

# **NAUKOWE OSIĄGNIĘCIA MECHANIKI W WALCE O POSTĘP W BUDOWNICTWIE**

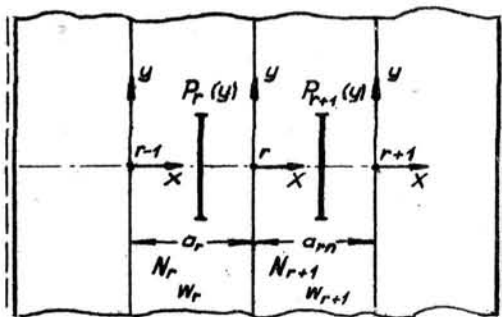
**CZEŚĆ III, ZESZYT I**

**z materiałów nadesłanych na Zjazd Naukowy PZITB  
w Gdańsku 1 – 4 grudnia 1949 r.**

## P r z y c z y n e k   d o   t e o r i i p ł y t   c i ą g ł y c h .

### A). Zginanie płyt ciągłych nieskończenie długich.

Rozważmy płytę nieskończenie długą w kierunku osi opierającą się na niepodatnych, równoległych podporach liniowych (rys. 1). Załóżmy różne rozpiętości  $\alpha$  i różne sztywności  $N$  poszczególnych przęseł. Grubość płyty przyjmujemy małą w stosunku do rozpiętości  $\alpha$ , ugięcie zaś płyty bardzo małe w stosunku do jej grubości. Ograniczymy się do zakresu odkształceń sprężystych.



Rys. 1.

Niech na płytę działa obciążenie liniowe  $P(y)$  równoległe do osi  $y$  i symetryczne względem osi  $x$  <sup>1)</sup>

Jako wielkości "nadliczkowe" płyty ciągłej przyjmujemy momenty podporowe  $M_y(0, y)$ . Oznaczmy je przez  $M_r$  ( $r=1, 2, \dots$ ). Zarówno obciążenie  $P(y)$  jak i mo-

menty podporowe wyrazimy przez całki Fouriera

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(\alpha) \cdot \cos \alpha y \, d\alpha ; & p(\alpha) &= \int_0^{\infty} P(\lambda) \cdot \cos \alpha \lambda \, d\lambda , \\ M_r(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m_r(\alpha) \cdot \cos \alpha y \, d\alpha ; & m_r(\alpha) &= \int_0^{\infty} M_r(\lambda) \cdot \cos \alpha \lambda \, d\lambda . \end{aligned} \quad \dots (1)$$

Zakładamy tu jednocześnie, że  $\int_0^{\infty} P(\lambda) \, d\lambda$  posiada wartość skończoną.

Wielkości momentów podporowych  $M_r$  wyznaczmy z odpowiedniej ilości równań warunkowych, równań ciągłości płyty na podporach poprzecznych:

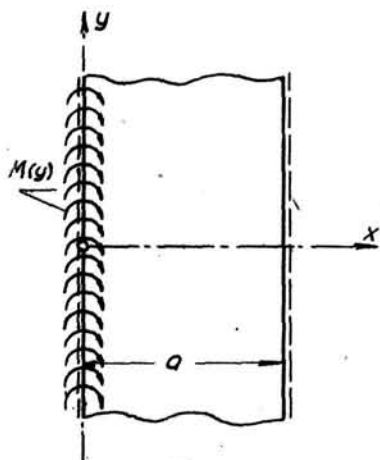
<sup>1)</sup> Szczególny wypadek postawionego zagadnienia, mianowicie zginanie płyty obustronnie utwierdzonej zupełnie w krawędziach  $r$  i  $r+1$  i obciążonej siłą skupioną w osi  $x$  (wypadek szczególny obciążenia liniowego  $P(x)$ ) znalazł rozwiązanie w pracy A. Nadai : "Über die Biegung der rechteckigen Platten durch Einzellasten", Der Bauingenieur, 1921, H. 11. str. 301.

$$\frac{\partial w_r}{\partial x} \Big|_{x=a_r} = \frac{\partial w_{r+1}}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \dots (2)$$

W równaniu powyższym  $w$  oznacza rzędne powierzchni ugięcia płyty.

Ustawienie równań trójczłonowych poprzedzimy opracowaniem układu podstawowego płyty w kierunku  $y$  nieskończenie długiej, spoczywającej w sposób swobodny na dwóch sąsiednich równoległych podporach, obciążonych momentami podporowymi  $M(y)$  i obciążeniem  $P(y)$ .

a). Obciążenie układu podstawowego symetrycznym momentem podporowym:



Rys. 2

Jako rozwiązanie równania różniczkowego powierzchni ugięcia

$$\Delta \Delta w = 0 ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \dots (3)$$

przyjmijemy całkę Fouriera:

$$w = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} \cdot (A \cdot \cosh \alpha x + B \cdot \alpha x \cdot \sinh \alpha x + C \cdot \sinh \alpha x + D \cdot \alpha x \cdot \cosh \alpha x) \cdot \cos \alpha y \, d\alpha \quad \dots (4)$$

Wielkości  $A, B, C, D$  funkcje parametryczne  $\alpha$  wyliczymy z następujących warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = 0 \quad -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m(\alpha) \cdot \cos \alpha y \, d\alpha \\ w|_{x=a} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

Wielkość  $N$  jest tzw. sztywnością zginania płyty:

$$N = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)}$$

W ostatnim wyrażeniu  $E$  jest modułem sprężystości,  $\mu$  liczbą

Poissona, a  $h$  grubością płyty.

