$  pozwalają na wyznaczenie sił brzegowych poszczególnych prętów, a tym samym na wyznaczenie wielkości statycznych w dowolnym przekroju pręta. Tak naszkicowaną metodę rozwiązania rusztów płaskich rozwiniemy szczegółowo w dalszych ustępach niniejszej pracy.

## 2. Związki między siłami brzegowymi i składowymi stanu przemieszczeń

Weźmy pod uwagę pręt  $i$ - $k$  zakrzywiony lub załamany w planie, łączący dwa węzły: węzeł  $i$  oraz węzeł  $k$ . Niech pręt ten będzie obciążony siłami prostymi do płaszczyzny pręta i momentami o wektorach leżących w tej płaszczyźnie. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego pręt  $i$ - $k$  jako pręt układu rusztowego dozna odkształcenia. Końce pręta, węzły  $i$  oraz  $k$  doznają przesunięć i obrotów. Wydzielmy pręt dwoma przekrojami leżącymi nieskończenie blisko węzłów. W przekrojach tych działać będą składowe stanu naprężeń, momenty zginające  $M_{ik}$  i  $M_{ki}$ , momenty skręcające  $\mathfrak{M}_{ik}$  i  $\mathfrak{M}_{ki}$  oraz siły tnące  $T_{ik}$  i  $T_{ki}$ . Zwroty tych wielkości przyjęte jako dodatnie przedstawiono na rys. 3. Również na tym rysunku pokazano dodatnie zwroty składowych stanu przemieszczeń węzłów, przesunięcia  $\delta_{ik}$  i  $\delta_{ki}$ , kąty obrotu  $\varphi_{ik}$  i  $\varphi_{ki}$  oraz kąty skręcania



Rys. 3

$\varphi_{ik}$  i  $\varphi_{ki}$ . Dodatkowo zwroty tych wielkości pokrywają się z dodatnimi zwrotami składowych stanu naprężeń. Załóżmy, że wielkości  $\delta_{ik}, \dots, \varphi_{ki}$ , są wielkościami znanymi, z góry podanymi. Dążyć będziemy do wyrażenia wielkości statycznych brzegowych jako funkcji obciążenia zewnętrznego i znanych składowych stanu odkształceń węzłów. Układ jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny; dla jednoznacznego określenia sześciu sił brzegowych mamy do dyspozycji trzy równania równowagi. Przy założeniach małych ugięć w stosunku do liniowych wymiarów pręta, tj. proporcjonalności między odkształceniami i naprężeniami — słowem, przy założeniach statyki układów prętowych niewiotkich — związki między brzegowymi siłami statycznymi a obciążeniem zewnętrznym i składowymi stanu przemieszczeń węzłów będą związkami liniowymi.

Można je w sposób najogólniejszy przedstawić w następującej postaci:

$$(2.1.1) \quad M_{ik} = M_{ik}^0 + M_{ik}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + M_{ik}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + M_{ik}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + M_{ik}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + M_{ik}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + M_{ik}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.2) \quad M_{ki} = M_{ki}^0 + M_{ki}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + M_{ki}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + M_{ki}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + M_{ki}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + M_{ki}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + M_{ki}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.3) \quad \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + \mathfrak{M}_{ik}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.4) \quad \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + \mathfrak{M}_{ki}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.5) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 + T_{ik}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + T_{ik}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + T_{ik}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + T_{ik}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + T_{ik}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + T_{ik}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.6) \quad T_{ki} = T_{ki}^0 + T_{ki}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + T_{ki}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + T_{ki}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + T_{ki}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + T_{ki}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + T_{ki}^{\delta_{ki}} \delta_{ki}.$$

Związki te nazywamy wzorami transformacyjnymi metody odkształceń. Ze wzorów (2.1) wysnuć można szereg wniosków. Jeżeli uczynić  $\varphi_{ik} = 1$ , a pozostałe składowe stanu przemieszczeń węzłów oraz obciążenie zewnętrzne przyrównać do zera, to

$$\begin{aligned} M_{ik} &= M_{ik}^{\varphi_{ik}}, & \mathfrak{M}_{ik} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi_{ik}}, & T_{ik} &= T_{ik}^{\varphi_{ik}}, \\ M_{ki} &= M_{ki}^{\varphi_{ik}}, & \mathfrak{M}_{ki} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi_{ik}}, & T_{ki} &= T_{ki}^{\varphi_{ik}}. \end{aligned}$$

Wielkości  $M_{ik}^{\varphi_{ik}}, M_{ki}^{\varphi_{ik}}, \dots$ , są siłami przywęzłowymi powstałymi w układzie podstawowym geometrycznie wyznaczalnym ( $\varphi_{ik} = \varphi_{ki} = \dots = \delta_{ki} = 0$ ), wywołanymi stanem  $\varphi_{ik} = 1$ .

Jeżeli przyrównać do zera wszelkie składowe stanu przemieszczenia węzłów, to

$$\begin{aligned} M_{ik} &= M_{ik}^0, & \mathfrak{M}_{ik} &= \mathfrak{M}_{ik}^0, & T_{ik} &= T_{ik}^0, \\ M_{ki} &= M_{ki}^0, & \mathfrak{M}_{ki} &= \mathfrak{M}_{ki}^0, & T_{ki} &= T_{ki}^0. \end{aligned}$$

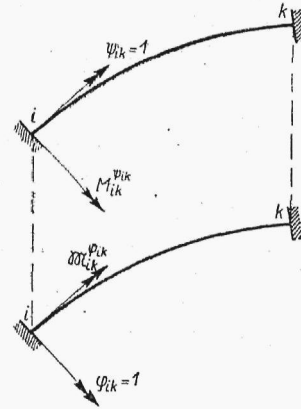
Wielkości  $M_{ik}^0, \dots, T_{ki}^0$  są zatem siłami przywęzłowymi pręta i-k obustronnie zupełnie utwardzonego, wywołanymi obciążeniem zewnętrznym.

Opierając się na twierdzeniu o wzajemności reakcji można znacznie uprościć związki (2.1). Rozważmy dwa kolejne stany w układzie podstawowym geometrycznie wyznaczalnym, stan  $\varphi_{ik}=1$  oraz stan  $\psi_{ik}=1$  (rys. 4).

Ze stanem  $\psi_{ik}=1$  związane są wielkości statyczne brzegowe  $M_{ik}^{\psi}, M_{ki}^{\psi}, \mathfrak{M}_{ik}^{\psi}, \mathfrak{M}_{ki}^{\psi}, T_{ik}^{\psi}$  i  $T_{ki}^{\psi}$ , a ze stanem  $\varphi_{ik}=1$  wielkości  $M_{ik}^{\varphi}, M_{ki}^{\varphi}, \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi}, \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi}, T_{ik}^{\varphi}$  i  $T_{ki}^{\varphi}$ .

Stosując twierdzenie o wzajemności reakcji otrzymamy

$$(2.2.1) \quad 1_{\psi_{ik}} \cdot \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi} = 1_{\varphi_{ik}} \cdot M_{ik}^{\psi}.$$



Rys. 4

W analogiczny sposób uzyskamy, przyjmując coraz to inne stany, dalsze związki

$$(2.2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi} &= M_{ki}^{\psi}, & \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\psi}, & M_{ik}^{\varphi} &= M_{ik}^{\psi}, & T_{ik}^{\varphi} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\delta}, & T_{ki}^{\varphi} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\delta}, \\ M_{ik}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi}, & T_{ki}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\delta}, & T_{ik}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\delta}, & T_{ik}^{\varphi} &= M_{ki}^{\delta}, & T_{ki}^{\varphi} &= M_{ik}^{\delta}, \\ T_{ik}^{\varphi} &= M_{ik}^{\delta}, & M_{ki}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi}, & T_{ki}^{\psi} &= M_{ki}^{\delta}, & \mathfrak{M}_{ik}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi}, \\ M_{ik}^{\delta} &= M_{ik}^{\delta}, & M_{ki}^{\delta} &= M_{ki}^{\delta}, & \mathfrak{M}_{ik}^{\delta} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\delta}, & \mathfrak{M}_{ki}^{\delta} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\delta}, \\ T_{ik}^{\delta} &= T_{ik}^{\delta}, & T_{ki}^{\delta} &= T_{ki}^{\delta}. \end{aligned} \right.$$

Powyższe związki zmniejszają ilość współczynników przy wielkościach  $\varphi_{ik}, \varphi_{ki}, \dots$  w równaniach (2.1) z trzydziestu sześciu do piętnastu. Stwierdzimy później, że dla poszczególnych kształtów prętów, na przykład dla prętów symetrycznych i prostych, uzyskamy dalsze zmniejszenie ilości współczynników.

Dzięki związkom (2.2.2.) napiszemy równanie transformacyjne (2.1) w następującej postaci:

$$(2.3.1) \quad M_{ik} = M_{ik}^0 + M_{ik}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + M_{ik}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi ik} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi ki} \psi_{ki} + T_{ik}^{\varphi ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.2) \quad M_{ki} = M_{ki}^0 + M_{ki}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + M_{ki}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi ik} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi ki} \psi_{ki} + T_{ki}^{\varphi ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.3) \quad \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi ik} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ik}^{\psi ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.4) \quad \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi ik} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ki}^{\psi ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.5) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 + T_{ik}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + T_{ik}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + T_{ik}^{\psi ik} \psi_{ik} + T_{ik}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ik}^{\delta ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.6) \quad T_{ki} = T_{ki}^0 + T_{ki}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + T_{ki}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + T_{ki}^{\psi ik} \psi_{ik} + T_{ki}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ki}^{\delta ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}).$$

Dalszym więc zadaniem będzie wyznaczenie wielkości  $M_{ik}^{\varphi ik}, \dots$ , leżących ponad linią schodkową we wzorach (2.3). Rozwiązanie tego trzykrotnie statycznie niewyznaczalnego zadania nastąpi metodą sił.

Wychodzimy z zasady prac wirtualnych przy wariacji stanu naprężenia.

Rozważmy dwa stany: stan odkształceń, wywołany obciążeniem zewnętrznym układu, osiadaniem i obrotami podpór oraz wzrostem temperatury (wzrost liczony w stosunku do temperatury montażowej pręta), oraz stan obciążeń wirtualnych,  $\bar{K}$ , będący w równowadze z reakcjami podporowymi przezeń wywołanymi,  $\bar{D}$ .

Równanie prac wirtualnych przyjmuje tu postać

$$(2.4) \quad \Sigma \bar{K} \delta + \Sigma \bar{D} \Delta = \int_s (\bar{M} d\varphi + \bar{\mathfrak{M}} d\psi + \bar{T} dh).$$

Tutaj  $\delta$  oznaczają rzuty przesunięć na kierunku działania sił  $\bar{K}$  w punktach zaczepienia tych sił,  $\Delta$  rzuty przesunięć podpór pręta na kierunku działania reakcji  $\bar{D}$ ,  $d\varphi$  jest obrotem,  $d\psi$  skreśleniem, a  $dh$  przesunięciem przekroju pręta wywołanym obciążeniem zewnętrznym. Wreszcie  $\bar{M}$ ,  $\bar{\mathfrak{M}}$  i  $\bar{T}$  są wielkościami statycznymi wywołanymi obciążeniem wirtualnym  $\bar{K}$ .

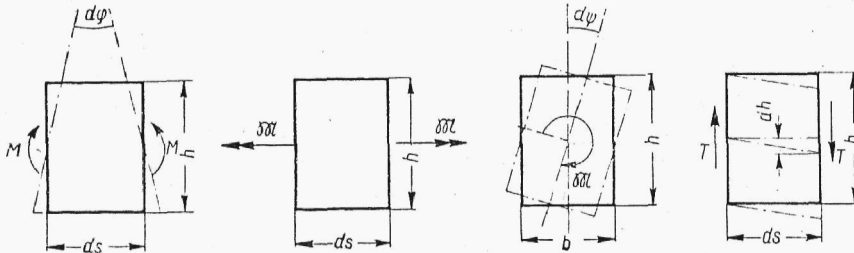
Z wytrzymałości materiałów wiadomo, że

$$(2.5) \quad d\varphi = \left( \frac{M}{EI} + \Delta t \frac{\varepsilon_t}{h} \right) ds, \quad d\psi = \frac{\mathfrak{M}}{GC} ds, \quad dh = k \frac{T}{GA} ds.$$

Tutaj  $M$ ,  $\mathfrak{M}$  i  $T$  są siłami przekroju wywołanymi obciążeniem zewnętrznym,  $E$  modułem sprężystości,  $G$  modułem odkształcenia postaciowego,

$I$  momentem bezwładności względem głównej poziomej osi bezwładności  $\alpha-\alpha$  przekroju,  $A$  polem przekroju pręta oraz  $C$  wielkością (w  $\text{cm}^4$ ) zależną od kształtu przekroju.

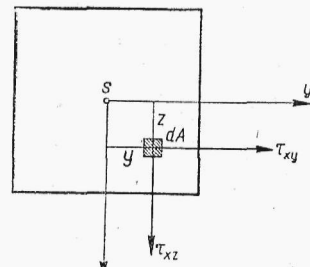
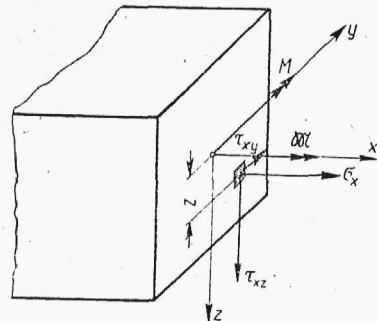
Iloczyn  $EI$  nazywamy sztywnością na zginanie,  $GC$  sztywnością na skręcanie, a  $GA/k$  sztywnością na ścinanie; wielkość  $k$  charakteryzuje kształt przekroju.



Rys. 5

Wielkości  $M$ ,  $\mathfrak{M}$  i  $T$ , składowe wypadkowej stanu naprężeń, związane są z naprężeniami normalnymi  $\sigma_x$  i tnącymi  $\tau_{xz}$  oraz  $\tau_{xy}$  następującymi zależnościami:

$$(2.6) \quad \begin{cases} M = \int_A \sigma_x z dA, \\ \mathfrak{M} = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA, \\ T = \int_A \tau_{xz} dA. \end{cases}$$



Rys. 6

Występująca we wzorze (2.5) wielkość  $\Delta t$  jest różnicą temperatur w skrajnych włóknach pręta. Zatem  $\Delta t = t_1 - t_2$ , gdzie  $t_2$  jest temperaturą w górnym włóknie, a  $t_1$  w dolnym włóknie pręta.

Ogólnie jest  $t(z) = t_0 + (\Delta t/h)z$ , gdzie  $t_0$  jest temperaturą na osi głównej bezwładności  $\alpha-\alpha$  pręta. W naszych rozważaniach nie będziemy omawiali wpływu jednostajnego wzrostu temperatury  $t_0$ ; wywołuje on siły tnące i podłużne  $T'$  i  $N'$ , o wektorach leżących w płaszczyźnie układu, oraz momenty  $M'$ , o wektorach prostopadłych do płaszczyzny układu. Mamy tu do czynienia z ramą płaską, a nie z rusztem.

Oznaczmy nadliczbowe naszego trzykrotnie niewyznaczalnego układu przez  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ .

Wielkości statyczne  $M$ ,  $\mathfrak{M}$  i  $T$  są funkcjami obciążenia zewnętrznego i nadliczbowych statycznych

$$(2.7) \quad S = [S] + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3 \quad (S = M, \mathfrak{M}, T).$$

Tutaj  $[S]$  jest wielkością w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym, wywołaną obciążeniem zewnętrznym, a  $S_i$  jest wielkością statyczną, wywołaną w układzie podstawowym stanem  $X_i = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Jeżeli jako obciążenie wirtualne przyjąć kolejne stany  $\bar{X}_i = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ), to w myśl związku (2.4) otrzymamy

$$(2.8) \quad \bar{1}_i \delta + \Sigma \bar{D}_i \Delta = \int_s (\bar{M}_i d\varphi + \bar{\mathfrak{M}}_i d\psi + \bar{T}_i dh) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Zważywszy, że  $\bar{1}_i \delta = 0$ , gdyż względne przesunięcia przekrojów w kierunku działania  $\bar{X}_i$  są równe zeru, otrzymamy układ trzech równań

$$(2.9) \quad \Sigma \bar{D}_i \Delta = \int_s (\bar{M}_i d\varphi + \bar{\mathfrak{M}}_i d\psi + \bar{T}_i dh) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wstawiając do związków (2.9) zależności (2.5) i (2.7) otrzymamy układ równań

$$(2.10) \quad \Sigma D_i \Delta = \delta_{i0} + X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + X_3 \delta_{i3} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

gdzie

$$(2.10.1) \quad \begin{cases} \delta_{ik} = \int_s \left( M_i \frac{M_k}{EI} + \mathfrak{M}_i \frac{\mathfrak{M}_k}{GC} + k T_i \frac{T_k}{GA} \right) ds, \\ \delta_{i0} = \int_s \left( [M] \frac{M_i}{EI} + [\mathfrak{M}] \frac{\mathfrak{M}_i}{GC} + k [T] \frac{T_i}{GA} \right) ds, \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

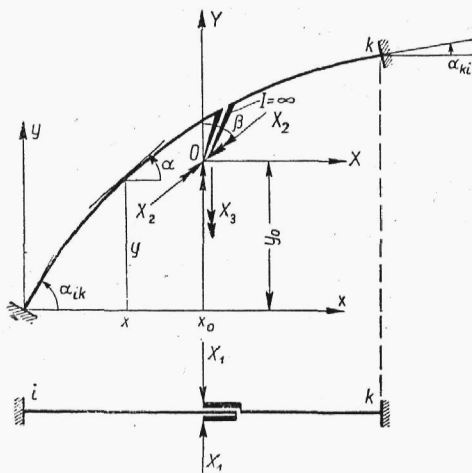
Wielkości nadliczbowych przyjmować będziemy w ten sposób, aby otrzymać układ trzech równań o jednej tylko niewiadomej w każdym równaniu:

$$(2.11) \quad L_i = \delta_{i0} + X_i \delta_{ii}, \quad L_i = \Sigma D_i \Delta \quad (i = 1, 2, 3).$$

Taką postać równań otrzymamy umieszczając nadliczbowe w biegunie sprężystym układu. Niech układem podstawowym, statycznie wyznaczalnym, będą dwa wsporniki (rys. 7). Nadliczbowe, siłę pionową  $X_1$  oraz momenty  $X_2$  i  $X_3$  zaczepiamy na końcach nieskończone sztywnych ramion, łączących biegun sprężysty 0 z przekrojem B. Współrzędne bie-



guna  $x_0$ ,  $y_0$  oraz kąt  $\beta$  zawarty między kierunkami działania momentów  $X_2$  i  $X_3$  dobieramy tak, aby w układzie równań (2.10) zniknęły wielkości  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{13}$  i  $\delta_{23}$ .



Rys. 7

Zażądamy zatem, aby

$$(2.12) \quad EI_c \delta_{ik} = \int (M_i M_k ds' + \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_k ds'' + T_i T_k ds''') = 0$$

$$(i, k = 1, 2, 3; \quad k \neq i).$$

Tutaj

$$ds' = \frac{I_c}{I} ds, \quad ds'' = \frac{EI_c}{GC} ds, \quad ds''' = \frac{EI_c}{GA} k ds.$$

Wielkość  $EI_c$  jest dowolnie przyjętą sztywnością zginania. Stanom  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  i  $X_3 = 1$  odpowiadają następujące wielkości statyczne:

$$(2.13) \quad \begin{cases} M_1 = -(x_0 - x) \cos \alpha - (y_0 - y) \sin \alpha = X \cos \alpha + Y \sin \alpha, \\ \mathfrak{M}_1 = -(x_0 - x) \sin \alpha + (y_0 - y) \cos \alpha = X \sin \alpha - Y \cos \alpha, \\ M_2 = \cos(\alpha + \beta), \quad M_3 = \cos \alpha, \quad \mathfrak{M}_2 = \sin(\alpha + \beta), \\ \mathfrak{M}_3 = \sin \alpha, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że ostatni człon pod znakiem całki (2.12) znika, gdyż  $T_2 = T_3 = 0$ .

Z warunku  $\delta_{23} = 0$  otrzymamy

$$(2.14) \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{\int \sin 2\alpha (ds' - ds'')}{2 \int (\cos^2 \alpha ds' + \sin^2 \alpha ds'')}.$$

Z warunku  $\delta_{12} = 0$  znajdziemy

$$(2.15) \quad y_0 = \frac{\int y [\sin a \cos(a+\beta) ds' - \cos a \sin(a+\beta) ds'']}{\int [\sin a \cos(a+\beta) ds' - \cos a \sin(a+\beta) ds'']} - \frac{\int x [\cos a \cos(a+\beta) ds' + \sin a \sin(a+\beta) ds'']}{\int [\sin a \cos(a+\beta) ds' - \cos a \sin(a+\beta) ds'']}.$$

Wreszcie z zależności  $\delta_{13} = 0$  otrzymamy

$$(2.16) \quad x_0 + y_0 \operatorname{ctg} \beta = \frac{\int x (\cos^2 a ds' + \sin^2 a ds'') + \frac{1}{2} \int y \sin 2a (ds' - ds'')}{\int (\cos^2 a ds' + \sin^2 a ds'')}.$$

Znając parametry  $x_0$ ,  $y_0$  i  $\beta$  występujące w związkach (2.13) łatwo wyznaczyć wielkości  $\delta_{i0}$  oraz  $\delta_{ii}$  ze wzorów

$$(2.17) \quad \begin{cases} EI_i \delta_{i0} = \int (M_i [M] ds' + \mathfrak{M}_i [\mathfrak{M}] ds'' + T_i [T] ds''' + M_i \frac{\Delta t}{h} \varepsilon_t ds), \\ EI_i \delta_{ii} = \int (M_i^2 ds' + \mathfrak{M}_i^2 ds'' + T_i^2 ds''') \end{cases}$$

( $i = 1, 2, 3$ )

W powyższych wzorach można pominąć wpływ sił tnących na wielkości  $\delta_{i0}$  oraz  $\delta_{ii}$  jako mały w porównaniu z wpływem momentów.

Należy jeszcze wyznaczyć wpływ przemieszczeń węzłów na stan naprężenia pręta.

Na rysunku 8a przedstawiono stan przemieszczeń węzłów, a na rys. 8b, 8c i 8d siły brzegowe wywołane stanami  $\bar{X}_1 = \bar{1}$ ,  $\bar{X}_2 = \bar{1}$  i  $\bar{X}_3 = \bar{1}$  w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym.

Rozważmy stan  $\bar{X}_1 = \bar{1}$ . Praca wirtualna sił brzegowych, wywołanych stanem  $\bar{X}_1 = \bar{1}$ , na rzeczywistych przemieszczeniach węzłów daje

$$(2.18.1) \quad L_1 = \Sigma \bar{D}_1 \Delta = \bar{1} (\delta_{ik} + \delta_{ki}) - \bar{1} c_i \varphi_{ik} - \bar{1} c_k \varphi_{ki} + \bar{1} d_i \psi_{ik} - \bar{1} d_k \psi_{ki}.$$

Analogicznie dla stanu  $\bar{X}_2 = \bar{1}$  znajdziemy

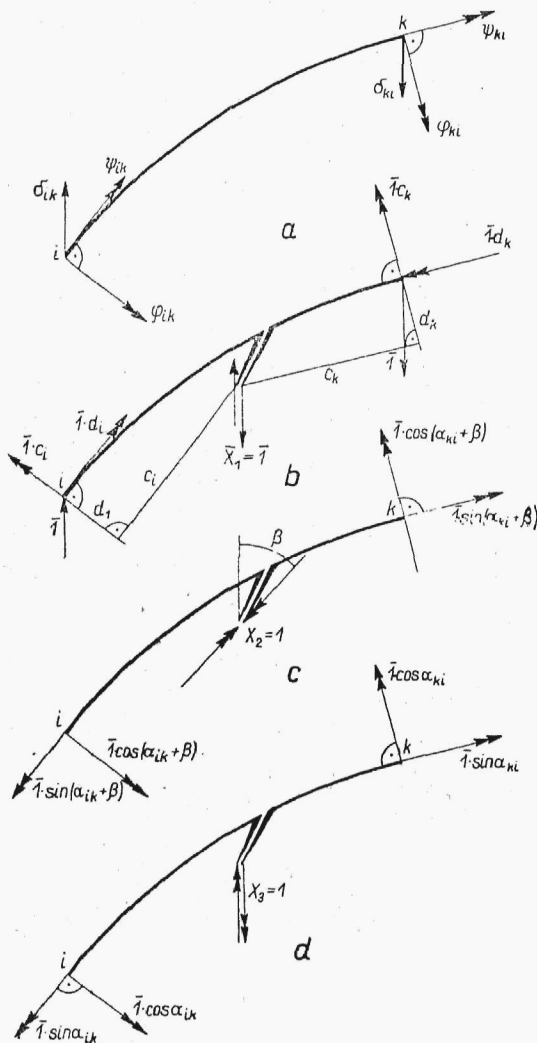
$$(2.18.2) \quad L_2 = \Sigma \bar{D}_2 \Delta = \bar{1} \cos(a_{ik} + \beta) \varphi_{ik} - \bar{1} \cos(a_{ki} + \beta) \varphi_{ki} - \\ - \bar{1} \sin(a_{ik} + \beta) \psi_{ik} + \bar{1} \sin(a_{ki} + \beta) \psi_{ki}.$$

Wreszcie dla stanu  $\bar{X}_3 = \bar{1}$  otrzymamy

$$(2.18.3) \quad L_3 = \Sigma \bar{D}_3 \Delta = \bar{1} \cos a_{ik} \varphi_{ik} - \bar{1} \cos a_{ki} \varphi_{ki} - \bar{1} \sin a_{ik} \psi_{ik} + \bar{1} \sin a_{ki} \psi_{ki}.$$

Znajomość elementów  $L_i$ ,  $\delta_{ii}$  oraz  $\delta_{i0}$  pozwala wyznaczyć nadliczbowe  $X_i$ .  
Otrzymujemy je ze wzoru

$$(2.19) \quad X_i = -\frac{\delta_{i0}}{\delta_{ii}} + \frac{L_i}{\delta_{ii}} = X_{i,0} + X_{i,1} \quad (i = 1, 2, 3).$$



Rys. 8

Znając wartości nadliczbowych przystąpić można do wyprowadzenia wzorów transformacyjnych (2.7), które wypisujemy dla przekrojów przywęzłowych  $i$  oraz  $k$ .

Korzystając z brzegowych wielkości statycznych, wywołanych stanami  $X_1=1$ ,  $X_2=1$  i  $X_3=1$  (rys. 8a, 8b, 8c), oraz mając na uwadze dodatnie kierunki sił przywęzłowych według rys. 3 piszemy

$$(2.20) \quad \begin{cases} M_{ik} = -X_1 c_i + X_2 \cos(\alpha_{ik} + \beta) + X_3 \cos \alpha_{ik} + [M_{ik}], \\ M_{ki} = -X_1 c_k - X_2 \cos(\alpha_{ki} + \beta) - X_3 \cos \alpha_{ki} + [M_{ki}], \\ \mathfrak{M}_{ik} = X_1 d_i - X_2 \sin(\alpha_{ik} + \beta) - X_3 \sin \alpha_{ik} + [\mathfrak{M}_{ik}], \\ \mathfrak{M}_{ki} = -X_1 d_k + X_2 \sin(\alpha_{ki} + \beta) + X_3 \sin \alpha_{ki} + [\mathfrak{M}_{ki}], \\ T_{ik} = X_1 + [T_{ik}], \\ T_{ki} = X_1 + [T_{ki}]. \end{cases}$$

Jeżeli do powyższych wzorów wstawić wielkości  $X_i$  ze wzoru (2.19), to po prostych przekształceniach uzyskamy wzory (2.20) w postaci analogicznej do (2.3):

$$(2.21) \quad \begin{cases} M_{ik} = M_{ik}^0 + \mu_{ik} \varphi_{ik} + \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ki} - \nu_{ik} \psi_{ik} + \bar{\nu}_{ik} \psi_{ki} - \mu'_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ik} + \mu_{ki} \varphi_{ki} - \bar{\nu}_{ki} \psi_{ik} + \nu_{ki} \psi_{ki} - \mu'_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 - \nu_{ik} \varphi_{ik} - \bar{\nu}_{ik} \varphi_{ki} + k_{ik} \psi_{ik} - \bar{k}_{ik} \psi_{ki} + k'_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 + \bar{\nu}_{ki} \varphi_{ik} + \nu_{ki} \varphi_{ki} - \bar{k}_{ik} \psi_{ik} + k_{ki} \psi_{ki} - k'_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \mu'_{ik} \varphi_{ik} - \mu'_{ki} \varphi_{ki} + k'_{ik} \psi_{ik} - k'_{ki} \psi_{ki} + \mu''_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ T_{ki} = T_{ki}^0 - \mu'_{ki} \varphi_{ik} - \mu'_{ik} \varphi_{ki} + k'_{ik} \psi_{ik} - k'_{ki} \psi_{ki} + \mu''_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}). \end{cases}$$

Tutaj przyjęto następujące oznaczenia:

$$(2.22) \quad \begin{cases} \mu_{ik} = \frac{c_i^2}{\delta_{11}} + \frac{\cos^2(\alpha_{ik} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\cos^2 \alpha_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \bar{\mu}_{ik} = \frac{c_i c_k}{\delta_{11}} - \frac{\cos(\alpha_{ik} + \beta) \cos(\alpha_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} - \frac{\cos \alpha_{ik} \cos \alpha_{ki}}{\delta_{33}}, \\ \nu_{ik} = \frac{c_i d_i}{\delta_{11}} + \frac{\cos(\alpha_{ik} + \beta) \sin(\alpha_{ik} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\cos \alpha_{ik} \sin \alpha_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \bar{\nu}_{ik} = \frac{c_k d_i}{\delta_{11}} - \frac{\cos(\alpha_{ki} + \beta) \sin(\alpha_{ik} + \beta)}{\delta_{22}} - \frac{\cos \alpha_{ki} \sin \alpha_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \bar{\nu}_{ki} = \frac{c_i d_k}{\delta_{11}} + \frac{\cos(\alpha_{ik} + \beta) \sin(\alpha_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\cos \alpha_{ik} \sin \alpha_{ki}}{\delta_{33}}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \mu'_{ik} &= \frac{c_i}{\delta_{11}}, \\
 \mu'_{ki} &= \frac{c_k}{\delta_{11}}, \\
 \mu_{ki} &= \frac{c_k^2}{\delta_{11}} + \frac{\cos^2(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\cos^2 a_{ki}}{\delta_{33}}, \\
 \nu_{ki} &= \frac{c_k d_k}{\delta_{11}} - \frac{\cos(a_{ki} + \beta) \sin(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} - \frac{\cos a_{ki} \sin a_{ki}}{\delta_{33}}, \\
 k_{ik} &= \frac{d_i^2}{\delta_{11}} + \frac{\sin^2(a_{ik} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\sin^2 a_{ik}}{\delta_{33}}, \\
 k_{ki} &= \frac{d_k^2}{\delta_{11}} + \frac{\sin^2(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\sin^2 a_{ki}}{\delta_{33}}, \\
 \bar{k}_{ik} &= \frac{d_i d_k}{\delta_{11}} + \frac{\sin(a_{ik} + \beta) \sin(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\sin a_{ik} \sin a_{ki}}{\delta_{33}}, \\
 k'_{ik} &= \frac{d_i}{\delta_{11}}, \quad k'_{ki} = \frac{d_k}{\delta_{11}}, \quad \mu''_{ik} = \frac{1}{\delta_{11}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

Wielkości  $M_{ik}^0$ ,  $M_{ki}^0$ , ..., otrzymamy ze wzorów (2.20) wstawiając zamiast wielkości  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ , wielkości  $X_{1,0}$ ,  $X_{2,0}$ ,  $X_{3,0}$ .

