CZASOPISMO TECHNICZNE

MIESIĘCZNIK POŚWIĘCONY ZAGADNIENIOM TECHNIKI I ARCHITEKTURY

Rok 60 Kraków, Styczeń—Luty 1947 Nr. 1—2

70-LECIE KRAKOWSKIEGO TOW. TECHNICZNEGO
60-LECIE „CZASOPISMA TECHNICZNEGO"

Dr Inż. WITOLD NOWACKI

ZASTOSOWANIE RACHUNKU RÓŻNIC SKOŃCZONYCH DO WYBOCZENIA RAM CIĄGŁYCH

1. PŁASKA RAMA CIĄGŁA

A) Rozważmy ramę ciągłą o jednakowych rozpiętościach l i wysokościach słupów h. Moment bezwładności rygla I, słupów I_0. W węzłach ramy działają pionowe siły S. Dążymy do wyznaczenia siły krytycznej $S_k = v \cdot S$, powodującej wyboczenie układu ramowego. Wyboczenie następuje w płaszczyźnie ramy. Zakładamy, że założenia teorii wyboczenia — idealnie proste słupy, ściśle osiowe działanie sił i izotropia materiału są spełnione. Zakładamy dalej, że w trakcie wyboczenia ramy, siły zachowują swe kierunki działania i że wyboczenie nastąpi w obszarze sprężystych odkształceń.

Ze względu na wysoką statyczną niewyznaczalność stosujemy metodę odkształceń, przyjmując jako nadliczbowe wielkości kąty obrotów węzłów i kąty obrotów prętów.

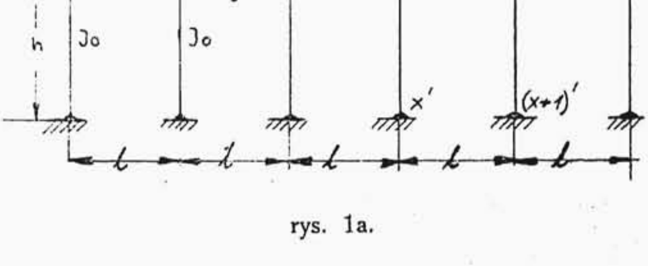
B) Równania transformacyjne metody odkształceń

Pod wpływem obciążenia wyboczającego pręty doznają znikomego ugięcia. Końce pręta I—K obrócą się o nieskończenie małe kąty N_i i N_k, pręt dozna obrotu o kąt T.

Obok skończonej wartości siły S wystąpią nieskończenie małe momenty zginające i siły tnące. Równanie różniczkowe problemu brzmi:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{A^2}{l^2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \ldots . (1)$$

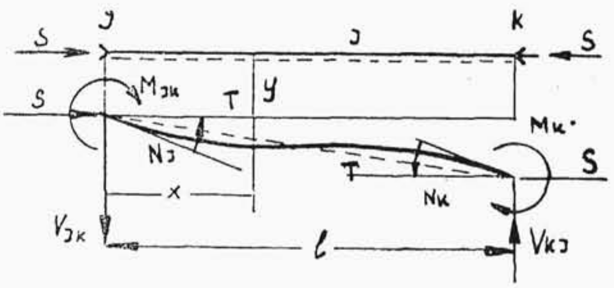
gdzie $A = l\sqrt{\frac{S}{EJ}}$.



rys. 1a.

Rozwiązaniem równania różniczkowego (1) będzie:

$$y = U_1 + U_2 \frac{A \cdot x}{l} + U_3 \sin\frac{A \cdot x}{l} U_4 \cos\frac{A \cdot x}{l} \qquad (2)$$



rys. 1b.