Z warunków brzegowych (5) otrzymamy:

$$\begin{aligned} A = 0, \quad C &= \frac{\nu}{2N} (1 - \operatorname{ctgh}^2 \nu) \cdot m(\alpha) & \nu &= \alpha \cdot a \\ B &= \frac{m(\alpha)}{2N}, \quad D = \frac{\operatorname{ctgh} \nu \cdot m(\alpha)}{2N} \end{aligned}$$

Powierzchnię ugięcia wyrazi zatem równanie:

$$w = \frac{a^2}{N \cdot \pi} \int_0^\infty [\alpha \cdot x \cdot \sinh \nu \cdot \cosh \alpha \cdot (a - x) - \nu \cdot \sinh \alpha \cdot x] \cdot \frac{m(\alpha) \cdot \cos \alpha \cdot y}{\nu^2 \cdot \sinh^2 \nu} d\alpha \quad \dots (6)$$

Z ostatniego związku wyliczymy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{a}{N \cdot \pi} \int_0^\infty m(\alpha) \cdot \Phi(\nu) \cdot \cos \alpha \cdot y d\alpha \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} &= - \frac{a}{N \cdot \pi} \int_0^\infty m(\alpha) \cdot \Psi(\nu) \cdot \cos \alpha \cdot y d\alpha \end{aligned} \quad \dots (7)$$

gdzie

$$\Phi(\nu) = \frac{\cosh \nu \cdot \sinh \nu - \nu}{\nu \cdot \sinh^2 \nu} \quad \Psi(\nu) = \frac{\nu \cdot \cosh \nu - \sinh \nu}{\nu \cdot \sinh^2 \nu} \quad \dots (8)$$

b). Obciążenie układu podstawowego momentem  $M(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m(\alpha) \cdot \cos \alpha \cdot y d\alpha$  o krawędzi  $x = a$ .

Postępując podobnie jak w wypadku omówionym w poprzednim ustępie uzyskamy:

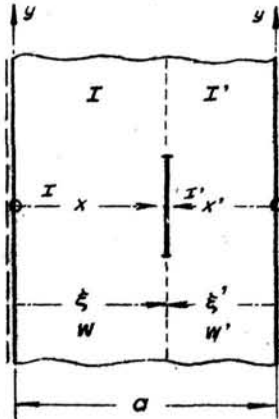
$$w = \frac{a^2}{N \cdot \pi} \int_0^\infty [\alpha \cdot (a - x) \cdot \sinh \nu \cdot \cosh \alpha \cdot x - \nu \cdot \sinh \alpha \cdot (a - x)] \cdot \frac{m(\alpha) \cdot \cos \alpha \cdot y \cdot d\alpha}{\nu^2 \cdot \sinh^2 \nu} \quad \dots (9)$$

Nachylenie stycznej do powierzchni ugięcia wyraża równania:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{a}{N \cdot \pi} \int_0^\infty m(\alpha) \cdot \Psi(\nu) \cdot \cos \alpha \cdot y \cdot d\alpha; \quad \dots (10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = - \frac{a}{N \cdot \pi} \cdot \int_0^{\infty} m(\alpha) \cdot \Phi(\nu) \cdot \cos \alpha \cdot y \cdot d\alpha. \quad \dots (10)$$

c). Układ podstawowy przy obciążeniu  $P(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} p(\alpha) \cdot \cos \alpha \cdot y \cdot d\alpha$  symetrycznym względem prostej  $y=0$ .



Rys. 3.

Płytę traktujemy jako dwie płyty podzielone przekrojem  $x=\xi$ . Przy takim ujęciu równania różniczkowe płyty I i I' są równaniami jednorodnymi.

Otrzymujemy

$$\text{dla płyty I: } \Delta \Delta w = 0; \quad \dots (11a)$$

$$\text{dla płyty I': } \Delta \Delta w' = 0. \quad \dots (11b)$$

Jako rozwiązanie równania różniczkowego (11a) przyjmujemy całkę

$$w = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} \cdot (A \cdot \sinh \alpha \cdot x + B \cdot \alpha \cdot x \cdot \cosh \alpha \cdot x) \cdot \cos \alpha \cdot y \cdot d\alpha, \quad \dots (12a)$$

a jako rozwiązanie równania (11b) całkę

$$w' = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} \cdot (A' \cdot \sinh \alpha \cdot x' + B' \cdot \alpha \cdot x' \cdot \cosh \alpha \cdot x') \cdot \cos \alpha \cdot y \cdot d\alpha. \quad \dots (12b)$$

Funkcje parametru  $\alpha$ :  $A(\alpha)$ ,  $A'(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $B'(\alpha)$  wyznaczmy z dwóch warunków geometrycznych w przekroju  $x = \xi$ :

$$w = w'; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{\partial w'}{\partial x'}$$

i z dwóch warunków statycznych, mianowicie warunku równości momentów zginających  $M_x$  w tym przekroju:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}$$

oraz warunku równości obciążenia  $P(y)$  różnicy sił tnących na lewo i prawo od przekroju  $x = \xi$ :

$$-N \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w'}{\partial x'^3} \right] = P(y).$$

Podstawienie do powyższych warunków brzegowych wielkości  $w, w'$  z równań (12a, b) daje cztery niejednorodne równania, z których obliczymy:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{p(\alpha) \cdot a}{2N \cdot v \cdot \sinh v} \cdot (\alpha \cdot \xi \cdot \cosh \alpha \cdot \xi' + \sinh \alpha \cdot \xi' - v \frac{\sinh \alpha \cdot \xi}{\sinh v}) ; \\ A' &= \frac{p(\alpha) \cdot a}{2N \cdot v \cdot \sinh v} \cdot (\alpha \cdot \xi' \cdot \cosh \alpha \cdot \xi + \sinh \alpha \cdot \xi - v \frac{\sinh \alpha \cdot \xi'}{\sinh v}) ; \\ B &= -\frac{p(\alpha) \cdot a}{2N \cdot v \cdot \sinh v} \cdot \sinh \alpha \cdot \xi' ; \\ B' &= -\frac{p(\alpha) \cdot a}{2N \cdot v \cdot \sinh v} \cdot \sinh \alpha \cdot \xi . \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

Nachylenie stycznej do powierzchni odkształcenia płyty określają następujące związki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{a^2}{N \cdot \pi} \int_0^\infty p(\alpha) \cdot \theta'(\alpha, \xi) \cdot \cos \alpha \cdot y \, d\alpha ; \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} &= -\frac{a^2}{N \cdot \pi} \int_0^\infty p(\alpha) \cdot \theta^p(\alpha, \xi) \cdot \cos \alpha \cdot y \, d\alpha , \end{aligned} \dots (14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \theta'(\alpha, \xi) &= (\alpha \cdot \xi \cdot \sinh v \cdot \cosh \alpha \cdot \xi' - v \cdot \sinh \alpha \cdot \xi) \cdot \frac{1}{v^2 \cdot \sinh^2 v} ; \\ \theta^p(\alpha, \xi) &= (\alpha \cdot \xi' \cdot \sinh v \cdot \cosh \alpha \cdot \xi - v \cdot \sinh \alpha \cdot \xi') \cdot \frac{1}{v^2 \cdot \sinh^2 v} . \end{aligned} \dots (15)$$

Po tak opracowanym układzie podstawowym przystąpić możemy do ustawienia równań trójczłonowych.