Równania transformacyjne (2.21) mieszczą w sobie szereg przypadków szczególnych. Rozważmy przypadek pręta  $i$ - $k$  z przegubem w punkcie  $B$ , w którym  $M_B = \mathfrak{M}_B = 0$ . Jedyną nadliczbową jest siła  $X_1$  działająca w punkcie  $B$ . W równaniach (2.20) należy postawić  $X_2 = X_3 = 0$ . Słuszne pozostaną wzory (2.21), jeśli we współczynnikach wyrażonych wzorami (2.22) przyjąć

$$\delta_{22} = \infty, \quad \delta_{33} = \infty.$$

Również w przypadku pręta zakrzywionego w planie, z przegubem w punkcie  $i$ , posłużyć się można wzorami (2.21) odpowiednio je przekształcając.

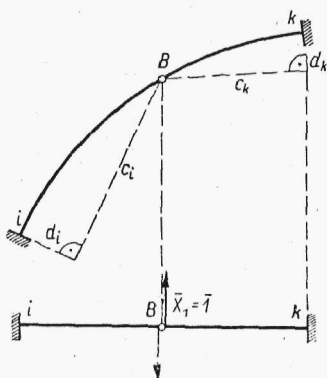
W przegubie  $i$  jest  $M_{ik} = 0$  oraz  $\mathfrak{M}_{ik} = 0$ . Z pierwszego i trzeciego równania (2.21) wyznaczmy, rozwiązując układ tych dwu równań, wielkości  $\varphi_{ik}$  i  $\psi_{ik}$ . Wstawimy je następnie do pozostałych wzorów grupy (2.21).

Otrzymamy układ równań

$$(2.23) \quad \begin{cases} M_{ik} = 0, \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \mu_{ki} \varphi_{ki} + \nu_{ki} \psi_{ki} - \mu'_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ \mathfrak{M}_{ik} = 0, \\ \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 + \nu_{ki} \varphi_{ki} + k_{ki} \psi_{ki} - k'_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \mu'_{ki} \varphi_{ki} - k'_{ki} \psi_{ki} + \mu''_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ T_{ki} = T_{ki}^0 - \mu'_{ki} \varphi_{ki} - k'_{ki} \psi_{ki} + \mu''_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}). \end{cases}$$

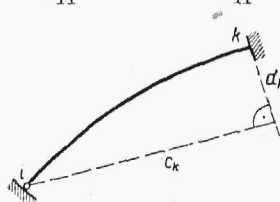
Tutaj  $M_{ki}^0, \mathfrak{M}_{ki}^0, \dots$  są siłami przywęzłowymi węzła  $k$  w układzie podstawowym jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym (pręt  $i-k$  według rys. 10); wielkości  $\mu_{ki}, \nu_{ki} \dots$  posiadają odmienną postać, niż to wynika ze wzorów (2.22). Zresztą łatwo je wyznaczyć, jeśli punkt  $B$  z rys. 9 przenieść do punktu  $i$ . W punkcie tym umieszczamy jedyną nadliczbową  $X_1$ .

Ponieważ  $x_0 = y_0 = 0$  i  $c_i = d_i = 0$ , więc otrzymamy



Rys. 9

$$\begin{aligned} \mu_{ki} &= \frac{c_k^2}{\delta_{11}}, & \nu_{ki} &= \frac{c_k d_k}{\delta_{11}}, \\ k_{ki} &= \frac{d_k^2}{\delta_{11}}, & \mu'_{ki} &= \frac{c_k}{\delta_{11}}, \\ k'_{ki} &= \frac{d_k}{\delta_{11}}, & \mu''_{ik} &= \frac{1}{\delta_{11}}. \end{aligned}$$



Rys. 10

Wielkości  $\mathfrak{M}_{ki}^0, M_{ki}^0, \dots$  otrzymamy ze wzorów (2.20) kładąc tam  $X_2 = X_3 = 0$  oraz wstawiając  $X_1 = X_{1,0} = -\delta_{10}/\delta_{11}$ .

Znaczne uproszczenie wzorów transformacyjnych (2.21) uzyskamy w przypadku symetrycznej postaci pręta  $i-k$  (rys. 11). Ze wzoru (2.14) odczytamy (przy założeniu symetrycznego kształtu oraz symetrycznej zmienności przekrojów pręta), że  $\text{ctg } \beta = 0$ . Wynika to stąd, że funkcja  $\sin 2\alpha$  jest antysymetryczna, a funkcje  $I_c E/GC$  i  $I_c/I$  są symetryczne. Zatem

$$(2.24) \quad \int_s \sin 2\alpha (d s' - d s'') = 0$$

$$\beta = \pi/2.$$

Wstawiając  $\beta = \pi/2$  do wzoru (2.16) otrzymamy

$$(2.16.1) \quad x_0 = \frac{\int x (\cos^2 \alpha ds' + \sin^2 \alpha ds'')}{\int (\cos^2 \alpha ds' + \sin^2 \alpha ds'')} = \frac{l}{2}.$$

Ze wzoru (2.15) znajdziemy

$$(2.16.2) \quad y_0 = \frac{\int y (\sin^2 \alpha ds' + \cos^2 \alpha ds'') + \int x \sin \alpha \cos \alpha (ds' - ds'')}{\int (\sin^2 \alpha ds' + \cos^2 \alpha ds'')}.$$

Stany  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$  wywołują powstanie następujących wielkości statycznych:

$$\begin{aligned} M_1 &= X \cos \alpha + Y \sin \alpha, & M_1 &= X \sin \alpha - Y \cos \alpha, & T_1 &= 1, \\ M_2 &= -\sin \alpha, & M_2 &= \cos \alpha, & T_2 &= 0, \\ M_3 &= \cos \alpha, & M_3 &= \sin \alpha, & T_3 &= 0, \end{aligned}$$

Stany  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$  dają antymetryczne wykresy momentów zginających oraz symetryczne wykresy momentów skręcających. Stan  $X_3 = 1$

daje symetryczną postać momentów zginających, a antymetryczną momentów skręcających.

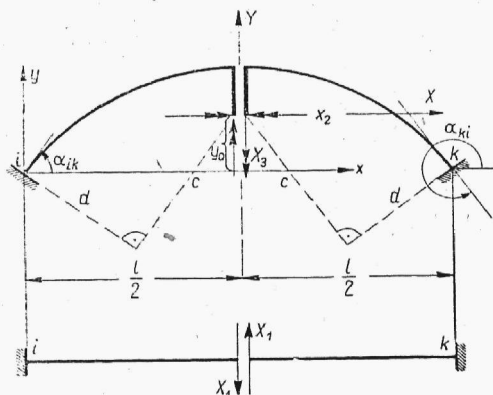
Wobec tego, że dla pręta symetrycznego jest

$$c_i = c_k = c,$$

$$d_i = d_k = d,$$

$$\alpha_{ki} = 2\pi - \alpha_{ik},$$

liczba współczynników wzorów transformacyjnych zmniejsza się z piętnastu do dziewięciu.



Rys. 11

Mamy tu

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_{ik} &= \mu_{ki} = \frac{c^2}{\delta_{11}} + \frac{\sin^2 \alpha_{ik}}{\delta_{22}} + \frac{\cos^2 \alpha_{ik}}{\delta_{33}}, & \nu_{ik} &= \nu_{ki} = \frac{cd}{\delta_{11}} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_{ik} \left( \frac{1}{\delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}} \right), \\ k_{ik} &= k_{ki} = \frac{d^2}{\delta_{11}} + \frac{\cos^2 \alpha_{ik}}{\delta_{22}} + \frac{\sin^2 \alpha_{ik}}{\delta_{33}}, & \bar{\mu}_{ik} &= \frac{c^2}{\delta_{11}} + \frac{\sin^2 \alpha_{ik}}{\delta_{22}} - \frac{\cos^2 \alpha_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \bar{\nu}_{ik} &= \frac{cd}{\delta_{11}} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_{ik} \left( \frac{1}{\delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}} \right), & \bar{k}_{ik} &= \frac{d^2}{\delta_{11}} + \frac{\cos^2 \alpha_{ik}}{\delta_{22}} - \frac{\sin^2 \alpha_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \mu'_{ik} &= \mu'_{ki} = \frac{c}{\delta_{11}}, & \mu''_{ik} &= \frac{1}{\delta_{11}}, & k'_{ik} &= k'_{ki} = \frac{d}{\delta_{11}}, \end{aligned} \right.$$

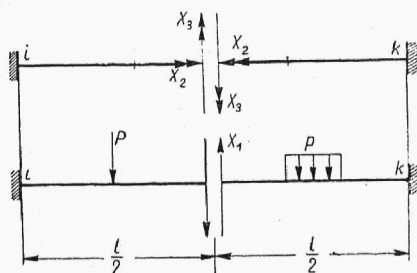
W przypadku pręta symetrycznego z przegubem w punkcie  $i$  ( $M_{ik} = \mathfrak{M}_{ik} = 0$ ) posłużyć się można wzorami (2.24). We wzorach tych wstawić należy  $c_k = d_k = 0$ .

Z pręta zakrzywionego symetrycznego bez trudu przejdziemy do pręta prostego. W tym przypadku mamy

$$x_0 = l/2, \quad y_0 = 0, \quad \alpha_{ik} = 0,$$

$$\alpha_{ki} = 2\pi, \quad c = l/2, \quad d = 0.$$

Stany  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  i  $X_3 = 1$  wywołują pojawienie się następujących wielkości statycznych:



Rys. 12

$$M_1 = -(l/2 - x), \quad \mathfrak{M}_1 = 0, \quad T_1 = 1,$$

$$M_2 = 0, \quad \mathfrak{M}_2 = 1, \quad T_2 = 0,$$

$$M_3 = 1, \quad \mathfrak{M}_3 = 0, \quad T_3 = 0,$$

Współczynniki równań transformacyjnych (2.25) zmniejszają się tu z liczby dziewięciu do pięciu.

Otrzymamy

$$v_{ik} = 0, \quad \bar{v}_{ik} = 0, \quad k_{ik} = 0, \quad \mu'_{ik} = \frac{c}{\delta_{11}},$$

$$\mu_{ik} = \frac{c^2}{\delta_{11}} + \frac{1}{\delta_{33}}, \quad \bar{\mu}_{ik} = \frac{c^2}{\delta_{11}} - \frac{1}{\delta_{33}}, \quad k_{ik} = \bar{k}_{ik} = \frac{1}{\delta_{22}}, \quad \mu''_{ik} = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Zważywszy, że dla pręta o stałym przekroju jest

$$(2.26) \quad \begin{cases} \delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx = \frac{l^3}{12EI}, \\ \delta_{22} = \frac{1}{GC} \int_0^l 1 \cdot dx = \frac{l}{GC}, \\ \delta_{33} = \frac{1}{EI} \int_0^l 1 \cdot dx = \frac{l}{EI}, \end{cases}$$



wypiszemy równania transformacyjne w postaci znanej ze statyki układów ramowych

$$(2.27) \quad \begin{cases} M_{ik} = M_{ik}^0 + \frac{2EI}{l} [2\varphi_{ik} + \varphi_{ki} - \frac{3}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})], \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \frac{2EI}{l} [\varphi_{ik} + 2\varphi_{ki} - \frac{3}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})], \\ \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + \frac{GC}{l} (\psi_{ik} - \psi_{ki}), \\ \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 - \frac{GC}{l} (\psi_{ik} - \psi_{ki}), \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \frac{6EI}{l^2} [\varphi_{ik} + \varphi_{ki} - \frac{2}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})], \\ T_{ki} = T_{ki}^0 - \frac{6EI}{l^2} [\varphi_{ik} + \varphi_{ki} - \frac{2}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})]. \end{cases}$$

W przypadku pręta prostego z przegubem w węźle  $i$  ( $M_{ik} = 0$ ,  $\mathfrak{M}_{ik} = 0$ ) jedyną nadliczbową będzie  $X_1$  działająca w przegubie  $i$ . Mamy tu  $x_0 = 0$  i  $c = l$ .

Równania transformacyjne przyjmują znaną postać

$$(2.28) \quad \begin{cases} M_{ik} = 0, \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \frac{3EI}{l} [\varphi_{ki} - \frac{1}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})] \end{cases}$$

i podobnie dalsze równania.

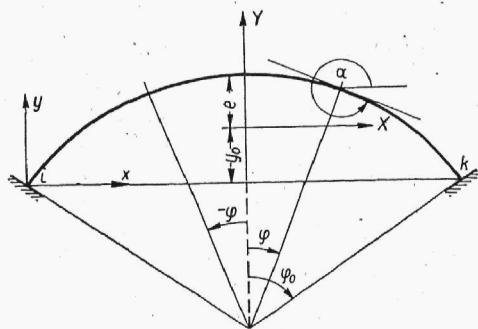
Pręt prosty i pręt kołowy są elementami, które najczęściej występują w układach rusztowych. Zajmiemy się nieco szczegółowiej prętem kołowym o stałym przekroju.

Z rysunku 13 odczytamy

$$X = r \sin \varphi, \quad Y = r(\cos \varphi - \vartheta),$$

$$\vartheta = \cos \varphi_0 + \varepsilon, \quad y_0 = \varepsilon r,$$

$$c = r(1 - \vartheta) = \beta r.$$



Rys. 13

Dalej mamy ze wzorów

$$(2.29) \quad \begin{cases} M_1 = X \cos \varphi - Y \sin \varphi = r \vartheta \sin \varphi, \\ \mathfrak{M}_1 = -X \sin \varphi - Y \cos \varphi = r(\vartheta \cos \varphi - 1), \\ M_2 = \sin \varphi, \quad M_3 = \cos \varphi, \quad \mathfrak{M}_2 = \cos \varphi, \quad \mathfrak{M}_3 = -\sin \varphi, \\ T_1 = 1, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0. \end{cases}$$

Z warunku

$$\delta_{12} = \int (M_1 M_2 + \varrho \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2) ds = 0 \quad \varrho = \frac{EI}{GC},$$

otrzymamy  $c = \beta r$ ,  
gdzie

$$(2.30) \quad \beta = 1 - \frac{4 \varrho \sin \varphi_0}{2 \varphi_0 (1 + \varrho) + (\varrho - 1) \sin 2 \varphi_0}.$$

Ze wzorów (2.10.1) obliczymy

$$(2.31) \quad \begin{cases} EI \delta_{11} = 2 \varrho r^3 [\varphi_0 - (1 - \beta) \sin \varphi_0], \\ EI \delta_{22} = \frac{r}{2} [2 \varphi_0 (1 + \varrho) + (\varrho - 1) \sin 2 \varphi_0], \\ EI \delta_{33} = \frac{r}{2} [2 \varphi_0 (1 + \varrho) + (1 - \varrho) \sin 2 \varphi_0]. \end{cases}$$

Znajomość wielkości  $\delta_{ii} (i=1, 2, 3)$  pozwoli na wyznaczenie współczynników  $\mu_{ik}, \bar{\mu}_{ik}, \dots$  na podstawie wzorów (2.25).

