

J
Nr 159.
Politechnika Warszawska

SKA A K A D E M I A N A U K
UT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

258

R A D A R E D A K C Y J N A

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY
JULIAN BONDER JERZY LITWINISZYN
JERZY NOWIŃSKI WACŁAW OLSZAK
BOHDAN STEFANOWSKI STANISŁAW TURSKI
WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

JERZY NOWIŃSKI - REDAKTOR
TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

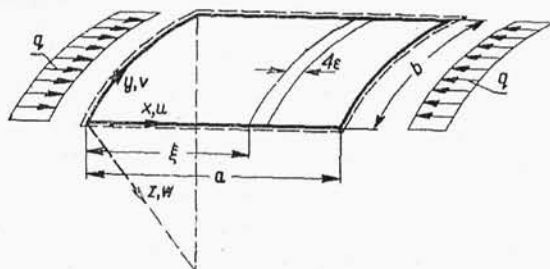
TOM VII WARSZAWA 1955 ZESZYTY
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

WYBOCZENIE I DRGANIA WŁASNE POWŁOKI WALCOWEJ

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Praca przedstawiona na Zebraniu Naukowym Zakładu Mechaniki
Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w dniu 8 listopada 1954 r.

1. Dana jest powłoka walcowa o przekroju kołowym, na krawędziach swych podparta w sposób przegubowo przesuwny, ściskana wzdłuż brzegów $x=0$, $x=a$ obciążeniem ściskającym o stałej intensywności q (rys. 1).

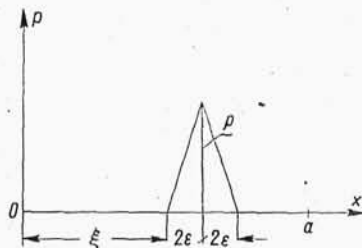


Rys. 1

Niech ponadto na powłokę działa obciążenie radialne na pasmie o szerokości 4ε (rys. 2). Punktem wyjścia dalszych rozważań jest równanie różniczkowe powierzchni ugięcia powłoki jednocześnie zginanej i ściskanej, podane przez W. Z. Własowa, [1],

$$(1.1.1) \quad \frac{R}{E\delta} \nabla^4 \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$(1.1.2) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N \nabla^4 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p.$$



Rys. 2

We wzorach tych w oznacza radialne ugięcie powłoki, R jest promieniem koła, $N = E\delta^3/12(1-\nu^2)$ sztywnością zginania powłoki, ν odwrotnością liczby Poissona, E modułem sprężystości, δ grubością powłoki. Przy

założeniu przegubowo przesuwne podparcia powłoki (dla $y=0$ lub $y=b$: $w=0$, $u=0$, $N_y=0$, $M_y=0$; dla $x=0$ lub $x=a$: $w=0$, $v=0$, $N_x=0$, $M_x=0$) funkcje φ i w przedstawić można w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego

$$(1.2) \quad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

$$(1.3) \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

$$a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$

Również obciążenie p wyrazimy szeregiem Fouriera

$$(1.4) \quad p = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin a_n \xi \left(\frac{\sin n \varepsilon}{n \varepsilon} \right)^2 \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Wstawiając (1.2), (1.3) i (1.4) do równań (1.1.1) i (1.1.2) po wyeliminowaniu współczynników $a_{n,m}$ i wyznaczeniu wartości $b_{n,m}$ uzyskamy następujące wyrażenia dla ugięcia powłoki:

$$(1.5) \quad w = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m \sin a_n \xi \left(\frac{\sin n \varepsilon}{n \varepsilon} \right)^2}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$D_{n,m} = N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{E\delta}{R^2} \frac{a_n^4}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2} - q a_n^2.$$