Niech więc w prześle  $(r-1) - r$  działa obciążenie  $P_r(y)$  w prześle  $r - (r+1)$  obciążenie  $P_{r+1}(y)$  w sposób symetryczny względem osi  $x$ . Oznaczmy momenty podporowe  $M_x(y)$  na podporach  $r-1, r, r+1$  przez  $M_{r-1}, M_r, M_{r+1}$ .

Warunek ciągłości (2) powierzchni odkształcenia na podporze  $r$  daje:

$$\begin{aligned} m_{r-1}(\alpha) \cdot \Psi_r(\alpha) \cdot c_r + m_r(\alpha) \cdot [\Phi_r(\alpha) \cdot c_r + \Phi_{r+1}(\alpha) \cdot c_{r+1}] + m_{r+1}(\alpha) \cdot \Psi_{r+1}(\alpha) \cdot c_{r+1} + \\ + a_r \cdot c_r \cdot p_r(\alpha) \cdot \theta_r^l(\alpha, \xi_r) + a_{r+1} \cdot c_{r+1} \cdot p_{r+1}(\alpha) \cdot \theta_{r+1}^p(\alpha, \xi_{r+1}) = 0 . \end{aligned} \dots (16)$$

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

W powyższym równaniu  $c_r$  oznacza stosunek  $\frac{a_r \cdot N_o}{a_o \cdot N_r}$ , gdzie  $N_o$  jest dowolną porównawczą sztywnością na zginanie płyty, a  $a_o$  dowolną porównawczą rozpiętością płyty.

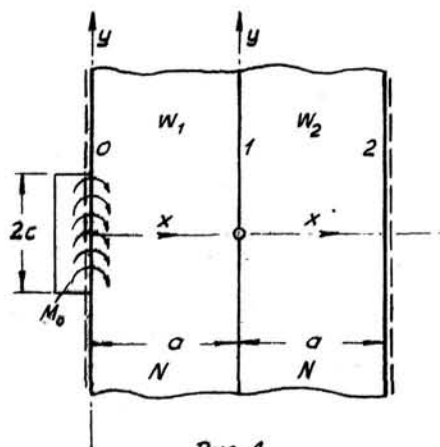
Ilość równań odpowiada ilości nadliczbowych  $m(\alpha)$ . Momenty podporowe otrzymamy ze związku:

$$M_r(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m(\alpha) \cdot \cos \alpha \cdot y \, d\alpha.$$

Zauważmy wreszcie, że bez trudu rozszerzyć możemy równanie trzech momentów, w wypadku momentu zewnętrznego nad podporą, na równanie czterech momentów.

Niech kilka prostych przykładów objaśni tok postępowania.

- 1). Płyta dwuprzęsłowa o jednakowych wielkościach geometrycznych i sprężystych. Na zewnętrznej linii podporowej działa moment  $M_o$  jednostajnie rozłożony na odcinku  $2c$  (rys.4).



Rys. 4.

Tutaj

$$M_o = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m_o(\alpha) \cdot \cos \alpha \cdot y \, d\alpha,$$

a

$$m_o(\alpha) = \int_0^c M_o \cdot \cos \alpha \cdot \lambda \, d\lambda = M_o \frac{\sin \alpha \cdot c}{\alpha}.$$

Ustawiając równanie (16) dla podpory 1 i zważywszy, że  $M_2 = 0$  otrzymamy

$$m_o(\alpha) \cdot \Psi(\alpha) + 2 m_1(\alpha) \cdot \Phi(\alpha) = 0.$$

Otrzymamy stąd, korzystając ze związków (8)

$$m_1(\alpha) = - \frac{M_o \cdot a}{2} \cdot \frac{v \cdot \cosh v - \sinh v}{\cosh v \cdot \sinh v - v} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot c}{v},$$

a dalej.

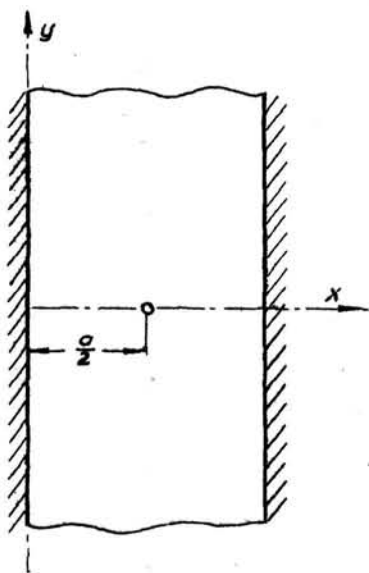
$$M_1(y) = - \frac{M_o}{\pi} \int_0^\infty \frac{v \cdot \cosh v - \sinh v}{\cosh v \cdot \sinh v - v} \cdot \frac{\sin \beta \cdot v}{v} \cdot \cos z v \, dv,$$

gdzie  $\beta = \frac{c}{a}$ ,  $v = \alpha \cdot a$ ,  $z = \frac{y}{a}$ .

Każdej wartości  $y$  odpowiada wartość  $M_1(y)$  uzyskana z rozwiązania całki niewłaściwej.

- 2). Płyta obustronnie utwierdzona zupełnie. Obciążenie siłą skupioną  $Q$  w środku płyty na osi  $y=0$ . (rys.5)

$$P(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(\alpha) \cdot \cos \alpha y, \quad p = \frac{Q}{2}.$$



Rys. 5.