Ponieważ dla symetrycznego obciążenia pręta kołowego w układzie podstawowym momenty zginające mają wykresy symetryczne, a momenty skręcające wykresy antysymetryczne, zatem  $X_{1,0} = X_{2,0} = 0$  i  $X_{3,0} \neq 0$ ; jedyną nadliczbową jest moment skręcający na osi symetrii pręta.

Dla jednostajnie rozłożonego obciążenia  $p$  wzdłuż łuku pręta mamy

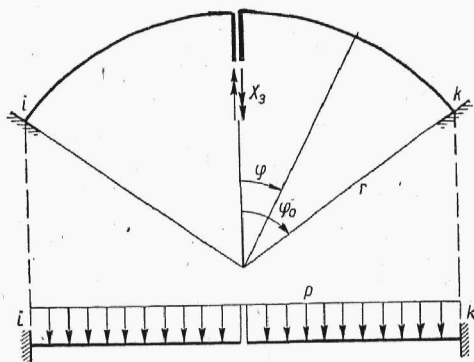
$$(2.32) \quad [M] = -pr^2(1 - \cos \varphi), \quad [\mathfrak{M}] = pr^2(\varphi - \sin \varphi).$$

Nadliczbową  $X_{3,0}$  wyznaczymy ze wzoru

$$X_{3,0} = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \delta_{30} &= \int ([M] M_3 + \varrho [\mathfrak{M}] \mathfrak{M}_3) ds = \\ &= -2pr^4 \int_0^{\varphi_0} [\vartheta \sin \varphi (1 - \cos \varphi) + \varrho (1 - \vartheta \cos \varphi) (\varphi - \sin \varphi)] d\varphi. \end{aligned}$$



Rys. 14

Po wykonaniu całkowania i dłuższych uproszczeniach znajdziemy

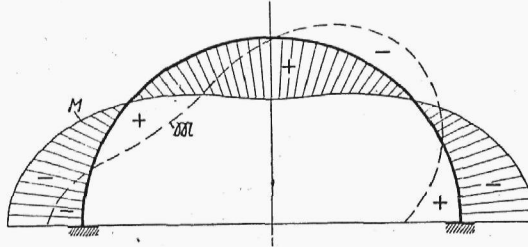
$$(2.33) \quad X_{3,0} = p r^2 \frac{(1 + \varrho) (4 \sin \varphi_0 - 2 \varphi_0) - 4 \varrho \varphi_0 \cos \varphi_0 + (\varrho - 1) \sin 2 \varphi_0}{2 (1 + \varrho) \varphi_0 - (\varrho - 1) \sin 2 \varphi_0}.$$

W przypadku szczególnym  $\varphi_0 = \pi/2$  (półkole)  $X_{3,0}$  jest niezależne od  $\varrho$ :

$$X_{3,0} = p r^2 \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right).$$

Wielkości statyczne otrzymamy ze wzorów (2.13):

$$(2.34) \quad \begin{cases} M = [M] + X_{3,0} \cos \alpha = [M] + X_{3,0} \cos \varphi, \\ \mathfrak{M} = [\mathfrak{M}] + X_{3,0} \sin \alpha = [\mathfrak{M}] - X_{3,0} \sin \varphi, \\ T = -p r \varphi. \end{cases}$$



Rys. 15

Dla  $\varphi_0 = \pi/2$  znajdziemy

$$M = -p r^2 (1 - \cos \varphi) + p r^2 \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) \cos \varphi,$$

$$\mathfrak{M} = p r^2 (\varphi - \sin \varphi) - p r^2 \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) \sin \varphi.$$

Dalej ze wzorów (2.34) otrzymujemy

$$(2.35) \quad \begin{cases} M_{ik}^0 = -M_{ki}^0 = -p r^2, \\ \mathfrak{M}_{ik}^0 = \mathfrak{M}_{ki}^0 = p r^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right), \\ T_{ik}^0 = -T_{ki}^0 = \frac{p r \pi}{2}. \end{cases}$$

Dla siły skupionej  $P$  działającej w połowie rozpiętości pręta mamy  $X_{1,0} = 0$ ,  $X_{2,0} = 0$  i  $X_{3,0} \neq 0$ .

Otrzymamy tu

$$(2.36) \quad X_{3,0} = -Pr \frac{2\varrho(\cos \varphi_0 - 1) + (\varrho - 1) \sin^2 \varphi_0}{2(\varrho + 1)\varphi_0 - (\varrho - 1) \sin 2\varphi_0}.$$

Na odcinku C-k łuku jest

$$M = -\frac{P}{2} r \sin \varphi + X_{3,0} \cos \varphi,$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Pr}{2}(1 - \cos \varphi) - X_{3,0} \sin \varphi.$$

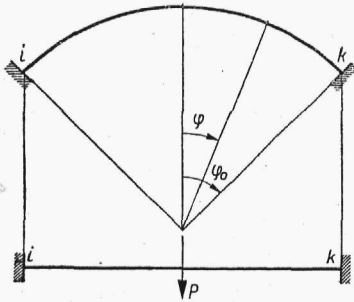
Dla  $\varphi_0 = \pi/2$  jest

$$X_{3,0} = \frac{Pr}{\pi}, \quad M = -\frac{Pr}{2}(\sin \varphi - \frac{2}{\pi} \cos \varphi),$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Pr}{2}(1 - \cos \varphi - \frac{2}{\pi} \sin \varphi).$$

Zatem

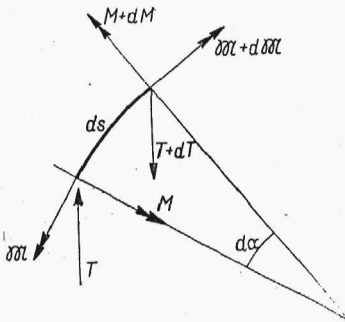
$$M_{ki}^0 = \frac{Pr}{2}, \quad \mathfrak{M}_{ki}^0 = \frac{Pr}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right),$$



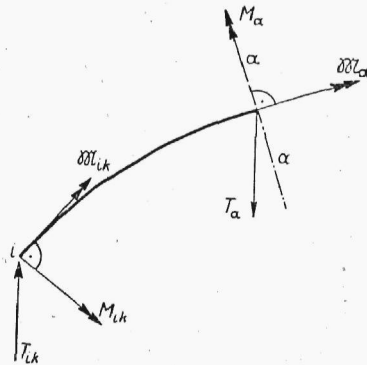
Rys. 16

$$T_{ki}^0 = -P/2.$$

W powyższych rozważaniach przyjmowaliśmy w obrębie pręta dodatnie kierunki wielkości statycznych zgodnie z umową stosowaną w statyce dźwigarów załamanych w planie. Dodatnie kierunki tych wielkości przedstawiono na rys. 17.



Rys. 17



Rys. 18

Przejdźmy teraz do wyznaczenia sił w dowolnym przekroju pręta między węzłami i-k.

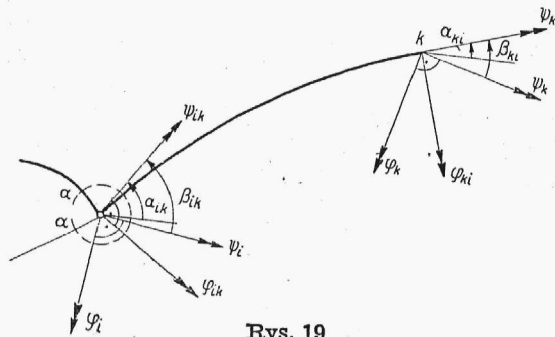
Założmy, że z rozwiązania równań kanonicznych, wypisanych dla rusztu, uzyskaliśmy składowe stanu przemieszczeń pręta i-k. Wyznaczyć należy

wielkości  $M$ ,  $\mathfrak{M}$  i  $T$  w dowolnym przekroju pręta  $i-k$  między węzłami  $i-k$ . Tok postępowania jest następujący. Wyliczamy ze wzorów (2.18.1)–(2.18.3) wielkości  $L_i$ , a ze wzorów (2.19) nadliczbowe  $X_i$ . Wreszcie ze wzoru (2.7) wyznaczamy żądane wielkości statyczne. Można posłużyć się również inną drogą. Ze wzorów (2.21) wyznaczymy siły przywęzłowe  $\mathfrak{M}_{ik}$ ,  $M_{ik}$  i  $T_{ik}$ . Traktujemy je jako obciążenie wspornika  $i-k$ , utwierdzonego w węźle  $k$ . Wielkości statyczne w przekroju  $\alpha-a$ , to jest wielkości  $M_\alpha$ ,  $\mathfrak{M}_\alpha$  i  $T_\alpha$ , uzyskamy z trzech równań równowagi wypisanych dla pręta  $i-A$  (rys. 18).

Przesunięcia, obroty i skręcenia poszczególnych przekrojów pręta w dowolnym przekroju  $\alpha-a$  znajdziemy ze wzoru (2.4) przyjmując jako obciążenie wirtualne siłę  $\bar{K}=\bar{1}$ , skierowaną wzdłuż poszukiwanego przemieszczenia.

### 3. Równania kanoniczne

Rozważmy węzeł  $i$  rusztu. W węźle tym zbiega się  $n$  prętów. Stan przemieszczenia węzła jest scharakteryzowany trzema wielkościami: przesunięciem  $\delta_i$ , prostopadłym do płaszczyzny układu, oraz składowymi obrotu, kątami  $\varphi_i$  i  $\psi_i$ , o wektorach leżących w płaszczyźnie  $xy$ . Kierunki działania



Rys. 19

nadliczbowych  $\varphi_i$  oraz  $\psi_i$  dobieramy w zależności od typu układu w sposób najrozmaitszy. Na rysunku 19 podano stan najogólniejszy, kiedy kierunki działania nadliczbowych  $\varphi_i$  i  $\varphi_k$  oraz  $\psi_i$  i  $\psi_k$  nie są do siebie równoległe. Brzegowe wartości przemieszczeń pręta  $i-k$  związane są z nadliczbowymi następującymi związkami:

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \varphi_{ik} = \psi_i \sin \beta_{ik} + \varphi_i \cos \beta_{ik}, \\ \psi_{ik} = \psi_i \cos \beta_{ik} - \varphi_i \sin \beta_{ik}, \end{cases} \quad \delta_{ik}' = -\delta_i,$$

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} \varphi_{ki} = \psi_k \sin \beta_{ki} + \varphi_k \cos \beta_{ki}, \\ \psi_{ki} = \psi_k \cos \beta_{ki} - \varphi_k \sin \beta_{ki}. \end{cases} \quad \delta_{ki} = \delta_k.$$

Wytnijmy węzeł  $i$  przekrojem  $a-a$ . Na węzeł ten działać będą siły przywzłowe oraz obciążenie zewnętrzne działające bezpośrednio na węzeł. Na rysunku 20 przedstawiono siły przywzłowe pręta  $i-k$  w przekroju dokonanym nieskończenie blisko węzła  $i$ . Siły przywzłowe  $M_{ik}$ ,  $\mathfrak{M}_{ik}$  i  $T_{ik}$  działają z odwrotnymi kierunkami na węzeł. Rzuty tych sił na kierunki wektorów  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$  i z oznaczmy przez  $M_{\varphi i}$ ,  $M_{\psi i}$  i  $T_{ik}$ .

Tutaj

$$(3.2) \begin{cases} M_{\psi i} = -M_{ik} \sin \beta_{ik} - \mathfrak{M}_{ik} \cos \beta_{ik}, \\ M_{\varphi i} = -M_{ik} \cos \beta_{ik} + \mathfrak{M}_{ik} \sin \beta_{ik}. \end{cases}$$

Niech na węzeł działają obciążenia bezpośrednie, moment  $M_i$  oraz siła pionowa  $P_i$ .

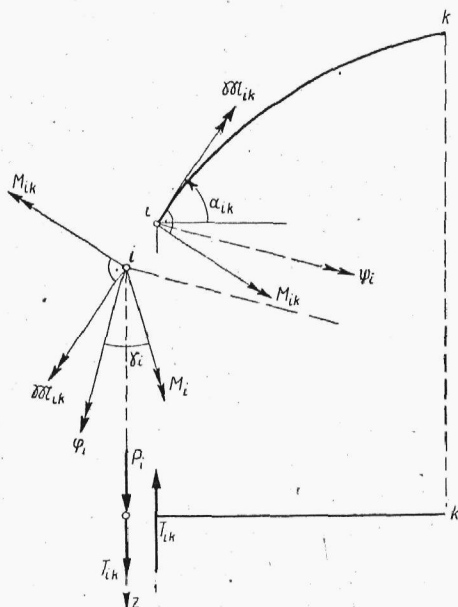
Równania równowagi węzła  $i$  przy uwzględnieniu sił brzegowych wszystkich prętów zbiegających się w węzeł i obciążenia bezpośrednio działającego na węzeł przyjmują postać

$$(3.3) \begin{cases} M_i \cos \gamma_i - \sum (M_{ik} \cos \beta_{ik} - \mathfrak{M}_{ik} \sin \beta_{ik}) = 0, \\ M_i \sin \gamma_i - \sum (M_{ik} \sin \beta_{ik} + \mathfrak{M}_{ik} \cos \beta_{ik}) = 0, \\ P_i + \sum T_{ik} = 0. \end{cases}$$

Jeżeli do równań (3.3) wstawimy siły przywzłowe ze wzorów transformacyjnych (2.21), a dalej posłużymy się wzorami (3.1.1) i (3.1.2), to uzyskamy układ równań kanonicznych metody odkształceń typu

$$(3.4) \begin{cases} \varphi_i A_{ii}^{\varphi} + \sum \varphi_k A_{ik}^{\varphi} + \psi_i B_{ii}^{\varphi} + \sum \psi_k B_{ik}^{\varphi} + \delta_i C_{ii}^{\varphi} + \sum \delta_k C_{ik}^{\varphi} + m_{i0} = 0, \\ \varphi_i A_{ii}^{\psi} + \sum \varphi_k A_{ik}^{\psi} + \psi_i B_{ii}^{\psi} + \sum \psi_k B_{ik}^{\psi} + \delta_i C_{ii}^{\psi} + \sum \delta_k C_{ik}^{\psi} + m_{i0} = 0, \\ \varphi_i A_{ii}^{\delta} + \sum \varphi_k A_{ik}^{\delta} + \psi_i B_{ii}^{\delta} + \sum \psi_k B_{ik}^{\delta} + \delta_i C_{ii}^{\delta} + \sum \delta_k C_{ik}^{\delta} + r_{i0} = 0. \end{cases}$$

We wzorach tych  $A_{ii}^{\varphi}$  oznacza sumę rzutów wektorów momentów przywzłowych węzła  $i$  na kierunek wektora  $\varphi_i$ , powstałych w układzie podstawowym geometrycznie wyznaczalnym pod wpływem stanu  $\varphi_i = 1$ ;  $A_{ik}^{\varphi}$  jest sumą rzutów momentów przywzłowych na kierunek wektora  $\varphi_i$ , wywołanych stanem  $\varphi_k = 1$ , wreszcie  $m_{i0}$  jest sumą rzutów wektorów momentów przywzłowych węzła  $i$  na kierunek działania wektora  $\varphi_i$ , wywołanych w ukła-



Rys. 20

dzie podstawowym stanem obciążeń zewnętrznych. Podobne znaczenie mają inne wielkości występujące we wzorach (3.5).