Stałe całkowania $U_1, \ldots U_4$ wyznaczymy z następujących warunków brzegowych:

$$\text{Dla:}\quad x = 0 \quad y = 0 \quad \frac{dy}{dx} = N_I$$

$$x = l \quad y = Tl \quad \frac{dy}{dx} = N_K\,.$$

Momenty przywęzłowe M_{IK} i M_{KI} otrzymamy ze związków:

$$M_{IK} = -EIy''/_{x=0} \quad M_{KI} = EIy''/_{x=l}\,.$$

Wstawiając do tych równań $U_1 \ldots U_4$ i porządkując równania względem N_I i N_K i T, otrzymamy tak zwane równania transformacyjne problemu *)

$$\left.\begin{aligned} M_{IK} &= m\,[c(A)N_I + s(A)N_K - v(A)T] \\ M_{KI} &= m\,[s(A)N_I + c(A)N_K - v(A)T] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (3)$$

przyczem: $m = \dfrac{2EI}{l}$

$$c(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A \sin A - A^2 \cos A}{2(1 - \cos A) - A \sin A}$$

$$S(A) = \frac{1}{2}\, \frac{A^2 - A \sin A}{2(1 - \cos A) - A \sin A}$$

$$v(A) = c(A) + s(A)\,.$$

Dla $S \rightarrow 0 : A \rightarrow 0$, otrzymamy:

$$c(0) = 2 \quad s(0) = 1 \quad v(0) = 3\,.$$

Równania (3) przechodzą na równania transformacyjne pręta, nieobciążonego poprzecznie:

$$\left.\begin{aligned} M_{IK} &= m(2N_I + N_K - 3T) \\ M_{KI} &= m(2N_K + N_I - 3T) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (3a)$$

Jeżeli w węźle I istnieje przegub, to $M_{IK} = 0$. Eliminując z pierwszego równania (3) kąt N_I i wstawiając otrzymaną wartość do drugiego równania (3) dochodzimy do następujących związków:

$$M_{IK} = 0 \quad M_{KI} = m\bar{c}(A)\,(N_K - T) \quad \ldots\ (4)$$

*) Patrz: E. Chwalla i Fr. Jokisch. Ueber das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens. Der Stahlbau 1941.

Podobnie dla przegubu w K przy sprężystym utwierdzeniu w I znajdziemy:

$$M_{KI} = 0 \quad M_{IK} = m\bar{c}(A)(N_I - T) \quad \ldots\ (4a)$$

We wzorach (4) i (4a):

$$\bar{c}(A) = \frac{A^2}{2}\, \frac{\sin A}{\sin A - A \cos A}\,.$$

C) **Równanie warunkowe wyboczenia**

1) Rama ciągła o węzłach nieprzesuwnych.

Ze względu na nieprzesuwność układu ramowego stawiamy dla wszystkich prętów ramy $T = 0$. Przechodząc z położenia równowagi ramy wolnej od momentów zginających do położenia równowagi o nieskończenie mało wygiętych prętach, wypisujemy dla tego położenia równania równowagi wyciętych węzłów $\Sigma M_{IK} = 0$; przyczym znak sumy rozpościera się na wszystkie pręty, zbiegające się w węźle.

Dla węzła x znajdziemy:

$$M_{x,\,x-1} + M_{x,\,x+1} + M_{x,x'} = 0 \quad \ldots\ (5)$$

$$\text{Ale:}\quad M_{x,\,x+1} = m\,(2N_x + N_{x+1})$$

$$M_{x,\,x-1} = m\,(2N_x + N_{x-1})$$

$$M_{x,x'} = m_0 c(A) N_x \quad m_0 = \frac{2EI_0}{h} \quad A = h\sqrt{\frac{S}{EI}}$$

Wstawiając powyższe zależności do równania (5), otrzymamy równanie różnicowe liniowe jednorodne drugiego rzędu:

$$N_{x-1} + 2N_x\left[2 + \frac{m_0 c(A)}{2m}\right] + N_{x+1} = 0$$

$$(x = 1, 2 \ldots n - 1) \quad \ldots\ (6)$$

Oznaczając przez $w(A)$ wielkość $w(A) =$

$$= -\left[2 + \frac{m_0 c(A)}{2m}\right]$$

sprowadzamy równanie (6) do postaci:

$$N_{x-1} - 2N_x\, w(A) + N_{x+1} = 0 \quad \ldots\ (6a)$$

Rozwiązaniem równania różnicowego będzie związek:

$$N_x = C_1 D_1^x + C_2 D_2^x \quad \ldots\ (7)$$

gdzie D_1 i D_2 są pierwiastkami równania: $D^2 - 2w(A) \cdot D + 1 = 0$

$$\text{Stąd:}\quad D_1 = \frac{1}{D_2} = D = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