Równanie (16) ustawione dla podpory 1 ( przy założeniu  $N \rightarrow \infty$  w przesłach sąsiednich ) daje:

$$m_1(\alpha) [\Psi(\alpha) + \Phi(\alpha)] + \frac{Q \cdot a}{2} \cdot \theta^I(\alpha, \frac{a}{2}) = 0. \quad \dots (a)$$

Korzystając ze wzorów (8) i (15) otrzymamy po prostych przekształceniach:

$$m_1(\alpha) = -\frac{Q \cdot a}{4} \cdot \frac{\sinh \frac{\nu}{2}}{\sinh \nu + \nu}; \quad \dots (b)$$

Stąd

$$M_1(y) = -\frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh \frac{\nu}{2}}{\nu + \sinh \nu} \cdot d\nu = \dots (c) \\ = M_2(y).$$

Momenty podporowe wywołają w przekroju  $x = \frac{a}{2}$  następującą wartość ugięcia płyty:

$$w_M(\frac{a}{2}, y) = \frac{a}{N \cdot \pi} \int_0^{\infty} m_1(\nu) \cdot \frac{\frac{\nu}{2} \cdot \sinh \nu \cdot \cosh \frac{\nu}{2} - \nu \cdot \sinh \frac{\nu}{2}}{\nu^2 \cdot \sinh^2 \nu} \cdot \cos \nu z \, d\nu; \\ z = \frac{y}{a}$$

W punkcie zaczepienia siły  $Q$  znajdziemy:

$$w_M(\frac{a}{2}, 0) = \frac{Q \cdot a^2}{8\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tanh^2 \frac{\nu}{2}}{\nu \cdot (\nu + \sinh \nu)} \, d\nu.$$

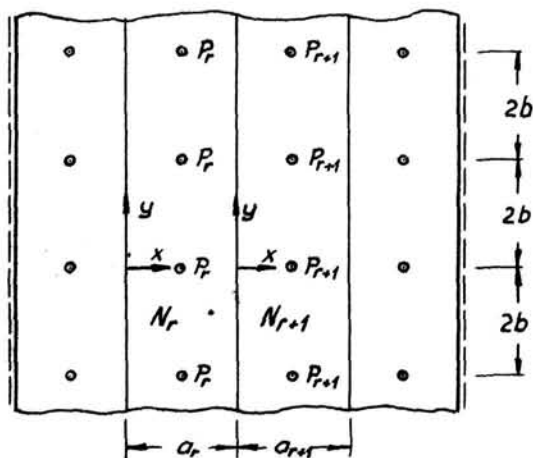
Całkowite ugięcie w punkcie zaczepienia siły składa się z ugięcia  $w_0$  w układzie podstawowym oraz z ugięcia spowodowanego momentami podporowymi.

$$w = w_0 + w_M = \frac{Q \cdot a^2}{2N \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \frac{Q \cdot a^2}{8N \cdot \pi} \int_0^{\infty} \frac{\tanh^2 \frac{\nu}{2}}{\nu \cdot (\nu + \sinh \nu)} \, d\nu = 0,079 \frac{Q \cdot a^2}{E \cdot h^3} \cdot *)$$

\*) wynik ten uzyskał na innej drodze A. Nadeł w wymienionej pod 1) pracy.



B). Płyta ciągła, nieskończenie długa, obciążona układem sił  $P$  działających w jednakowych odległościach  $2b$  (rys.6)



Rys. 6.

Z omówionym w ustępie (A) zagadnieniem wiąże się wypadek zginania płyt ciągłych, nieskończenie długich, obciążonych układem sił  $P$  działających w jednakowych odstępach.

Wyrażając momenty podporowe i siły skupione  $P$  przy pomocy szeregu Fouriera:

$$M(y) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} m_n \cdot \cos \varphi_n y ;$$

$$P(y) = \frac{P}{b} \cdot \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \cos \varphi_n y \right) ; \quad \varphi_n = \frac{n \cdot \pi}{b}.$$

a powierzchnię ugięcia szeregiem Fouriera:

$$w = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} X(x) \cdot \cos \varphi_n y$$

spełnimy warunki brzegowe zagadnienia przy prostych  $y = \pm b$  a mianowicie:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0.$$

Zanim przystąpimy do właściwego zagadnienia, opracować winniśmy dwa zadania pomocnicze.

a). P a s m o p ł y t o w e , n i e s k o ń c z e n i e d ł u g i e , o b c i a ż o n e m o m e n t e m :

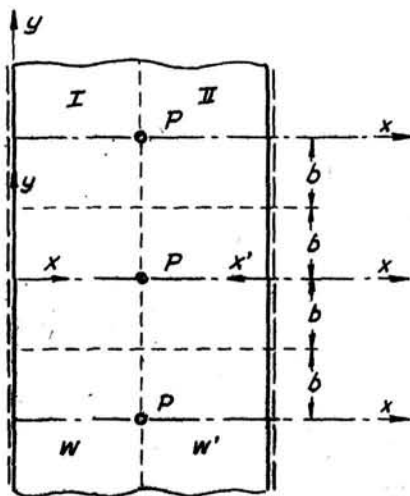
$$M = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} m_n \cdot \cos \varphi_n y ; \quad \varphi_n = \frac{n \cdot \pi}{b}.$$

Równanie różniczkowe  $\Delta \Delta w = 0$ , przy założeniu, że w prostej  $y = \pm b$  zachodzi

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0.$$

spełnia następująca funkcja.

$$w = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^2} \cdot (A \cdot \cosh \varphi_n x + B \cdot \varphi_n x \cdot \sinh \varphi_n x + C \cdot \sinh \varphi_n x + D \cdot \varphi_n x \cdot \cosh \varphi_n x) \cdot \cos \varphi_n y. \quad (17)$$



Rys. 8

Stałe całkowania A ... D określimy z warunków brzegowych:

$$x=0; \quad W=0;$$

$$-N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \sum_{n=1,2,\dots} m_n \cdot \cos \varphi_n y;$$

$$x=a; \quad W=0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

Wyliczymy kolejno:

$$A=0; \quad B = -\frac{m_n}{2N};$$

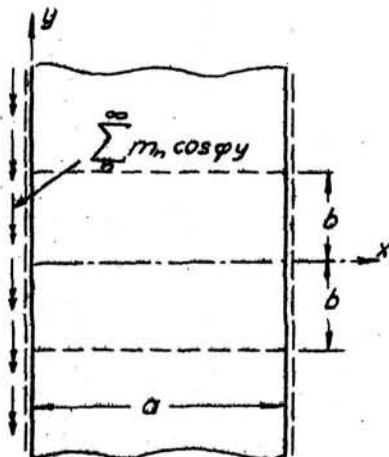
$$C = \frac{\lambda}{2N} \cdot (1 - \operatorname{ctg}^2 \lambda) \cdot m_n;$$

$$D = \frac{\operatorname{ctgh} \lambda}{2N} \cdot m_n; \quad \lambda = \varphi \cdot a = \frac{n \cdot \pi \cdot a}{b}.$$