Z twierdzenia o wzajemności reakcji wynika, że

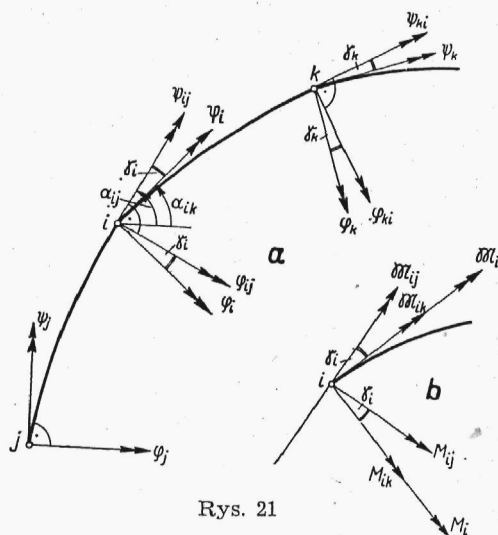
$$A_{li}^{\bar{r}} = B_{li}^{\bar{r}}, \quad C_{li}^{\bar{r}} = A_{li}^{\bar{o}}, \quad C_{li}^{\bar{r}} = B_{li}^{\bar{o}}.$$

Na podstawie tego twierdzenia wykazać można, że układ równań kanonicznych (3.5) wypisanych dla wszystkich węzłów swobodnych będzie układem równań o macierzy symetrycznej (względem głównej przekątnej).

Równania (3.5) podane tu w postaci najogólniejszej i dla dowolnego kształtu prętów dadzą się znacznie uprościć w przypadku układów rusztowych regularnych, jak ruszty o siatce prętowej ortogonalnej, belki załamane w planie, belki pierścieniowe itd.

#### 4. Belki ciągle załamane i zakrzywione w planie

Rozpatrzmy układ prętów przedstawiony na rys. 21. Pręty połączone są ze sobą sztywnymi węzłami stanowiącymi jednocześnie podpory belki. Nadliczbowe przyjęto tak, aby kierunki ich działania pokrywały się z kierunkami stycznych i normalnych do osi prętów w węzłach.



Rys. 21

Na rysunku 21 przedstawiono siły przywęzłowe oraz wielkości  $M_i$  i  $\mathfrak{M}_i$ , tj. składowe momentu skupionego, działającego jako obciążenie zewnętrzne bezpośrednio na węzeł. Zrównoważenie węzła  $i$  prowadzi do równań

$$(4.1) \quad \begin{cases} M_{ik} + M_{ij} \cos \gamma_i - \mathfrak{M}_{ij} \sin \gamma_i - M_i = 0, \\ \mathfrak{M}_{ik} + M_{ij} \sin \gamma_i + \mathfrak{M}_{ij} \cos \gamma_i - \mathfrak{M}_i = 0, \end{cases} \quad \gamma_i = \alpha_{ij} - \alpha_{ik}.$$

Jeżeli do wzorów (4.1) wstawimy momenty przywęzłowe z równań transformacyjnych (2.21), a ponadto skorzystamy ze związków

$$(4.2) \quad \begin{cases} \varphi_{ik} = \varphi_i, & \psi_{ik} = \psi_i, & \varphi_{ji} = \varphi_j, & \psi_{ji} = \psi_i, \\ \varphi_{ki} = \varphi_k \cos \gamma_k + \psi_k \sin \gamma_k, & \psi_{ki} = -\varphi_k \sin \gamma_k + \psi_k \cos \gamma_k, \\ \varphi_{ij} = \varphi_i \cos \gamma_i + \psi_i \sin \gamma_i, & \psi_{ij} = -\varphi_i \sin \gamma_i + \psi_i \cos \gamma_i, \end{cases}$$

to otrzymamy układ równań o nadliczbowych geometrycznych  $\varphi$  i  $\psi$ :

$$(4.3.1) \quad \varphi_j [\bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\mu}_{ij} - \varepsilon_i \bar{\nu}_{ji}] + \varphi_i [\mu_{ik} + \bar{\varepsilon}_i^2 \mu_{ij} + k_{ij} \varepsilon_i^2 - 2 \nu_{ij} \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i] + \\ + \varphi_k [\bar{\mu}_{ik} \bar{\varepsilon}_k - \bar{\nu}_{ik} \varepsilon_k] - \psi_j (\bar{\nu}_{ij} \bar{\varepsilon}_i - \bar{k}_{ji} \varepsilon_i) - \psi_i [\nu_{ik} - \nu_{ij} (\varepsilon_i^2 - \bar{\varepsilon}_i^2) + \\ + (k_{ij} - \mu_{ij}) \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i] - \psi_k [\bar{\nu}_{ik} \bar{\varepsilon}_k - \bar{\mu}_{ik} \varepsilon_k] + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 \bar{\varepsilon}_i - \mathfrak{M}_{ij}^0 \varepsilon_i - M_i = 0,$$

$$(4.3.2) \quad \varphi_j (\bar{\mu}_{ij} \varepsilon_i + \bar{\nu}_{ji} \bar{\varepsilon}_i) - \varphi_i [\nu_{ik} + (k_{ij} - \mu_{ij}) \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i + \nu_{ij} (\varepsilon_i^2 - \bar{\varepsilon}_i^2)] + \\ + \varphi_k (\bar{k}_{ik} \varepsilon_k - \bar{\nu}_{ik} \bar{\varepsilon}_k) - \psi_j (\bar{k}_{ji} \bar{\varepsilon}_i - \bar{\nu}_{ij} \varepsilon_i) + \psi_i [\mu_{ij} \varepsilon_i^2 + 2 \nu_{ij} \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i + \\ + k_{ij} \bar{\varepsilon}_i^2 + k_{ik}] - \psi_k (\bar{k}_{ik} \bar{\varepsilon}_k + \bar{\nu}_{ik} \varepsilon_k) + \mathfrak{M}_{ij}^0 \bar{\varepsilon}_i + \mathfrak{M}_{ik}^0 + M_{ij}^0 \varepsilon_i - \mathfrak{M}_i = 0.$$

W powyższych wzorach oznaczono dla krótkości  $\varepsilon_i = \sin \gamma_i$  oraz  $\bar{\varepsilon}_i = \cos \gamma_i$ . Równania (4.3) można znacznie uprościć dla pewnych typów belek ciągłych.

Założmy, że wszystkie kąty  $\gamma$  są równe zeru; pręty mają wtedy wspólne styczne w węzłach. Z równań (4.3) otrzymamy

$$(4.4.1) \quad \bar{\mu}_{ij} \varphi_j + \varphi_i (\mu_{ik} + \mu_{ij}) + \bar{\mu}_{ik} \varphi_k - \bar{\nu}_{ij} \psi_j - \psi_i (\nu_{ik} - \nu_{ij}) + \\ + \bar{\nu}_{ik} \psi_k + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 - M_i = 0,$$

$$(4.4.2) \quad \bar{\nu}_{ji} \varphi_j - \varphi_i (\nu_{ik} - \nu_{ij}) - \bar{\nu}_{ik} \varphi_k - \psi_j \bar{k}_{ji} + \psi_i (k_{ij} + k_{ik}) - \\ - \psi_k \bar{k}_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 - \mathfrak{M}_i = 0.$$

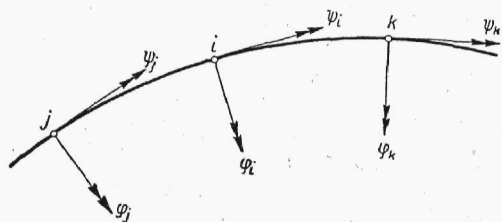
W przypadku szczególnym jednakowych pręseł i prętów o jednakowych własnościach geometrycznych i symetrycznych otrzymamy dalsze uproszczenia wzorów (4.4). Ponieważ w tym przypadku współczynniki przy niewiadomych nie zależą od wskaźników węzłów, to uzyskamy

$$(4.5.1) \quad \bar{\mu} \varphi_j + 2 \mu \varphi_i + \bar{\mu} \varphi_k - \bar{\nu} (\psi_j - \psi_k) + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 - M_i = 0,$$

$$(4.5.2) \quad \bar{\nu} (\varphi_j - \varphi_k) - \bar{k} \psi_j + 2 k \psi_i - \bar{k} \psi_k + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 - \mathfrak{M}_i = 0.$$



Zauważmy jeszcze, że w równaniach (4.4) otrzymamy dalsze uproszczenia w przypadku  $\bar{\nu} = 0$ . Odpowiada to przypadkowi belki ciągłej o prętach prostych [patrz wzory (2.26)].



Rys. 22

Otrzymamy wówczas dwa niezależne od siebie układy równań trójczołowych jako znane równania belek ciągłych.

Dla belki ciągłej załamanej w planie układ równań (4.3.1) i (4.3.2) przechodzi w

$$(4.6.1) \quad q_j \bar{\varepsilon}_i \bar{\mu}_{ij} + q_i [2(\bar{\mu}_{ij} \bar{\varepsilon}_i^2 + \bar{\mu}_{ik}) + \bar{k}_{ij} \varepsilon_i^2] + q_k \bar{\mu}_{ik} \bar{\varepsilon}_k + \psi_j \bar{k}_{ji} \varepsilon_i - \\ - \psi_i [\bar{k}_{ji} - 2\bar{\mu}_{ij}] \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i + \psi_k \bar{\mu}_{ik} \varepsilon_k + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 \bar{\varepsilon}_i - \mathfrak{M}_{ij}^0 \varepsilon_i - M_i = 0.$$

$$(4.6.2) \quad q_j \bar{\mu}_{ij} \varepsilon_i - q_i (\bar{k}_{ij} - 2\bar{\mu}_{ij}) \bar{\varepsilon}_i \varepsilon_i + q_k \bar{k}_{ik} \varepsilon_k - \psi_j \bar{\varepsilon}_i \bar{k}_{ji} + \\ + \psi_i (2\bar{\mu}_{ij} \varepsilon_i^2 + \bar{k}_{ik} + \bar{k}_{ij} \varepsilon_i^2) - \psi_k \bar{k}_{ik} \bar{\varepsilon}_k + \mathfrak{M}_{ij}^0 \bar{\varepsilon}_i + \mathfrak{M}_{ik}^0 \varepsilon_i + M_{ij}^0 \varepsilon_i - \mathfrak{M}_i = 0.$$

Tutaj przyjęto według wzorów (2.27)  $\mu_{ik} = 2\bar{\mu}_{ik}$ .

Dla belek ciągłych załamanych w planie (jednakowe przesła i przekroje belek oraz jednakowe kąty  $\gamma$  w węzłach) otrzymamy dalsze uproszczenia polegające na tym, że współczynniki przy niewiadomych nie zależą od numeracji węzłów:

$$\bar{\mu}_{ij} = \bar{\mu}_{ik}, \quad \bar{k}_{ij} = \bar{k}_{ik}, \dots; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_k = \varepsilon_j = \dots = \varepsilon; \quad \bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_k = \bar{\varepsilon}_j = \dots = \bar{\varepsilon}.$$

Ponieważ w równaniach (4.3)-(4.6) wielkości  $\varphi$  i  $\psi$  występują w postaci trójczołowej, to sposób rozwiązywania tych układów równań najwygodniej doprowadzić do algorytmu rozwiązywania dwu układów równań trójczołowych, zawierających jedynie nadliczbowe  $\varphi$  lub  $\psi$ .

Posługiwać się będziemy układem podstawowym geometrycznie niewyznaczalnym. Układem tym niech będzie belka ciągła, zakrzywiona lub załamana w planie, o tak skonstruowanych węzłach, aby wielkości  $\psi$  we wszystkich węzłach były równe zeru. Przy  $n$  węzłach swobodnych układ jest  $n$ -krotnie geometrycznie niewyznaczalny.

W tym układzie podstawowym wykonujemy następujące działania.

(a) W układzie równań (4.3.1)-(4.6.1) zakładamy

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_k = \dots = \psi_n = 0.$$

Pozostaje wówczas układ równań trójczołowy. Rozwiązanie tego układu daje kąty  $\varphi_{i,0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) wywołane działaniem obciążeń zewnętrznych na układ.

(b) Niech w układzie podstawowym działa stan  $\psi_r = 1$ . W równaniach (4.3.1)-(4.6.1) należy przyrównać do zera człony pochodzące od obciążenia zewnętrznego, a z występujących w tych równaniach kątów  $\psi$  zachować należy jedynie kąt  $\psi_r$ . Rozwiązanie układu równań daje kąty  $\psi_{i,r}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Powyższe działanie powtarzamy kolejno dla stanów  $\psi_r = 1$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ). Przy wyznaczaniu wartości  $\varphi_{i,r}$  wygodnie tu będzie posłużyć się macierzą układu równań trójczłonowych.

(c) Wyznaczamy w układzie podstawowym momenty przywęzłowe, wywołane obciążeniem zewnętrznym oraz stanem  $\psi_r = 1$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ).

(d) Ustawiamy układ równań

$$(4.7) \quad a_{ij}^{(n)} \psi_j + a_{ii}^{(n)} \psi_i + a_{ik}^{(n)} \psi_k + a_{i0}^{(n)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tutaj  $a_{ij}^{(n)}$  oznacza sumę rzutów momentów przywęzłowych węzła  $i$ , obliczonych w p. (c), na kierunek działania nadliczbowej  $\psi_i$ . Momenty te wywołane są w układzie podstawowym niewyznaczalnym stanem  $\psi_j = 1$ .

Wielkość  $a_{i0}^{(n)}$  jest sumą rzutów momentów przywęzłowych węzła  $i$  na kierunek działania nadliczbowej  $\psi_i$ , wywołanych w układzie podstawowym działaniem obciążenia zewnętrznego.

Rozwiązując układ równań (4.7) otrzymamy nadliczbowe  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Kąty  $\varphi_i$  uzyskamy z następującego wzoru superpozycyjnego

$$\varphi_i = \varphi_{i,0} + \sum_{r=1}^n \varphi_{i,r} \psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Rozwiązanie układu równań omówionych w p. (a) i (b) oraz równań (4.7) nastąpić może również metodą kolejnych przybliżeń (metodą C r o s s a), która do tego celu nadaje się bardzo dobrze.

Zajmijmy się szczególnym przypadkiem belki ciągłej zakrzywionej, mianowicie belką pierścieniową o jednakowych przesłach obciążonych w sposób jednakowy (cykliczna symetria obciążeń). Załóżmy, że na węzły nie działają momenty skręcające skupione ( $\mathfrak{M}_i = 0$ ). Ze względu na symetrię obciążeń jest  $\varphi_j = \varphi_i = \varphi_k = \dots = \varphi = 0$  oraz  $\psi_j = \psi_i = \psi_k = \dots = \psi$ . Z drugiego równania (4.5) otrzymamy

$$(4.8) \quad 2(k - \bar{k})\psi + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 = 0.$$

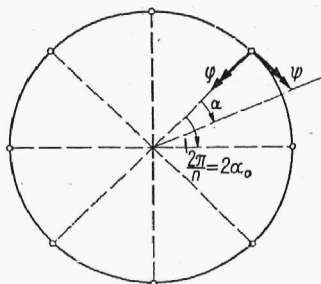
Ze względu na symetrię obciążeń mamy  $\mathfrak{M}_{ik}^0 = \mathfrak{M}_{ij}^0 = \dots = \mathfrak{M}^0$ , wobec tego

$$(4.9) \quad \psi = -\frac{\mathfrak{M}^0}{k - \bar{k}}.$$

Ze wzorów transformacyjnych (2.21) otrzymamy

$$\mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}^0 + (k - \bar{k}) \psi = \mathfrak{M}^0 - \mathfrak{M}^0 = 0,$$

$$M_{ik} = M_{ik}^0 - (\nu - \bar{\nu}) \psi = M_{ik}^0 + \frac{\nu - \bar{\nu}}{k - \bar{k}} \mathfrak{M}^0.$$



Rys. 23

Ze wzorów (2.25) dla symetrycznych prętów zakrzywionych wynika, że

$$\nu - \bar{\nu} = \frac{\sin 2 \alpha_0}{\delta_{33}},$$

$$k - \bar{k} = \frac{\sin^2 \alpha_0}{\delta_{33}}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{n}.$$

Tak więc

$$M_{ik} = M_{ik}^0 + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \mathfrak{M}^0.$$

Zważywszy, że

$$M_{ik}^0 = [M_{ik}] + X_{3,0} \cos \alpha_0, \quad \mathfrak{M}^0 = [\mathfrak{M}_{ik}^0] - X_{3,0} \sin \alpha_0,$$

otrzymamy

$$M_{ik} = [M_{ik}^0] + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} [\mathfrak{M}_{ik}^0].$$

Wobec tego momenty skręcające w węzłach są równe zero, a momenty zginające są niezależne od nadliczbowych  $X_{3,0}$ .