Dla $\varepsilon \rightarrow 0$, a więc dla obciążenia p działającego wzdłuż linii $x = \xi$, otrzymamy

$$(1.6) \quad w = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m \sin a_n \xi}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Korzystając ze wzoru (1.6) łatwo jest podać ugięcie powłoki, wywołane działaniem momentu M rozłożonego wzdłuż linii $x = \xi$. Różniczkując w względem ξ i zastępując p_n przez M_m (gdzie M_m jest współczynnikiem rozwinięcia Fouriera momentu M) uzyskamy

$$(1.7) \quad w = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m a_n \cos a_n \xi}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Przesuwamy teraz momenty M do lewego brzegu płyty ($\xi=0$). Otrzymamy

$$(1.8) \quad w = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m a_n}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Niech teraz na brzegach $x=0$, $y=0$, $x=a$ i $y=b$ działają dodatnie momenty, które oznaczać będziemy odpowiednio przez $A(y)$, $B(x)$, $C(y)$, $D(x)$, a ich współczynniki rozwinięcia Fouriera przez A_m , B_n , C_m i D_n . Powierzchnia ugięcia powłoki poddanej działaniu sił ściskających q oraz działaniu momentów brzegowych przyjmie postać

$$(1.9) \quad w = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{a_n [A_m - (-1)^n C_m] + \varrho \beta_m [B_n - (-1)^m D_n]\} \frac{\sin a_n x \sin \beta_m y}{D_{n,m}},$$

gdzie $\varrho = a/b$.

Powyższe rozwiązanie jest punktem wyjścia do określenia warunków wyboczenia powłoki o brzegach w dowolnej kolejności przegubowo przesuwnie podpartych lub przesuwnie zupełnie utwierdzonych.

Rozpatrzmy przypadek najprostszy, tj. powłokę na krawędzi $x=0$ zupełnie utwierdzoną, a na pozostałych brzegach podpartą w sposób przegubowo przesuwny. W tym przypadku przyjmujemy we wzorze (1.9) $C_m=0$ i $B_n=D_n=0$.

Z warunku utwierdzenia zupełnego powłoki na krawędzi $x=0$, tj. z warunku

$$(1.10) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0,$$

otrzymamy

$$\frac{2}{a} A_m \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{a_n^2}{D_{n,m}} = 0.$$

Ponieważ w przypadku wyboczenia jest $A_m \neq 0$, zatem warunkiem wyboczenia jest

$$(1.11) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{a_n^2}{D_{n,m}} = 0.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\varrho = \frac{a}{b}, \quad s = \frac{q a^2}{N \pi^2}, \quad \gamma = \frac{E \delta a^4}{R^2 N \pi^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^2,$$

otrzymamy warunek wyboczenia (1.11) w postaci

$$(1.12) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \gamma \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - s n^2} = 0.$$

Najmniejszy pierwiastek s powyższego wyrażenia daje najmniejszą wartość siły krytycznej. Zauważmy, że dla $R \rightarrow \infty$ (zatem dla $\gamma \rightarrow 0$) przechodzimy z zagadnienia wyboczenia powłoki do zagadnienia wyboczenia płyty prostokątnej, [2].

Niech teraz brzegi powłoki $x=0$ i $x=a$ będą utwierdzone zupełnie; na brzegach $y=0$ i $y=b$ niech powłoka będzie podparta w sposób przegubowo przesuwany. Wstawiając do równania (1.9) $B_n = D_n = 0$ oraz $A_m = C_m$ otrzymamy z warunku $[\partial w / \partial x]_{x=0} = 0$

$$(1.13.1) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 [1 - (-1)^n]}{D_{n,m}} = 0$$

albo

$$(1.13.2) \quad \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \gamma \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - s n^2} = 0.$$

Warunek ten jest słuszny dla postaci wyboczenia symetrycznej względem osi. Dla antysymetrycznej postaci wyboczenia, przyjmując $A_m = -C_m$, otrzymamy

$$(1.14) \quad \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + m^2 \varrho^2)^2 + \gamma \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - s n^2} = 0.$$

Analogicznie dla przypadku zupełnego utwierdzenia brzegów $y=0$ i $y=b$ oraz postaci wyboczenia symetrycznej względem osi $y=b/2$ warunkiem wyboczenia jest

$$(1.15.1) \quad \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} = 0$$

albo

$$(1.15.2) \quad \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m^2}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \gamma \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - s n^2} = 0.$$