ostatecznie otrzymamy:

$$N_x = C_1 D^x + C_2 D^{-x} \quad \ldots\ (7a)$$

Warunki brzegowe zadania dają dla węzła 0 i n

$$M_{0,\,-1} = 0 \qquad M_{n,\,n+1} = 0$$

$$\text{albo}\quad 2N_0 + N_{-1} = 0 \qquad 2N_n + N_{n+1} = 0$$

Wstawiając do warunków brzegowych wartości N_0, N_{-1}, N_n, N_{n+1} z równania (7a), otrzymamy układ dwu równań liniowych jednorodnych:

$$C_1\left(2+\frac{1}{D}\right)+C_2(2+D)=0$$

$$C_1 D^n(2+D)+D^{-n}\left(2+\frac{1}{D}\right)=0\,.$$

Powyższy układ równań będzie niesprzeczny, (wyjąwszy sprzeczne z założeniami problemu wartości $C_1=0$, $C_2=0$) gdy wyznacznik układu równań będzie równy zeru.

$$\text{Warunek } \triangle=\begin{vmatrix} 2+\frac{1}{D}, & 2+D \\ D^n(2+D), & D^{-n}\left(2+\frac{1}{D}\right)\end{vmatrix}=0$$

jest tak zwanym równaniem warunkowym wyboczenia układu ramowego.

Ostatecznie otrzymamy: $D^n=\dfrac{2+{}^1/D}{2+D}$ ....(8)

Jeżeli $w<1$ to zakładając $D=\cos E+i\sin E$, $w=\cos E$, przekształcimy równanie (8) w postać: $\sin nE+\sin E+\sin(n+1)E=0$ albo po prostych przekształceniach

$$\operatorname{tg}\frac{nE}{2}+\operatorname{tg}\frac{E}{2}=0 \qquad \ldots.\ (8a)$$

Przy wiadomym n wyznaczymy z równania (8) lub (8a) pierwiastki w_i.

Ze związku $w(A)=-\left[2+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{m_0c(A)}{m}\right]$ wyznaczymy najmniejszą wartość $A=h\sqrt{\dfrac{S}{EI}}$ a tymsamym najmniejszą wartość siły krytycznej

$$S_{min}=\frac{A_1^2EI}{h^2}=vS\,.$$

Dla $n\rightarrow\infty$ otrzymamy prosty związek

$$m_0c(A)+2m=0 \qquad \ldots.\ (9)$$

Jeżeli słupy opatrzone są w węzłach podporowych ($x'=0,1,2\ldots n$) przegubami to w równaniach 6—9 należy zamiast $c(A)$ podstawić funkcję $\bar{c}(A)$.

2. RAMA CIĄGŁA PRZESUWNA

Nie uwzględniając wydłużeń rygla, możemy dla wszystkich prętów rygla postawić $T=0$. Słupy doznają obrotu o wspólny dla każdego słupa kąt T.

Zrównoważenie węzła x daje:

$$M_{x,\,x+1}+M_{x,\,x-1}+M_{xx'}=0 \qquad \ldots.\ (10)$$

$$M_{xx'}=m_0[c(A)N_x-v(A)T]$$

$$M_{x,\,x+1}=m(2N_x+N_{x+1})$$

$$M_{x,\,x-1}=m(2N_x+N_{x-1})\,.$$

Równanie (10) doprowadzimy do postaci:

$$N_{x-1}-2w(A)N_x+N_{x+1}=\frac{m_0v(A)T}{m}$$

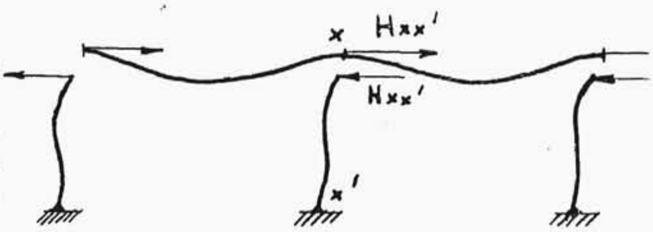
$$w(A)=-\left[2+\frac{m_0c(A)}{2m}\right]$$

$$x=1,2\ldots(n-1) \qquad \ldots.\ (11)$$

Rozwiązaniem tego niejednorodnego równania różnicowego, liniowego drugiego rzędu będzie:

$$N_x=C_1D^x+C_2D^{-x}+\frac{m_0}{m}\,\frac{v(A)T}{2(1-w)}\,;$$

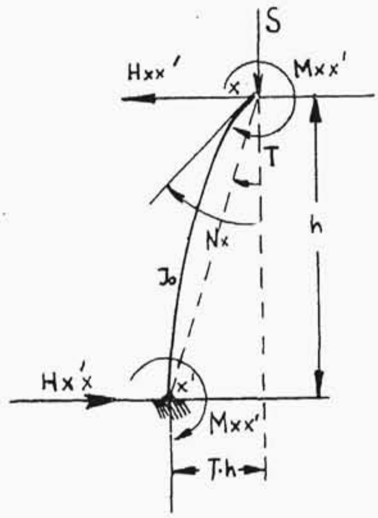
$$D=w+\sqrt{w^2-1} \qquad \ldots.\ (12)$$



rys. 2a.

Zrównoważenie wyciętego rygla daje nam:

$$\sum_0^n H_{xx'}=\frac{1}{h}\sum_0^n\left(M_{xx'}+M_{x'x}+STh\right)=0$$



rys. 2b.

Wstawiając do powyższego równania

$$M_{xx'}=m_0[c(A)N_x-v(A)T]$$

$$M_{x'x}=m_0[s(A)N_x-v(A)T]$$

$$ST\cdot h=m_0\frac{A^2}{2h}hT$$

dochodzimy do równania

$$m_0 v(A) \sum_0^n N_x - m_0 (n+1)\Big[2v(A) - \frac{A^2}{2}\Big] \cdot T = 0 \qquad \ldots . (13a)$$

Podstawiając do równania (13a) wielkość N_x z równania (12) i wykonywując sumowanie doprowadzimy równanie (13a) do postaci

$$C_1 + C_2 D^{(1-n)} + \frac{1-D}{1-D^n}(n+1)\Big[\frac{A^2}{v(A)} - 2 + \frac{m_0 v(A)}{2m(1-w)}\Big] T = 0 \qquad \ldots . (13b)$$

Warunki brzegowe zadania dla węzłów 0 i n dają:

$$M_{0,-1} = 0 \qquad M_{n,n+1} = 0$$

albo: $2N_0 + N_1 = 0 \qquad 2N_n + N_{n+1} = 0.$

Wstawiając do powyższych równań N_x równania (12), otrzymamy układ dwóch równań liniowych względem C_1, C_2 i T

$$C_1\Big(2 + \frac{1}{D}\Big) + C_2(2+D) + \frac{m_0 v}{m(1-w)} T = 0 \quad \ldots (14)$$

$$C_1(2+D)D^n + C_2 D^{-n}\Big(2 + \frac{1}{D}\Big) + \frac{m_0 v}{m(1-w)} T = 0$$

Równania (13b) oraz (14) przedstawiają układ równań liniowych jednorodnych. Układ ten będzie niesprzecznym, gdy wyznacznik układu $\triangle$ będzie równy zeru.

Rozwiązanie wyznacznika układu równań daje następujące związki:

$$(15a) \ldots . \quad D^n = \frac{2 + {}^1/D}{2+D}$$

$$(15b) \ldots . \quad \frac{A^2}{v} - 2 + \frac{m_0 v}{m(1-w)} = \frac{m_0 v(1+D)(1-D^n)}{m(n+1)(1-D)(1-w)\Big[\Big(2+\frac{1}{D}\Big) + D^n(2+D)\Big]}$$

Pierwszy związek daje nam symetryczną, drugi antymetryczną postać wyboczenia. Ze związkiem (15a) spotkaliśmy się już w wypadku wyboczenia ramy nieprzesuwnej.

Dla wiadomego n wyznaczamy ze związków (15 a, 15 b) najmniejszą wartość A, a stąd $S_k = \frac{A^2 EI}{h^2}$.

Z równania (15b) dla $n \to \infty$ i przy $D > 1$ otrzymujemy prostą zależność:

$$\frac{A^2}{v(A)} + \frac{m_0 v(A)}{m[1 - w(A)]} = 2.$$