Dla obciążenia  $p$  jednostajnie rozłożonego we wszystkich przęsłach mamy [wzór (2.32)]

$$(4.10) \quad M_{ik} = pr^2 (\cos \alpha_0 - 1) + \operatorname{ctg} \alpha_0 pr^2 (\alpha_0 - \sin \alpha_0) = pr^2 (\alpha_0 \operatorname{ctg} \alpha_0 - 1).$$

Otrzymaliśmy tu wyniki zgodne z wynikami uzyskanymi na innej drodze; prostota wzorów końcowych pochodzi stąd, że układ jest statycznie wyznaczalny. Wykresy momentów zginających i skręcających oraz sił tnących uzyskamy ze wzorów

$$(4.11) \quad M_\alpha = pr^2 \left[ \alpha_0 \frac{\cos(\alpha_0 - \alpha)}{\sin \alpha_0} - 1 \right], \quad \mathfrak{M}_\alpha = -pr^2 \left[ \alpha_0 \frac{\sin(\alpha_0 - \alpha)}{\sin \alpha_0} - (\alpha_0 - \alpha) \right],$$

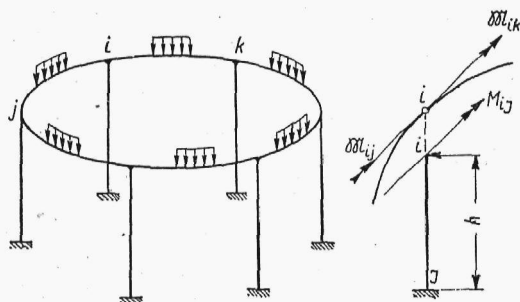
$$T_\alpha = pr(\alpha_0 - \alpha).$$

Zajmijmy się bardziej złożonym przypadkiem, mianowicie pierścieniową ramą obciążoną w sposób jednakowy we wszystkich przęsłach. Tutaj jest  $\varphi = 0$  i  $\psi \neq 0$ . Zrównoważenie węzła i daje tu równanie

$$(4.12) \quad M_{il} + \mathfrak{M}_{ik} + \mathfrak{M}_{ij} = 0.$$

Zważywszy, że

$$(4.13) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + (k - \bar{k})\psi, \\ \mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_{ij}^0 + (k - \bar{k})\psi, \\ M_{II} = \mu_{II}\psi, \end{cases}$$



Rys. 24

gdzie  $\mu_{II} = 4EI_{II}/h$ , otrzymamy wstawiając powyższe wartości do równania (4.12)

$$(4.14) \quad [2(k - \bar{k}) + \mu_{II}]\psi + 2\mathfrak{M}^0 = 0,$$

gdzie

$$\mathfrak{M}_{ik}^0 = \mathfrak{M}_{ij}^0 = \dots = \mathfrak{M}^0.$$

Ze wzorów (4.13) uzyskamy siły przywęzłowe

$$(4.15) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}^0 - \frac{2(k - \bar{k})}{2(k - \bar{k}) + \mu_{II}} \mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}_{ij}, \\ M_{II} = \mu_{II}\psi = -2\mathfrak{M}^0 \frac{\mu_{II}}{2(k - \bar{k}) + \mu_{II}}. \end{cases}$$

Dalej ze wzoru (2.21) uzyskamy

$$(4.16) \quad M_{ik} = M^0 - (\nu - \bar{\nu})\psi = M^0 + 2\mathfrak{M}^0 \frac{\nu - \bar{\nu}}{2(k - \bar{k}) + \mu_{II}}.$$

Dla  $\mu_{II} = 0$ , a więc w braku słupa, otrzymujemy wyrażenie (4.9).

W przypadku ram piętrowych, składających się ze słupów pionowych i rygli kołowych, otrzymamy w założeniu węzłów nieprzesuwnych w kierunku poziomym następujące równanie trójczłonowe:

$$\psi_{r-1} \bar{\mu}_{r,r-1} + \psi_r [2(k_r - \bar{k}_r) + \mu_{r,r-1} + \mu_{r,r+1}] + \psi_{r+1} \bar{\mu}_{r,r+1} + 2\mathfrak{M}_r^0 = 0$$

$$(r = 1, 2, \dots, n).$$

Tutaj

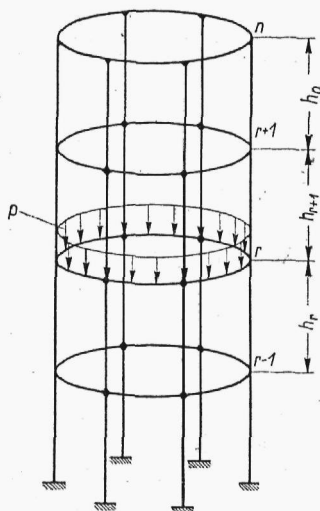
$$\bar{\mu}_{r,r-1} = \frac{2EI_r}{h_r}, \quad \mu_{r,r-1} = \frac{4EI_{r-1}}{h_{r-1}},$$

a  $I_r$  jest momentem bezwładności słupa względem osi  $\beta\beta$ . W podobnie prosty sposób rozwiązać można zagadnienie belek pierścieniowych współśrodkowych, obciążonych w sposób jednakowy we wszystkich przęsłach poszczególnych pierścieni. W każdej belce pierścieniowej wystąpi jedyna tylko nadliczbowa, kąt  $\psi$  (rys. 26). Otrzymamy i tu równanie trójczłonowe

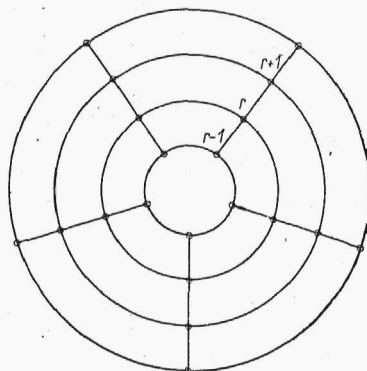
$$\psi_{r-1}\bar{\mu}_{r,r-1} + \psi_r [2(k_r - \bar{k}_r) + \mu_{r,r-1} + \mu_{r,r+1}] + \psi_{r+1}\bar{\mu}_{r,r+1} + 2M_r^0 = 0$$

$$(r = 1, 2, \dots, n).$$

Przykłady tego typu można by mnożyć. Należy jednak stwierdzić, że belki proste załamane w planie znacznie wygodniej rozwiązać przy użyciu metody sił, [2]. Rozwiązanie równań kanonicznych metody sił daje bowiem bezpośrednio wartości momentów zginających i skręcających przywęzłowych.



Rys. 25



Rys. 26

Jeżeli węzeł i belki załamanej w planie jest węzłem nie podpartym ( $\delta_i \neq 0$ ), to rozwiązanie takiego układu może nastąpić w dwojaki sposób.

(a) W równaniach (4.1), w wyrażeniach dla momentów przywęzłowych, należy uwzględnić wpływ przesunięcia. We wzorach (4.3.1) i (4.3.2) dochodzą wtedy człony zawierające wielkość  $\delta_i$ . Dalej skorzystać należy z warunku równowagi węzła  $T_{ik} - T_{ij} + P_i = 0$ , gdzie  $P_i$  jest pionową siłą skupioną działającą na węzeł. Wyrażając  $T_{ik}$  i  $T_{ij}$  według wzorów (2.21) otrzymamy brakujące równanie kanoniczne.

(b) Traktować można pręty  $j-i-k$  jako jeden pręt i ustawić dla niego wzory transformacyjne (2.21).

W przypadku dźwigarów załamanych w planie należy w węzłach pośrednich nie podpartych stosować metodę sił (p. 2), traktując układ prętów jako jeden pręt [14].

## 5. Ruszty o ortogonalnej siatce prętowej i ruszty nieregularne

Rozważać tu będziemy ruszty składające się z prętów prostych i zakrzywionych, ale symetrycznych. Jako nadliczbowe występują w węzłach kąty  $\varphi$  i  $\psi$  oraz przesunięcie  $\delta$ . Kierunki  $\varphi$  i  $\psi$  pokrywają się z normalną i styczną do osi prętów zakrzywionych.

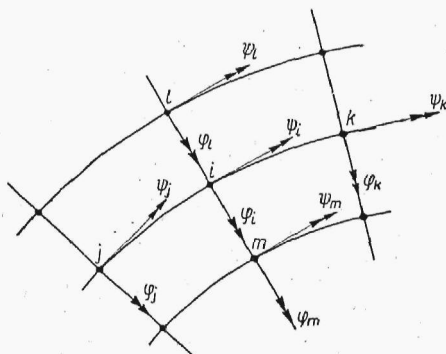
Dla każdego węzła swobodnego ustawimy trzy równania równowagi. Dla węzła  $i$  mamy zatem

$$(5.1.1) \quad M_{ik} + M_{ij} + \mathfrak{M}_{im} + \mathfrak{M}_{il} - M_i = 0,$$

$$(5.1.2) \quad \mathfrak{M}_{ik} + \mathfrak{M}_{ij} + M_{im} + M_{il} - \mathfrak{M}_i = 0,$$

$$(5.1.3) \quad -T_{ik} + T_{ij} + T_{im} - T_{il} - P_i = 0.$$

Tutaj  $M_i$  oraz  $\mathfrak{M}_i$  są składowymi momentu  $M$  działającego bezpośrednio na węzeł  $i$ .



Rys. 27

Wstawiając do wzorów (5.1) odpowiednie wartości ze wzorów transformacyjnych (2.21) otrzymamy następujący układ równań:

$$(5.2.1) \quad \bar{\mu}_{ij} \varphi_j + \varphi_i (\mu_{ik} + \mu_{ij} + k_{il} + k_{im}) + \bar{\mu}_{ik} \varphi_k - k_{im} \varphi_m - k_{il} \varphi_l - \bar{\nu}_{ij} \psi_j - \psi_i (\nu_{ik} - \nu_{ij}) + \bar{\nu}_{ik} \psi_k + \mu'_{ij} \delta_j + (\mu'_{ik} - \mu'_{ij}) \delta_i - \mu'_{ik} \delta_k + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 + \mathfrak{M}_{im}^0 + \mathfrak{M}_{il}^0 - M_i = 0,$$

$$(5.2.2) \quad \bar{\nu}_{ji} \varphi_j - \varphi_i (\nu_{ik} - \nu_{ij}) - \bar{\nu}_{ik} \varphi_k - \bar{k}_{ji} \psi_j + \psi_i (k_{ij} + k_{ik} + \mu_{im} + \mu_{il}) - \bar{k}_{ik} \psi_k + \bar{\mu}_{im} \psi_m + \bar{\mu}_{il} \psi_l + k'_{ij} \delta_j + k'_{ik} \delta_k - \delta_i (k'_{ik} + k'_{ij} + \mu'_{im} - \mu'_{il}) + \mu'_{im} \delta_m - \mu'_{il} \delta_l + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 + M_{im}^0 + M_{il}^0 - \mathfrak{M}_i = 0,$$

$$(5.2.3) \quad -\varphi_j \mu'_{ji} + \varphi_i (\mu'_{ik} - \mu'_{ij}) + \varphi_k \mu'_{ik} + k'_{ij} \psi_j - \psi_i (k'_{ik} + k'_{ij} - \mu'_{il} + \mu'_{im}) + k'_{ik} \psi_k - \mu'_{im} \psi_m + \mu'_{il} \psi_l - \mu''_{ij} \delta_j - \mu''_{ik} \delta_k - \mu''_{im} \delta_m - \mu''_{il} \delta_l + \delta_i (\mu''_{ik} + \mu''_{ij} + \mu''_{il} + \mu''_{im}) + T_{ij}^0 + T_{im}^0 - T_{ik}^0 - T_{il}^0 - P = 0.$$

Wybitne uproszczenie układu równań uzyskamy dla rusztu składającego się jedynie z prętów prostych. Otrzymamy wówczas

$$(5.3.1) \quad \varphi_i \bar{\mu}_{ij} + \varphi_i (\mu_{ik} + \mu_{ij} + k_{il} + k_{im}) + \varphi_k \bar{\mu}_{ik} - k_{im} \varphi_m - k_{il} \varphi_l + \mu'_{ij} \delta_j + \\ + (\mu'_{ik} - \mu'_{ij}) \delta_i - \mu'_{ik} \delta_k + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 + \mathfrak{M}_{im}^0 + \mathfrak{M}_{il}^0 - M_i = 0,$$

$$(5.3.2) \quad -k_{ij} \psi_j + \psi_i (k_{ij} + k_{ik} + \mu_{im} + \mu_{il}) - \psi_k k_{ik} + \bar{\mu}_{im} \psi_m + \bar{\mu}_{il} \psi_l - \mu'_{il} \delta_l + \\ + (\mu'_{il} - \mu'_{im}) \delta_i + \mu'_{im} \delta_m + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 + M_{im}^0 + M_{il}^0 - \mathfrak{M}_i = 0,$$

$$(5.3.3) \quad -\mu'_{ij} \varphi_j + (\mu'_{ik} - \mu'_{ij}) \varphi_i + \mu'_{ik} \varphi_k - \mu'_{im} \psi_m + (\mu'_{im} - \mu'_{il}) \psi_i + \mu'_{il} \psi_l - \mu''_{ik} \delta_k - \\ - \mu''_{ij} \delta_j - \mu''_{im} \delta_m - \mu''_{il} \delta_l + \delta_i (\mu''_{ij} + \mu''_{ik} + \mu''_{il} + \mu''_{im}) - \\ - T_{ik}^0 + T_{ij}^0 - T_{im}^0 + T_{il}^0 - P_i = 0.$$

Znamienne jest to, że wielkości  $\varphi$  i  $\psi$  związane są tylko trzecim równaniem.

W przypadku rusztu podpartego we wszystkich węzłach do dyspozycji pozostają równania (5.3.1) i (5.3.2), czyli równania trójczłonowe względem  $\varphi, \psi$ .

Układ równań (5.3.1) - (5.3.3) rozwiązać można najprościej, rozpatrując układ podstawowy geometrycznie niewyznaczalny. Układem tym będzie ruszt o wszystkich węzłach podpartych. Przy  $r$  węzłach swobodnych będzie to układ  $2r$ -krotnie geometrycznie niewyznaczalny.

Wyliczmy w tym układzie reakcje przywęzłowe wywołane obciążeniem zewnętrznym. Odpowiednie wartości kątów oznaczmy przez  $\varphi_{i,0}$  oraz  $\psi_{i,0}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ).

Dalej obciążmy układ podstawowy kolejnymi stanami  $\delta_k = 1$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) i wyznaczmy przynależne siły tnące przywęzłowe. Uzyskane kąty oznaczmy przez  $\varphi_{i,k}$  oraz  $\psi_{i,k}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, r$ ). Zrównoważmy następnie węzeł  $i$  układu rusztowego.