Dla antysymetrycznej postaci wyboczenia otrzymamy

$$(1.16.1) \quad \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} = 0$$

albo

$$(1.16.2) \quad \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{m^2}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 + \gamma \frac{n^4}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} - s n^2} = 0.$$

Rozważmy przypadek wyboczenia powłoki wzdłuż wszystkich krawędzi przesuwnie całkowicie utwierdzonej. Ograniczamy się na razie do postaci wyboczenia symetrycznej względem obu osi symetrii powłoki ($A_m = C_m$, $B_n = D_n$). Z warunków utwierdzenia płyty wzdłuż prostych $x = 0$ i $y = 0$

$$(1.17) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$$

otrzymamy układ równań

$$(1.18.1) \quad A_m \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_n^2}{D_{n,m}} + \beta_m \varrho \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_n B_n}{D_{n,m}} = 0,$$

$$(1.18.2) \quad a_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_m \beta_m}{D_{n,m}} + B_n \varrho \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} = 0.$$

Eliminując z powyższego układu równań B_n otrzymamy

$$(1.19) \quad A_m - \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} A_i K_{mi} = 0,$$

gdzie

$$K_{mi} = \frac{\beta_m \beta_i}{G_m} \sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_r^2}{D_{r,m} D_{r,i} H_r}.$$

Wprowadziliśmy tutaj oznaczenia

$$G_m = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_n^2}{D_{n,m}}, \quad H_r = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{D_{r,k}}.$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (1.18) daje równanie

$$(1.20) \quad \begin{vmatrix} 1 - k_{11} & -k_{13} & -k_{15} & \dots \\ -k_{31} & 1 - k_{33} & -k_{35} & \dots \\ -k_{51} & -k_{53} & 1 - k_{55} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

które jest poszukiwanym warunkiem wyboczenia. Najmniejszy pierwiastek równania (1.20) określa najmniejszą siłę krytyczną powłoki $q_{kr} = (N\pi^2/a^2)s_{min}$. Dla celów praktycznych wystarczy ograniczyć się do wyznacznika czwartego stopnia. Dla $\gamma = 0$ przechodzimy do zagadnienia płyty zupełnie utwardzonej wzdłuż wszystkich krawędzi, [3].

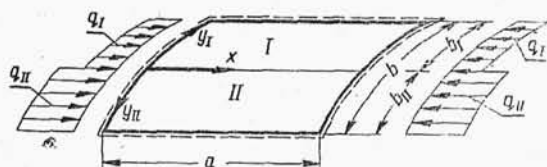
Dla postaci wyboczenia antysymetrycznej względem linii $x = a/2$ należy w wyjściowym związku (1.9) wstawić $A_m = -C_m$ i $B_n = D_n$ ($m = 2, 4, 6, \dots$, $n = 1, 3, 5, \dots$). Mamy w tym przypadku zagadnienie wyboczenia płyty utwardzonej wzdłuż trzech przyległych krawędzi, a wzdłuż czwartej swobodnie podpartej.

Warunki $A_m = C_m$ i $B_n = -D_n$ ($m = 1, 3, \dots$, $n = 2, 4, \dots$) prowadzą do zagadnienia wyboczenia powłoki zupełnie utwardzonej wzdłuż brzegów $x = 0$, $x = a$ i $y = b$, a wzdłuż brzegu $y = b/2$ swobodnie podpartej.

Wreszcie gdy $A_m = -C_m$ i $B_n = -D_n$ ($m, n = 2, 4, \dots$), mamy przypadek wyboczenia powłoki zupełnie utwardzonej wzdłuż brzegów $x = 0$ i $y = 0$, a wzdłuż brzegów $x = a/2$ i $y = b/2$ swobodnie podpartej.

Wymienione trzy przypadki wyboczenia powłoki prowadzą do układu dwu równań, analogicznego do układu (1.18).

Przy użyciu podwójnych szeregów trygonometrycznych rozwiązać możemy dalsze, bardziej złożone zagadnienia stateczności powłoki walcowej.