Równanie powierzchni ugięcia (17) przyjmuje zatem postać:

$$W = \frac{a}{2N} \sum_{n=1,2,\dots} \frac{m_n}{\lambda^2 \cdot \sinh^2 \lambda} \cdot [\varphi \cdot x \cdot \sinh \lambda \cdot \cosh \varphi \cdot (a-x) - \lambda \cdot \sin \varphi \cdot x] \cdot \cos \varphi \cdot y. \quad \dots (18)$$

Nachylenie powierzchni odkształcenia w prostych  $x=0$  i  $x=a$  wyznaczą następujące równania:



Rys. 7.

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{a}{2N} \sum_n m_n \cdot \Phi_n(\lambda) \cdot \cos \varphi_n y; \quad \dots (19)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} = -\frac{a}{2N} \sum_n m_n \cdot \Psi_n(\lambda) \cdot \cos \varphi_n y,$$

gdzie

$$\Phi(\lambda) = \frac{\cosh \lambda \cdot \sinh \lambda - \lambda}{\lambda \cdot \sinh^2 \lambda};$$

$$\Psi(\lambda) = \frac{\lambda \cdot \cosh \lambda - \sinh \lambda}{\lambda \cdot \sinh^2 \lambda}$$

Jeśli moment działa w krawędzi  $x=a$  to:

$$w = \frac{a^2}{2N} \sum_n \frac{m_n}{\lambda^2 \sinh \lambda} \left[ \varphi(a-x) \sinh \lambda \cosh \varphi x - \lambda \sin \varphi(a-x) \right] \cos \varphi y. \quad \dots (18a)$$

b). P a s m o p ł y t o w e n i e s k o ń c z e n i e  
d ł u g i e , o b c i ą ż o n e s i ł a m i P  
w p r o s t e j  $x=\xi$ . Siły P w jednakowych odle-  
głościach 2b. (rys.8)

Pasmo traktujemy jako dwie płyty (I i II) oddzielone  
przekrojem  $x=\xi$ . Jako rozwiązanie równań różniczkowych  
odkształcenia płyty I i II przyjmujemy

$$\text{dla płyty I: } w = \sum_n \frac{1}{\varphi^2} \cdot (A \sinh \varphi x + B \varphi x \cosh \varphi x) \cos \varphi y; \quad (19a)$$

$$\text{dla płyty II: } w' = \sum_n \frac{1}{\varphi^2} (A' \sinh \varphi x' + B' \varphi x' \cosh \varphi x') \cos \varphi y. \quad (19b)$$

Stałe całkowania A, B, A', B' wyliczymy z warunków brzegowych  
w przekroju  $x=\xi$ :

$$w = w'; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{\partial w'}{\partial x'}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2};$$

$$-N \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w'}{\partial x'^3} \right) = \frac{P}{b} \sum_n \cos \varphi y.$$

Stąd

$$A = \frac{P}{2N\lambda \sinh \lambda} \cdot (\varphi \xi \cosh \varphi \xi' + \sinh \varphi \xi' - \lambda \frac{\sinh \varphi \xi}{\sinh \lambda});$$

$$A' = \frac{P}{2N\lambda \sinh \lambda} \cdot (\varphi \xi' \cosh \varphi \xi + \sinh \varphi \xi - \lambda \frac{\sinh \varphi \xi'}{\sinh \lambda});$$

$$B = - \frac{P}{2N\lambda \sinh \lambda} \cdot \sinh \varphi \xi'; \quad B' = - \frac{P}{2N\lambda \sinh \lambda} \cdot \sinh \varphi \xi'.$$

Nachylenie stycznej do powierzchni odkształcenia w pro-  
stych  $x=0$  i  $x=a$  określają następujące równania.

$$\frac{\partial w}{\partial x}_{x=0} = \frac{Pa}{2N} \sum_n \Theta_n' \cos \varphi y;$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'}_{x'=0} = - \frac{\partial w}{\partial x}_{x=0} = \frac{Pa}{2N} \sum_n \Theta_n'' \cos \varphi y.$$

gdzie

$$\theta_n^L = \frac{1}{\lambda^2 \sinh^2 \lambda} (\varphi \cdot \xi \cdot \sinh \lambda \cdot \cosh \varphi \cdot \xi' - \lambda \cdot \sinh \varphi \cdot \xi), \quad (20a)$$

$$\theta_n^P = \frac{1}{\lambda^2 \sinh^2 \lambda} (\varphi \cdot \xi' \cdot \sinh \lambda \cdot \cosh \varphi \cdot \xi - \lambda \cdot \sinh \varphi \cdot \xi'). \quad (20b)$$

Po tak opracowanym w punktach a) i b) układzie podstawowym przystąpimy do ustawienia równań trójczłonowych płyty ciągłej, nieskończenie długiej, obciążonej układem sił  $P$  w jednakowych odstępach  $2b$  (rys.6).