Otrzymamy równanie

$$(5.4) \quad \sum_{k=1}^r a_{ik}^{(2r)} \delta_k + a_{i0}^{(2r)} = 0.$$

Tutaj  $a_{ik}^{(2r)}$  oznacza sumę sił tnących przywęzłowych węzła  $i$ , wywołanych stanem  $\delta_k = 1$ , zaś  $a_{i0}^{(2r)}$  sumę sił tnących przywęzłowych węzła  $i$ , spowodowanych stanem obciążeń zewnętrznych w układzie podstawowym  $2r$ -krotnie geometrycznie niewyznaczalnym. Z układu równań (5.4) uzyskamy wielkości  $\delta$ , a ze wzorów

$$(5.5) \quad \varphi_i = \varphi_{i,0} + \sum_{k=1}^r \varphi_{i,k} \delta_k, \quad \psi_i = \psi_{i,0} + \sum_{k=1}^r \psi_{i,k} \delta_k, \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

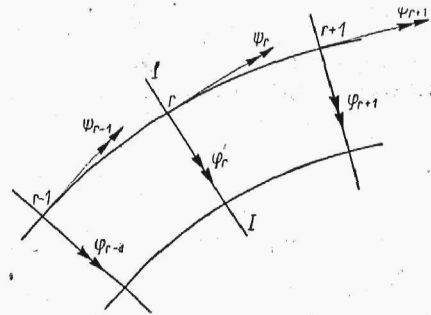
wielkości  $\varphi_i, \psi_i$ .

Dalsze uproszczenia otrzymamy w przypadku układów symetrycznych względem jednej lub więcej osi symetrii. Rozważmy układ przedstawiony na rys. 28 o jednej osi symetrii  $I-I$ . Mamy tu przy obciążeniu symetrycznym względem osi  $I-I$

$$(5.6) \quad \begin{cases} \varphi_{r-1} = -\varphi_{r+1}, & \varphi_r = 0, \\ \psi_{r-1} = \psi_{r+1}, & \psi_r \neq 0, \\ \delta_{r-1} = \delta_{r+1}, & \delta_r \neq 0. \end{cases}$$

Dla obciążenia antysymetrycznego względem osi  $I-I$  jest

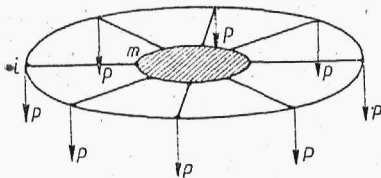
$$(5.7) \quad \begin{cases} \varphi_{r-1} = \varphi_{r+1}, & \varphi_r \neq 0, \\ \psi_{r-1} = -\psi_{r+1}, & \psi_r = 0, \\ \delta_{r-1} = -\delta_{r+1}, & \delta_r = 0. \end{cases}$$



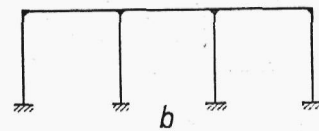
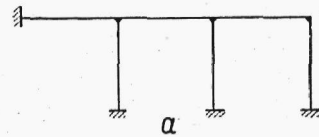
Rys. 28

Obciążenie niesymetryczne należy zatem rozłożyć na część symetryczną i część antysymetryczną.

Niezwykle prosto rozwiązuje się układy o symetrii cyklicznej i obciążone w sposób osiowo symetryczny. Dla przykładu podamy rozwiązanie dla rusztu przedstawionego na rys. 29. Jako jedyne niewiadome wystąpią tu nadliczbowe  $\psi$  i  $\delta$ , wspólne dla wszystkich węzłów.



Rys. 29



Rys. 30

Z układu równań (5.2.2) i (5.2.3) otrzymamy

$$(5.8) \quad \begin{cases} \psi (2k - 2\bar{k} + \mu_{mi}) - \delta \mu'_{mi} = 0, \\ -\psi \mu'_{im} + \delta \mu''_{im} - P = 0. \end{cases}$$

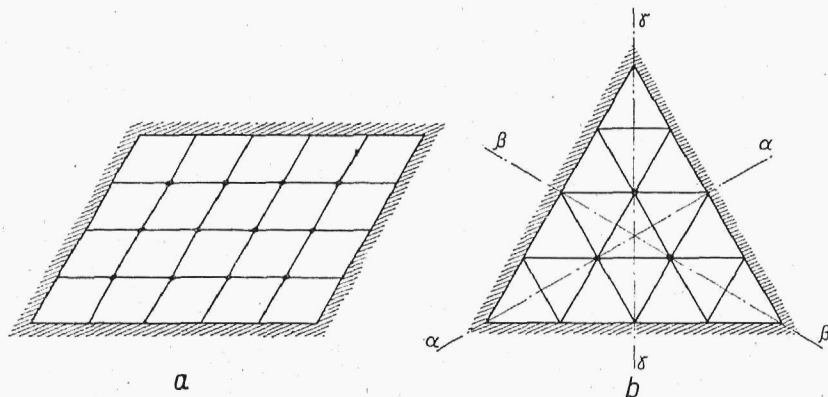
Z rozwiązania tego układu równań uzyskamy

$$(5.9) \quad \delta = P \frac{2(k - \bar{k}) + \mu_{im}}{-\mu_{im}^2 + \mu_{im}^2 + \mu_{im}'' [\mu_{im} + 2(k - \bar{k})]}, \quad \psi = \frac{\mu'_{im}}{2(k - \bar{k}) + \mu_{im}} \delta.$$

Szczególnym przypadkiem rusztu prostokątnego składającego się z prętów prostych jest rama ciągła, obciążona prostopadle do swojej płaszczyzny.



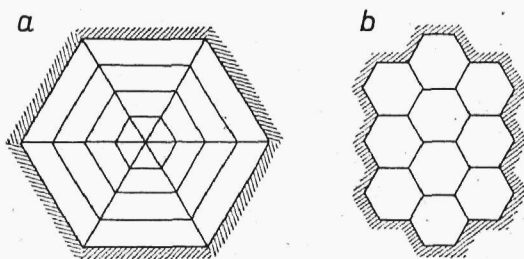
Obciążenie to występuje przy działaniu wiatru na ramę lub jako działanie ciężaru własnego ramy w trakcie jej montażu. Na rysunku 30 przedstawiono dwie ramy tego typu. Pierwsza rama jest układem dziewięciokrotnie niewyznaczalnym statycznie i geometrycznie, druga jest niewyznaczalna dwunastokrotnie geometrycznie i dziewięciokrotnie statycznie. W pierwszym przypadku posłużymy się metodą odkształceń jako prostszą i prędzej do celu prowadzącą, w drugim natomiast należy rozwiązać układ metodą sił.



Rys. 31

Pośród rusztów regularnych na uwagę zasługują ruszty składające się z dwu lub więcej gromad prętów, krzyżujących się pod tym samym kątem. Należą tu ruszty przedstawione na rys. 31.

Często spotykanymi rusztami są ruszty o siatce składającej się z belek promienistych i belek pierścieniowych, w postaci wieloboków umiarowych (rys. 32a), lub ruszty składające się z wieloboków foremnych (rys. 32b).



Rys. 32

lub więcej osi symetrii, to otrzymamy znaczne zmniejszenie ilości nadliczbowych.

Wskazać należy wreszcie na to, że w praktyce konstrukcyjnej spotkać się można z rusztami o dowolnej siatce. Nie podajemy tu jednak ogólnej postaci równań kanonicznych dla tych układów jako zbyt złożonej.

## 6. Ruszty spoczywające na sprężystym podłożu

Ruszty spoczywające na sprężystym podłożu występują nader często w budownictwie jako fundamenty pod konstrukcjami ramowymi. Układy rusztowe tego typu rozwiązuje się na ogół z pominięciem sztywności skręcania belek, co, oczywiście, nie daje ekonomicznej konstrukcji.

Rozwiązanie rusztów spoczywających na sprężystym podłożu przy użyciu metody odkształceń nie nastręcza znaczniejszych trudności; tok postępowania jest identyczny jak dla rusztów nie spoczywających na sprężystym podłożu.

Korzystamy tu ze związków wyprowadzonych w p. 1 i 3. Należy jedynie dodatkowo ułożyć równania transformacyjne, których współczynniki są nie tylko funkcjami wielkości geometrycznych i sprężystych pręta, ale również zależą od współczynnika gruntu.

Założymy tu uproszczony model podłoża, przyjmujący proporcjonalność ugięcia  $w(x)$  pręta do odporu  $r(x)$  podłoża:

$$(6.1) \quad w(x) = \frac{r(x)}{c}.$$

Tutaj  $c$  jest współczynnikiem zależnym od fizycznych własności podłoża. Wielkość  $c$  waha się w granicach od 5 kG/cm<sup>3</sup> (drobny piasek) do 200 kG/cm<sup>3</sup> (il ściśły). Zależność (6.1) odpowiada dostatecznie rzeczywistości tylko dla małych ugięć. Założmy dalej, że związek (6.1) jest słuszny dla każdego  $x$  w obrębie pręta; jest to równoznaczne z pozostawieniem belki w styczności z podłożem na całej swej długości. Ponadto pomijamy tarcie występujące między podłożem i belką. Mimo że związek (6.1) nie obrazuje dostatecznie dokładnie pracy podłoża [w rzeczywistości  $w(x)$  jest zależne od odporu podłoża nie tylko w punkcie  $x$ , ale również od odporu wzdłuż całej belki], posłużymy się tym związkiem w dalszych rozważaniach ze względu na jego prostotę; poza tym przy założeniu (6.1) uzyskano dobre wyniki w obliczeniach wielu konstrukcji (fundamenty śluz, statyka nawierzchni kolejowej itd.) Ograniczymy się jedynie do belek prostych, spoczywających na sprężystym podłożu.

Rozważmy pręt  $i$ - $k$  spoczywający na sprężystym podłożu. Niech węzły układu doznają przemieszczenia o składowych  $\varphi_{ik}$ ,  $\psi_{ik}$  i  $\delta_{ik}$  oraz  $\varphi_{ki}$ ,  $\psi_{ki}$  i  $\delta_{ki}$ . Dla wyznaczenia ugięcia belki posługujemy się równaniem różniczkowym

$$(6.2) \quad EI \frac{d^4 w}{dx^4} + cwb = 0,$$

gdzie  $EI$  jest sztywnością zginania belki, a  $b$  jej szerokością.

Równanie to doprowadzamy do postaci

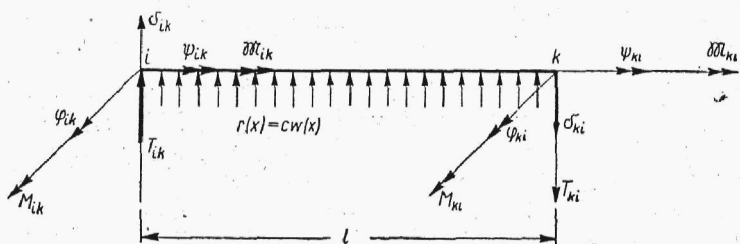
$$(6.3) \quad \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = 0,$$

gdzie

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{bc}}.$$

Rozwiązaniem równania (6.3) jest

$$(6.4) \quad w = U_1 \cos \xi \cosh \xi + U_2 \cos \xi \sinh \xi + U_3 \sin \xi \cosh \xi + U_4 \sin \xi \sinh \xi.$$



Rys. 33

Stałe całkowania wyznaczymy z następujących warunków brzegowych

$$(6.5) \quad \begin{aligned} w(0) &= -\delta_{ik}, & w(\eta) &= \delta_{ki}, \\ \frac{EI}{L^2} w''(0) &= -M_{ik}, & \frac{EI}{L^2} w''(\eta) &= M_{ki}, \end{aligned}$$

gdzie  $\eta = l/L$ .

Otrzymamy wówczas

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{aligned} U_1 &= -\delta_{ik}, \\ U_2 &= \frac{\delta_{ki} \cos \eta \sinh \eta + \delta_{ik} \sinh \eta \cosh \eta}{\sinh^2 \eta \cos^2 \eta + \cosh^2 \eta \sin^2 \eta} - \\ &\quad - \frac{\frac{L^2}{2EI} (M_{ki} \sin \eta \cosh \eta + M_{ik} \sin \eta \cos \eta)}{\sinh^2 \eta \cos^2 \eta + \cosh^2 \eta \sin^2 \eta}, \\ U_3 &= \frac{\delta_{ki} \sin \eta \cosh \eta + \delta_{ik} \sin \eta \cos \eta}{\cos^2 \eta \sinh^2 \eta + \cosh^2 \eta \sin^2 \eta} + \\ &\quad + \frac{\frac{L^2}{2EI} (M_{ik} \cosh \eta \sinh \eta + M_{ki} \cos \eta \sin \eta)}{\cos^2 \eta \sinh^2 \eta + \cosh^2 \eta \sin^2 \eta}, \\ U_4 &= -\frac{M_{ik} L^2}{2EI}. \end{aligned} \right.$$

Wyrażając wielkości  $\varphi_{ik}$  i  $\varphi_{ki}$  za pomocą związków

$$\left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = \frac{dw}{L d\xi} = \varphi_{ik}, \quad \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=l} = \left[ \frac{dw}{L d\xi} \right]_{\xi=\eta} = \varphi_{ki},$$

i zastępując występujące tu stałe całkowania za pośrednictwem wzorów (6.6), otrzymamy związki między momentami przywęzłowymi i składowymi przemieszczeń węzłów  $\varphi_{ik}$ ,  $\varphi_{ki}$ ,  $\delta_{ik}$  i  $\delta_{ki}$ .

Po prostych przekształceniach uzyskamy

$$(6.7) \quad \begin{cases} M_{ik} = \mu_{ik} \varphi_{ik} + \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ki} - \mu'_{ik} \delta_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \delta_{ki}, \\ M_{ki} = \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ki} + \mu_{ik} \varphi_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \delta_{ik} - \mu'_{ik} \delta_{ki}. \end{cases}$$

Tutaj

$$\mu_{ik} = \frac{2EI}{l} \eta \frac{\sinh \eta \cosh \eta - \sin \eta \cos \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta},$$

$$\bar{\mu}_{ik} = \frac{2EI}{l} \eta \frac{\cosh \eta \sin \eta - \cos \eta \sinh \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta},$$

$$\mu'_{ik} = \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \frac{\sinh^2 \eta + \sin^2 \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta},$$

$$\bar{\mu}'_{ik} = \frac{2EI}{l^2} 2\eta^2 \frac{\sinh \eta \sin \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta}.$$

Dla  $\eta = 0$ , a więc w braku sprężystego podłoża, otrzymamy

$$\mu_{ik} = \frac{4EI}{l}, \quad \bar{\mu}_{ik} = \frac{2EI}{l}, \quad \mu'_{ik} = \bar{\mu}'_{ik} = \frac{6EI}{l^2},$$

zgodnie ze wzorami (2.27).

Siły tnące otrzymamy ze wzorów

$$T_{ik} = - \left[ \frac{EI}{L^3} \frac{d^3 w}{d\xi^3} \right]_{\xi=0}, \quad T_{ki} = - \left[ \frac{EI}{L^3} \frac{d^3 w}{d\xi^3} \right]_{\xi=\eta}.$$

Po przekształceniach uzyskamy wreszcie

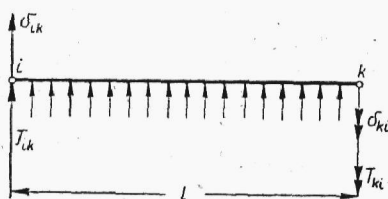
$$(6.8) \quad \begin{cases} T_{ik} = -\mu'_{ik} \varphi_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \varphi_{ki} + \mu''_{ik} \delta_{ik} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ki}, \\ T_{ki} = -\bar{\mu}'_{ik} \varphi_{ik} - \mu'_{ik} \varphi_{ki} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ik} + \mu''_{ik} \delta_{ki}. \end{cases}$$

Tutaj

$$(6.9) \quad \begin{cases} \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \frac{\sinh \eta \cosh \eta + \cos \eta \sin \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta}, \\ \bar{\mu}''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \frac{\cosh \eta \sin \eta + \cos \eta \sinh \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta}. \end{cases}$$

Dla  $\eta = 0$  otrzymamy  $\mu''_{ik} = \bar{\mu}''_{ik} = 12EI/l^3$  zgodnie ze wzorami (2.27). Oporu podłoża przy skręcaniu prętów nie uwzględniamy, gdyż belki fundamentowe betonuje się w deskowaniu bocznym, które się usuwa po stwardnieniu betonu.

Przywęzłowe momenty skręcające wyrazimy związkami



Rys. 34

$$\mathfrak{M}_{ik} = \frac{GC}{l} (\psi_{ik} - \psi_{ki}),$$

$$\mathfrak{M}_{ki} = -\frac{GC}{l} (\psi_{ik} - \psi_{ki}).$$

Dla obciążenia zewnętrznego działającego na pręt oraz przy podanych przemieszczeniach brzegowych równania transformacyjne przyjmują postać

$$(6.10.1) \quad M_{ik} = M_{ik}^0 + \mu_{ik} \varphi_{ik} + \varphi_{ki} \bar{\mu}_{ik} - \mu'_{ik} \delta_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \delta_{ki},$$

$$(6.10.2) \quad M_{ki} = M_{ki}^0 + \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ik} + \varphi_{ki} \mu_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \delta_{ik} - \mu'_{ik} \delta_{ki},$$

$$(6.10.3) \quad \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + k_{ik} (\psi_{ik} - \psi_{ki}),$$

$$(6.10.4) \quad \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 - k_{ik} (\psi_{ik} - \psi_{ki}),$$

$$(6.10.5) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 - \mu'_{ik} \varphi_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \varphi_{ki} + \mu''_{ik} \delta_{ik} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ki},$$

$$(6.10.6) \quad T_{ki} = T_{ki}^0 - \bar{\mu}'_{ik} \varphi_{ik} - \mu'_{ik} \varphi_{ki} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ik} + \mu''_{ik} \delta_{ki}.$$

Wielkości  $M_{ik}^0, M_{ki}^0, \dots, T_{ik}^0$  są siłami brzegowymi, wywołanymi obciążeniem zewnętrznym, działającym w układzie podstawowym geometrycznie wyznaczalnym. Wartości te nie trudno wyznaczyć znanymi metodami.

Niech w węźle  $i$  istnieje przegub tak skonstruowany, że  $M_{ik} = 0$  i  $\mathfrak{M}_{ik} = 0$ . Z równań (6.10.1) i (6.10.3) wyznaczamy  $\varphi_{ik}$  oraz  $\psi_{ik}$  i wstawiamy te wielkości do wzorów (6.10.2) i (6.10.4).

Otrzymamy następujące wzory transformacyjne :

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{ik} = 0, \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \mu_{ik} \varphi_{ki} - \bar{\mu}_{ik}' \delta_{ik} - \mu_{ik}' \delta_{ki}, \\ \mathfrak{M}_{ik} = 0, \\ \mathfrak{M}_{ki} = [\mathfrak{M}_{ki}], \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \bar{\mu}_{ik}' \varphi_{ki} + \mu_{ik}'' \delta_{ik} + \bar{\mu}_{ik}'' \delta_{ki}, \\ T_{ki} = T_{ki}^0 - \mu_{ik}' \varphi_{ki} + \bar{\mu}_{ik}'' \delta_{ik} + \mu_{ik}'' \delta_{ki}. \end{array} \right.$$

Tutaj  $M_{ki}^0, \dots, T_{ki}^0$  są siłami przywęzłowymi w pręcie utwierdzonym zupełnie w węźle  $k$ , a podpartym w sposób swobodny w węźle  $i$ .

We wzorach (6.11) oznaczają

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{ik} = \frac{2EI}{l} \eta \frac{\cosh^2 \eta - \cos^2 \eta}{\sinh \eta \cosh \eta - \sin \eta \cos \eta}, \\ \bar{\mu}_{ik}' = \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \frac{\sinh \eta \cosh \eta + \sin \eta \cos \eta}{\sinh \eta \cosh \eta - \sin \eta \cos \eta}, \\ \mu_{ik}' = \frac{2EI}{l^2} 2\eta^2 \frac{\sinh \eta \cos \eta + \cosh \eta \sin \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}, \\ \mu_{ik}'' = \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \frac{\cosh^2 \eta + \cos^2 \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}, \\ \bar{\mu}_{ik}'' = \frac{2EI}{l^3} 4\eta^3 \frac{\cosh \eta \cos \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}, \\ \mu_{ik}''' = \frac{2EI}{l^3} 4\eta^3 \frac{\cosh^2 \eta - \sin^2 \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}. \end{array} \right.$$

Dla  $\eta \rightarrow 0$  otrzymamy

$$\mu_{ik} = \frac{3EI}{l}, \quad \mu_{ik}' = \bar{\mu}_{ik} = \frac{3EI}{l^2}, \quad \mu_{ik}'' = \bar{\mu}_{ik}'' = \mu_{ik}''' = \frac{3EI}{l^3},$$

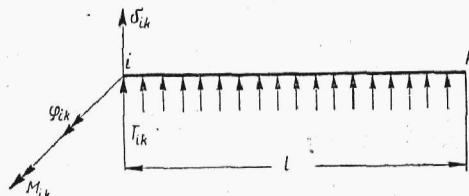
zgodnie ze wzorami (2.28).

W przypadku przegubów w  $i$  oraz  $k$  mamy

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{ik} = T_{ik}^0 + \mu_{ik}'' \delta_{ik} + \bar{\mu}_{ik}'' \delta_{ki}, \\ T_{ki} = T_{ki}^0 + \bar{\mu}_{ik}'' \delta_{ik} + \mu_{ik}'' \delta_{ki}. \end{array} \right.$$

Tutaj jest

$$(6.14) \quad \begin{cases} \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} \eta^3 \frac{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}{\cosh^2 \eta - \cos^2 \eta}, \\ \mu'_{ik} = \frac{2EI}{l^3} \eta^3 \frac{\sinh \eta \cos \eta - \cosh \eta \sin \eta}{\cosh^2 \eta - \cos^2 \eta}. \end{cases}$$



Rys. 35

Dla belki wspornikowej (rys. 35) otrzymamy następujące wzory transformacyjne:

$$(6.15) \quad \begin{cases} M_{ik} = M_{ik}^0 + \mu_{ik} \varphi_{ik} - \mu'_{ik} \delta_{ik}, \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \mu'_{ik} \varphi_{ik} + \mu''_{ik} \delta_{ik}, \end{cases}$$

gdzie

$$(6.16) \quad \begin{cases} \mu_{ik} = \frac{2EI}{l} \eta \frac{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}{\cosh^2 \eta + \cos^2 \eta}, \\ \mu'_{ik} = \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \frac{\sinh^2 \eta + \sin^2 \eta}{\cosh^2 \eta + \cos^2 \eta}, \\ \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} \eta^3 \frac{\sinh 2\eta + \sin 2\eta}{\cosh^2 \eta + \cos^2 \eta}. \end{cases}$$

Dla belki wspornikowej nieskończenie długiej ( $l \rightarrow \infty$ ) otrzymamy

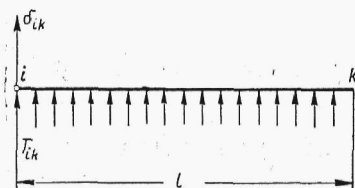
$$(6.17) \quad \begin{cases} M_{ik} = M_{ik}^0 + \frac{2EI}{l} \eta \varphi_{ik} - \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \delta_{ik}, \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \varphi_{ik} + \frac{2EI}{l^3} \eta^3 \delta_{ik}. \end{cases}$$

Dla wspornika o skończonej długości, opatrzonego przegubem w węźle i (rys. 36), mamy

$$(6.18) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 + \mu''_{ik} \delta_{ik},$$

gdzie

$$(6.19) \quad \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \frac{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}.$$



Rys. 36

W szczególnym przypadku nieskończenie długiego wspornika znajdziemy

$$(6.20) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 + \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \delta_{ik}.$$

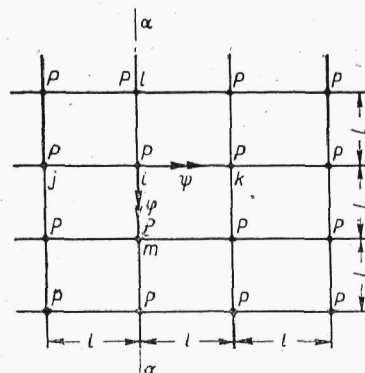
Przy obciążeniu rusztu leżącego na sprężystym podłożu siłami prostopadłymi do płaszczyzny rusztu lub momentami o wektorach leżących

w płaszczyźnie rusztu pozostają w mocy równania warunkowe, omówione w p. 1 i 3.

Po wyznaczeniu nadliczbowych układu wyznaczamy siły przywęzłowe korzystając z równań transformacyjnych. Znajomość wielkości  $M_{ik}$ ,  $M_{ki}$ ,  $\delta_{ik}$  oraz  $\delta_{ki}$  pręta  $i-k$  pozwoli na wyznaczenie stałych  $U_1, \dots, U_4$  ze wzorów (6.6). Tym samym określona jest linia ugięcia pręta  $i-k$  (wzór 6.4). Momenty zginające i siły tnące, w dowolnej odległości  $x = \xi l$  od podpory  $i$ , otrzymamy ze znanych związków

$$(6.21) \quad M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad T = -EI \frac{d^3 w}{dx^3}.$$

Dla przykładu podamy rozwiązanie dla nader prostego przypadku rusztu ortogonalnego nieograniczonego, składającego się z prętów o jednakowych właściwościach sprężystych i geometrycznych. Niech ruszt ten obciążony będzie jedynie w węzłach (rys. 37).



Rys. 37

Ponieważ osie  $\alpha-\alpha$  i  $\beta-\beta$  są osiami symetrii, jako jedyne równanie pozostaje

$$(6.22) \quad -T_{ik} + T_{ij} + T_{im} - T_{il} - P = 0.$$

Z równań (6.10) otrzymamy

$$(6.23) \quad \begin{cases} T_{ij} = \bar{\mu}'' (-\delta_j) + \mu'' \delta_i, \\ -T_{ik} = -\mu'' (-\delta_i) - \bar{\mu}'' \delta_k, \\ T_{im} = \bar{\mu}'' (-\delta_m) + \mu'' \delta_i, \\ -T_{il} = -\mu'' (-\delta_i) - \bar{\mu}'' \delta_l. \end{cases}$$

Równanie (6.22) napiszemy zważywszy, że  $\delta_i = \delta_j = \delta_k = \delta_l = \delta_m = \delta$ , w postaci

$$4(\mu'' - \bar{\mu}'')\delta - P = 0.$$

Stąd

$$\delta = \frac{P}{4(\mu'' - \bar{\mu}'')}.$$

Ze wzorów (6.23) obliczymy

$$T_{ij} = -T_{ik} = T_{im} = -T_{il} = \frac{P}{4}.$$



Ze wzoru (6.10.1) obliczymy moment

$$(6.24) \quad \begin{cases} M_{ik} = -\mu'(-\delta_i) - \bar{\mu}'\delta_k = (\mu' - \bar{\mu}')\delta = \frac{P}{4} \frac{\mu' - \bar{\mu}'}{\mu'' - \bar{\mu}''}, \\ M_{ik} = \frac{Pl}{8\eta} \frac{(\sinh \eta - \sin \eta)^2}{\cosh \eta (\sinh \eta - \sin \eta) + \cos \eta (\sinh \eta + \sin \eta)}. \end{cases}$$

Dla  $\eta > 7$  traktować można pręty jako nieskończenie długie.

Stosując wzory (6.17) otrzymamy z równania (6.22)

$$(6.25) \quad \begin{cases} \delta = \frac{Pl^3}{8EI\eta^3}, & T_{ij} = -T_{ik} = T_{im} = -T_{il} = \frac{P}{4}, \\ M_{ik} = -M_{ij} = M_{il} = -M_{im} = \frac{Pl}{8\eta}. \end{cases}$$

Wyprowadzone tu związki znaleźć mogą również zastosowanie do rozwiązywania układów ramowych płaskich i przestrzennych, których słupy związane są w sposób sztywny lub przegubowy z belkami fundamentowymi spoczywającymi na sprężystym podłożu.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] K. Beyer, *Die Statik im Eisenbetonbau*, Berlin 1935.
- [2] A. Hawranek, *Allgemeine Theorie der Wirkung von Querriegeln bei zweiseitigen Bogenbrücken*, Zurych 1927.
- [3] L. Mani, *Theorie der Rahmentragwerke auf neuer Grundlage*, Berlin 1927.
- [4] W. Nowacki, *Statyka rusztów płaskich*, 1945 (dysertacja doktorska, maszynopis w bibl. centr. Politechniki Warszawskiej).
- [5] P. Noli, *Il metodo delle deformazione nel piano*, Mediolan 1939.
- [6] A. Ostfeld, *Die Deformationsmethode*, Berlin 1928.
- [7] I. M. Rabinowicz, *Kurs stroitelnoj miechaniki stierzniewych sistem*, Moskwa 1940.
- [8] M. B. Remez, *K woprosom o rasczecie kriwoliniejnych i łomanych w planie balok*, Leningrad 1938.
- [9] A. A. Umanski, *Prostranstwiennyye sistemi*, Moskwa 1948.
- [10] St. Szegö, *Über die Berechnung quadratischer Kreuzeckroste*.
- [11] W. Wierzbicki, *Teoria dźwigarów załamanych w planie*, Warszawa 1926.
- [12] W. Wierzbicki, *Belki ciągle załamane w planie*, 1931.
- [13] W. Wierzbicki, *De l'application des équations simultanées à différences finies en statique des constructions*, Zurych 1936.
- [14] W. Wierzbicki, *Dźwigary załamane w planie*, Warszawa 1954.

## Резюме

### СТАТИКА ПЛОСКИХ РОСТВЕРКОВ

Работа занимается применением метода деформаций, широко используемого в статике плоских рам, к рамным системам, нагруженным силами, перпендикулярными к плоскости рамы, или моментами, векторы которых лежат в плоскости рамной системы. Системы такого типа называем плоскими ростверками.

Эти системы находят широкое применение в железобетонном строительстве, в виде изогнутых в плане балок, кольцевых балок, плоских рам, под действием ветровой нагрузки и т. д.

В первом пункте приведен общий метод решения систем этого типа; во втором пункте выведены общие формулы трансформации этого метода для закрученных и изогнутых в плане стержней.

В далее следующих пунктах выведено каноническое уравнение этого метода, специализируя его на типичные для строительства системы.

Наконец в последнем пункте методы деформаций расширены на ростверки, лежащие на упругом основании.

## Summary

### THE STATICS OF FLAT GRIDWORK SYSTEMS

The subject of this paper is the application of the deformation method, widely used in the statics of flat frames, for frame systems loaded with forces perpendicular to the plane of the frame or with moments, whose vectors lie in the plane of the system. Systems of this kind are called flat gridwork systems.

These systems are applied extensively in reinforced concrete structures such as broken line girders, annular beams, flat frames loaded by forces caused by the wind, etc.

In the first section a general method of solution is given, while the second section deals with the formulae of general transformation for curved and broken line bars.

In the following sections the canonical equation of the above method is expanded. This is then reduced to more specialized forms which are typical for building technique.

Finally, in the last section, the deformation methods are extended to include gridwork systems resting on an elastic foundation.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKOW CIĄGŁYCH  
IPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1954 r.*