Z warunku ciągłości płyty na podporze  $r$  tj. z warunku

$$\frac{\partial w_r}{\partial x} \Big|_{x=a_r} = \frac{\partial w_{r+1}}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

otrzymamy, wyrażając kąty nachylenia stycznej odkształconej przez momenty podporowe  $m_{n,r-1}$ ,  $m_r$ ,  $m_{r+1}$  i obciążenie  $P_r$ ,  $P_{r+1}$  następujący układ równań.

$$\begin{aligned} m_{n,r-1} \cdot \Psi_{n,r} \cdot c_r + m_{n,r} \cdot [\Phi_{n,r} \cdot c_r + \Phi_{n,r+1} \cdot c_{r+1}] + m_{n,r+1} \cdot \Psi_{n,r+1} \cdot c_{r+1} + \\ + P_r \cdot c_r \cdot \theta_{n,r}^P + P_{r+1} \cdot c_{r+1} \cdot \theta_{n,r+1}^L = 0 \end{aligned} \quad \dots (21)$$

( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) ;  $r = 1, 2, \dots$

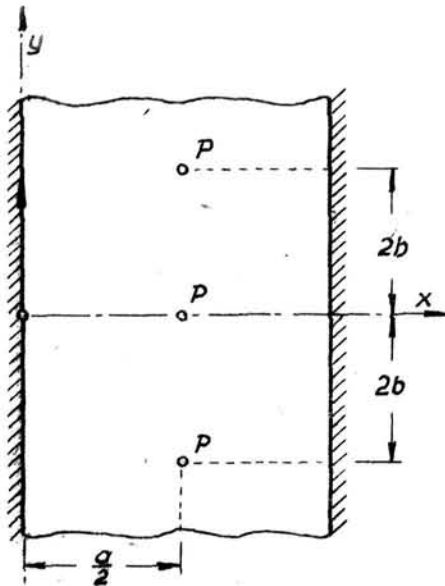
$$c_r = \frac{N_a \cdot a_r}{N_r \cdot a_0}$$

Równanie (21) przedstawia układ równań liniowych niejednorodnych, odpowiadający ilości "nadliczbowych" momentów podporowych. Rozwiązując powyższy układ kolejno dla  $n=1, 2, \dots$  otrzymamy kolejne wartości  $m_{n,r}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) a stąd wielkość momentów podporowych.

Znajomość momentów podporowych pozwoli na wyznaczenie powierzchni odkształcenia płyty, a tym samym na wyznaczenie wszelkich wielkości statycznych; momentów zginających i skręcających, sił poprzecznych i reakcji podporowych.

Równania (21) pozwolą na rozwiązanie szeregu układów płytowych; dwa wypadki szczególnie proste omówimy poniżej.

- α) Pasma płytowe w prostych podporowych  $x=0$ ,  $x=a$  utwierdzone zupełnie.



Rys. 9.

Z równania (21) otrzymamy:

$$m_n \cdot (\psi_n + \Phi_n) + P \cdot \Theta_n' = 0,$$

$$m_n = -P \cdot \frac{\Theta_n'}{\psi_n + \Phi_n},$$

a po wstawieniu  $x = \frac{a}{2}$  do wzoru (20a) i po prostych przekształceniach:

$$m_n = -\frac{P}{2} \cdot \frac{\sinh \frac{3}{2} \lambda}{\lambda + \sinh \lambda};$$

$$M = -\frac{P}{2} \cdot \sum_n \frac{\sinh \frac{3}{2} \lambda}{\lambda + \sinh \lambda} \cdot \cos \varphi \cdot y.$$

Powierzchnię odkształcenia spowodowaną momentami podporowymi otrzymamy z równania 18 i 18a.

Ugięcie pod siłą  $P$  uzyskamy z dodania ugięcia  $w_p$ , spowodowanego siłą  $P$  w układzie podstawowym (wzór 19a dla  $x = \frac{a}{2}$ ) oraz ugięcia  $w_M$  spowodowanego momentem podporowym  $M$ .

$$w(\frac{a}{2}, 0) = w_p(\frac{a}{2}, 0) + w_M(\frac{a}{2}, 0);$$

$$w(\frac{a}{2}, 0) = \frac{P \cdot a^2}{8N} \cdot \sum_n \frac{\sinh \lambda - \lambda}{\lambda^3 \cdot \cosh^2 \frac{3}{2} \lambda} - \frac{P \cdot a^2}{8N} \cdot \sum_n \frac{\operatorname{tgh}^2 \frac{3}{2} \lambda}{\lambda (\sinh \lambda + \lambda)}$$

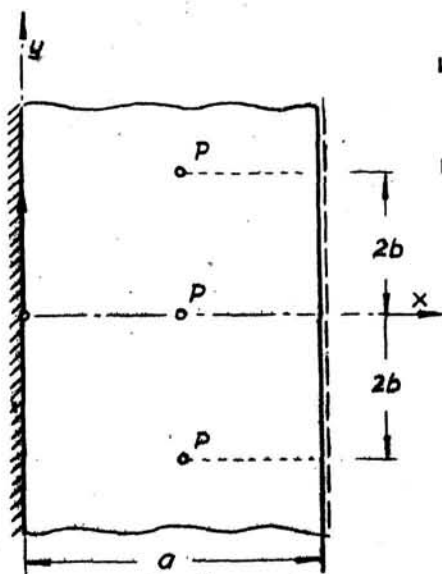
- β) Pasma płytowe w prostej  $x=0$  utwierdzone zupełnie, w prostej  $x=a$  swobodnie podparte (rys.10).

Z równania (21):  $m_n \cdot \Phi_n + P \cdot \Theta_n' = 0$   
otrzymamy dla  $\xi = \frac{a}{2}$ :

$$M = -P \cdot \sum_{n=1,2,\dots} \frac{\sinh^3 \frac{3}{2} \lambda}{\cosh v \cdot \sinh v - v} \cdot \cos \varphi \cdot y.$$

Powierzchnię odkształcenia spowodowaną momentem podporowym określa równanie (18), powierzchnię odkształcenia układu podstawowego wskutek obciążenia siłami ( $M=0$ ) równanie (19a i 19b).

I tak pod siłą  $P$  znajdziemy:



Rys. 10.

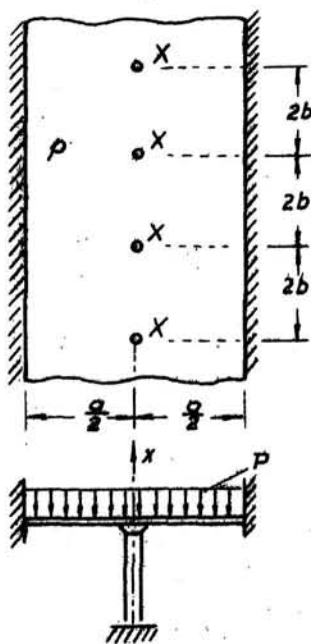
$$w\left(\frac{a}{2}, 0\right) = w_p\left(\frac{a}{2}, 0\right) + w_m\left(\frac{a}{2}, 0\right),$$

$$w\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{P a^2}{8N} \cdot \sum_n \frac{\sinh \lambda - \lambda}{\lambda^3 \cdot \cosh^2 \lambda} - \frac{P a^2}{8N} \cdot \sum_n \frac{\operatorname{tgh}^2 \lambda_2 \cdot \sinh^2 \lambda_2}{\lambda_1 (\cosh \lambda \cdot \sinh \lambda - \lambda)}$$

C). Rozwiązanie zagadnienia płyty ciągłej, obciążonej układem sił  $P$  w odległościach stałych  $2b$  pozwoli na rozwiązanie szeregu układów płytowych, znanych w budownictwie pod nazwą stropów grzybkowych.

Omówimy tu trzy wypadki szczególne.

a). S t r o p g r z y b k o w y według rys.11.



Rys. 11.

Powierzchnię ugięcia  $w$  płyty składamy z dwóch części, z powierzchni odkształcenia przedstawiającej powierzchnię zgięcia walcowego pasma płytowego, obustronnie utwierdzonego, jednostajnie obciążonego wielkością  $p$  oraz z powierzchni  $w$ , spowodowanej układem sił  $X$ .

$$w = w_0(x) + w_1(x, y).$$

Powierzchnia ugięcia  $w_0$  jest funkcją jedynie zmiennej  $x$ :

$$w_0 = \frac{p a^4}{N} \cdot \left( \frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right).$$

Wielkość  $X$  uzyskamy z przyrównania do zera ugięcia w punktach działania sił  $X$ .

Warunek ten daje:

$$\frac{p \cdot a^4}{384N} + \frac{X \cdot a^2}{8N} \sum_n \left( \frac{\sinh \lambda - \lambda}{\lambda^2 \cdot \cosh^2 \lambda_2} - \frac{\operatorname{tgh}^2 \lambda_2}{\lambda \cdot (\sinh \lambda + \lambda)} \right) = 0,$$

$$X = - \frac{p \cdot a^2}{48N} \cdot \frac{1}{\sum_n \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{4 \sinh^2 \lambda_2 - \lambda^2}{\sinh \lambda + \lambda}}$$

Znajomość reakcji podporowych pozwoli już na wyznaczenie wielkości statycznych płyty. Momenty zginające otrzymamy przeto z równań:

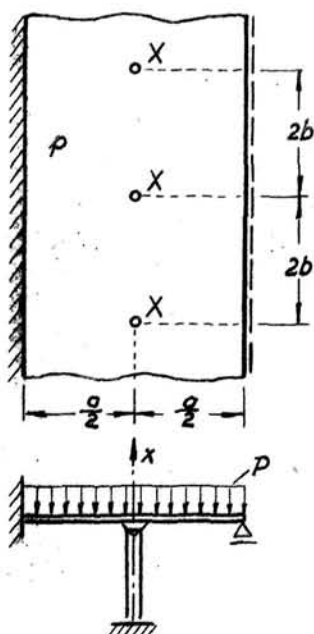
$$M_x = -N \cdot \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right);$$

$$M_y = -N \cdot \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right].$$

A więc dla  $x=0$ ;  $y=0$  znajdziemy:

$$M_x = - \frac{p \cdot a^2}{12} - \frac{X}{2} \cdot \sum_n \frac{\sinh \lambda_2}{\lambda + \sinh \lambda}.$$

b). S t r o p g r z y b k o w y według rys.12.



Rys. 12.

W tym wypadku  $w_0$  przyjmuje postać:

$$w_0 = \frac{p \cdot a^4}{48N} \cdot \left( 2 \frac{x^4}{a^4} - 5 \frac{x^3}{a^3} + 3 \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Korzystając z rozwiązania zadania (Bβ) znajdziemy wielkość  $X$  z równania:

$$w = w_0 \left( \frac{a}{2}, 0 \right) + w_1 \left( \frac{a}{2}, 0 \right)$$

albo

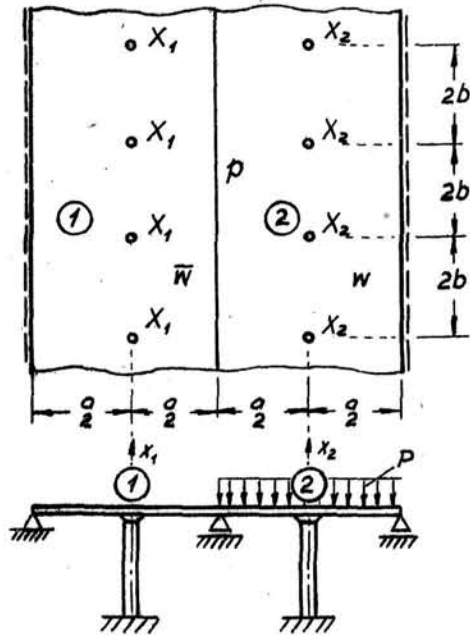
$$\frac{p \cdot a^2}{192N} + \frac{X \cdot a^2}{8N} \sum_n \left( \frac{\sinh \lambda - \lambda}{\lambda^3 \cdot \cosh^2 \lambda} - \frac{\operatorname{tgh}^2 \lambda_2 \cdot \sinh^2 \lambda_2}{\lambda \cdot (\cosh \lambda \cdot \sinh \lambda - \lambda)} \right) = 0,$$

a wielkość momentu utwierdzenia w punkcie  $x=0$ ,  $y=0$



$$M_x = -\frac{p \cdot a^2}{8} - X \cdot \sum_n \frac{\sinh^3 \lambda_2}{\cosh \lambda \cdot \sinh \lambda - \lambda}$$

c). S t r o p g r z y b k o w y według rys 13.



Rys. 13

Oznaczmy przez  $w_{11}$  ugięcie płyty ciągłej dwuprzęsłowej w punkcie 1. spowodowane układem sił  $X=1$  ; przez  $w_{12}$  ugięcie płyty ciągłej dwuprzęsłowej w punkcie 1, spowodowane układem  $X_2=1$  ; wreszcie przez  $w_{10}, w_{20}$  ugięcia płyty dwuprzęsłowej w punktach 1 i 2, wywołane obciążeniem  $p$ .

Niech na płytę działa jedynie układ sił  $X_1=1$ . Z równania (21) obliczymy wartość momentu podporowego:

$$m_n \cdot 2\Phi_n + 1 \cdot \Theta_n^I = 0 ; \quad M = - \sum_n \frac{\Theta_n^I}{2\Phi_n} \cdot \cos \varphi \cdot y.$$

Moment ten wywoła w punkcie 2 ugięcie :

$$w_{12} = -\frac{a^2}{16N} \sum_n \frac{\operatorname{tgh}^2 \lambda_2 \cdot \sinh^2 \lambda_2}{\lambda \cdot (\cosh \lambda \cdot \sinh \lambda - \lambda)} = w_{21}.$$

Dodając do powyższej wielkości ugięcie spowodowane układem sił  $X_1=1$  w systemie podstawowym ( $M=0$ ) uzyskamy:

$$w_{12} = \frac{a^2}{8N} \cdot \sum_n \frac{\sinh \lambda - \lambda}{\lambda^3 \cdot \cosh^2 \lambda_2} - \frac{a^2}{16N} \cdot \sum_n \frac{\operatorname{tgh}^2 \lambda_2 \cdot \sinh^2 \lambda_2}{\lambda \cdot (\cosh \lambda \cdot \sinh \lambda - \lambda)}$$

Niech na płytę dwuprzęsłową działa jedynie obciążenie  $p$ . W punkcie 2 otrzymamy:

$$w_{20} = -\frac{p \cdot a^4}{256N}.$$

a w punkcie 1:

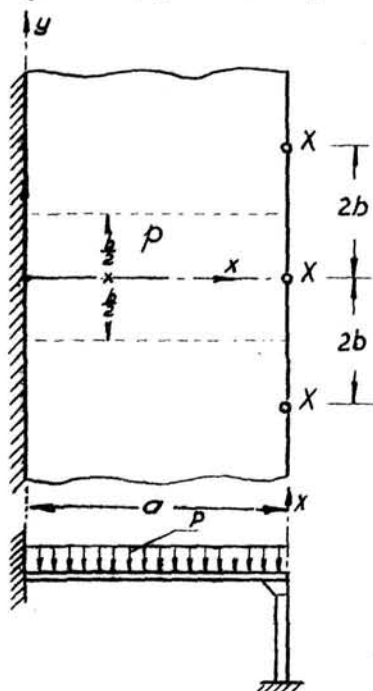
$$w_{10} = \frac{5}{384} \cdot \frac{p \cdot a^4}{N} - \frac{p \cdot a^4}{256N} = \frac{7}{768} \cdot \frac{p \cdot a^4}{N}.$$



Wielkości  $X_1$  i  $X_2$  znajdujemy z rozwiązania układu równań:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot W_{11} + X_2 \cdot W_{12} + W_{10} &= 0 ; & W_{11} &= W_{22} ; \\ X_1 \cdot W_{21} + X_2 \cdot W_{22} + W_{20} &= 0 . & W_{12} &= W_{21} . \end{aligned}$$

D). Płyta w krawędzi  $x=0$  zupełnie utwierdzona; w krawędzi  $x=a$  podparta punktowo w stałych odstępach  $2b$ . Obciążenie  $p$  jednostajnie rozłożone. (rys.14.)



Rys. 14.

Jako rozwiązanie równania różniczkowego zagadnienia

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{N}$$

przyjmujemy funkcję:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_0(x) + w_1(x, y) = \\ &= \frac{p \cdot a^4}{24N} \cdot \left( 6 \frac{x^2}{a^2} - 4 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right) + \\ &+ \sum_n F_n(x) \cdot \cos \varphi_n y, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{\varphi^2} \cdot (A \cdot \cosh \varphi x + B \cdot \varphi x \cdot \sinh \varphi x + \\ &+ C \cdot \sinh \varphi x + D \cdot \varphi x \cdot \cosh \varphi x). \end{aligned}$$

Stałe  $A \dots C$  znajdziemy z następujących warunków brzegowych.

1) dla  $x=0$ ;  $w_1 = 0$ ;  $\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0$

2) dla  $x=a$ ;  $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0$ ;  $-N \cdot \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^2 \partial x} \right) = \frac{X}{b} \cdot \sum_n \cos \varphi_n y$  \*).

\*) W dwu ostatnich warunkach brzegowych (moment  $m_x = 0$ , reakcja podporowa równa wielkości  $X$ ) przyjęte  $\mu = 0$ .

Otrzymujemy:

$$A = 0, \quad B = \frac{X}{N \cdot \lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda + \lambda \cdot \cosh \lambda}{3 \cosh^2 \lambda + \lambda^2 + 1},$$

$$C = -D = \frac{X}{N \cdot \lambda} \cdot \frac{2 \cosh \lambda + \lambda \cdot \sinh \lambda}{3 \cosh^2 \lambda + \lambda^2 + 1}.$$

Wielkość reakcji podporowej  $X$  wyznaczymy z warunku:

$$w_0(0) + w_1(0,0) = 0.$$

Stąd:

$$X = -\frac{p \cdot a^2}{16} \cdot \frac{1}{\sum_n \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{\cosh \lambda \cdot \sinh \lambda - \lambda}{3 \cosh^2 \lambda + \lambda^2 + 1}}$$

Moment utwierdzenia  $M_x$  w punkcie  $x=0, y=0$  wyrazi się równaniem:

$$M_x = -N \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0, y=0} = -\frac{p \cdot a^2}{2} - 2X \cdot \sum_n \frac{\sinh \lambda + \lambda \cdot \cosh \lambda}{\lambda \cdot (3 \cosh^2 \lambda + \lambda^2 + 1)}.$$

Podane rozwiązania, dotyczące stropów grzybkowych, uważać należy jako przybliżone; wpływ zgrubienia płyty u nasady słupów jak i wpływ podpory o skończonym przekroju nie został w powyższych rozważaniach uwzględniony.