Rys. 3

Niech będzie dana powłoka (rys. 3) na obwodzie podparta w sposób przegubowo przesuwany, a ponadto posiadająca niepodatną liniową podporę wzdłuż prostej $y_I = 0$. Podpora ta dzieli powłokę na dwie części:

na część I i część II. Jako niewiadomą funkcję w naszym zadaniu przyjmujemy $B(x)$ przedstawiającą wielkość momentu podporowego wzdłuż prostej $y_I = 0$, który powstaje wskutek wygięcia powłoki dla $q > q_{kr}$.

Równanie ugięcia powłoki wywołanej momentem $B(x)$ przyjmie następującą postać:

dla obszaru I

$$(1.21.1) \quad w_I = \frac{2}{b_I} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_n \beta_{m,I} \sin a_n x \sin \beta_{m,I} y_I}{D_{n,m,I}},$$

dla obszaru II

$$(1.21.2) \quad w_{II} = \frac{2}{b_{II}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_n \beta_{m,II} \sin a_n x \sin \beta_{m,II} y_{II}}{D_{n,m,II}}.$$

We wzorach powyższych przyjęto oznaczenia

$$\beta_{m, I} = \frac{m \pi}{b_I}, \quad \beta_{m, II} = \frac{m \pi}{b_{II}},$$

$$D_{n, m, I} = N_I (\alpha_n^2 + \beta_{m, I}^2)^2 + \frac{E \delta_I}{R^2} \frac{\alpha_n^4}{(\alpha_n^2 + \beta_{m, I}^2)^2} - q_I \alpha_n^2,$$

$$D_{n, m, II} = N_{II} (\alpha_n^2 + \beta_{m, II}^2)^2 + \frac{E \delta_{II}}{R^2} \frac{\alpha_n^4}{(\alpha_n^2 + \beta_{m, II}^2)^2} - q_{II} \alpha_n^2,$$

gdzie

$$N_{I, II} = \frac{E \delta_{I, II}^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Z warunku ciągłości płyty wzdłuż prostej $y_I = 0$, to jest z warunku

$$(1.22) \quad \left[\frac{\partial w_I}{\partial y_I} \right]_{y_I=0} + \left[\frac{\partial w_{II}}{\partial y_{II}} \right]_{y_{II}=0} = 0,$$

otrzymamy poszukiwany warunek wyboczenia płyty

$$(1.23) \quad \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \left(\frac{\beta_{m, I}^2}{D_{n, m, I}} + \frac{\beta_{m, II}^2}{D_{n, m, II}} \right) = 0.$$

W przypadku szczególnym, gdy $q_I = q_{II} = q$, $N_I = N_{II} = N$, $b_I = b_{II} = b/2$ i $\delta_I = \delta_{II} = \delta$, otrzymamy

$$(1.24) \quad \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{\bar{\beta}_m^2}{D_{n, m}} = 0,$$

gdzie $\beta_m = 2 m \pi / b$.

Warunek ten odnosi się do postaci wyboczenia powłoki symetrycznej względem osi x , a zatem do powłoki utwierdzonej zupełnie wzdłuż osi x , a wzdłuż pozostałych boków podpartej w sposób przesuwnie przegubowy. Dla postaci wyboczenia antysymetrycznej względem osi x znikają momenty $B(x)$ i mamy do czynienia z najprostszym przypadkiem wyboczenia powłoki swobodnie podpartej wzdłuż osi x i brzegów $x = 0$, $x = a$ i $y_I = b/2$.

Siłę krytyczną otrzymamy ze wzoru

$$(1.25) \quad q = \frac{1}{\alpha_n^2} \left[N (\alpha_n^2 + \bar{\beta}_m^2) + \frac{E \delta}{R^2} \frac{\alpha_n^4}{(\alpha_n^2 + \bar{\beta}_m^2)^2} \right].$$

Analogicznie dla powłoki dwuprzęsłowej (rys. 4) warunek wyboczenia przyjmuje postać

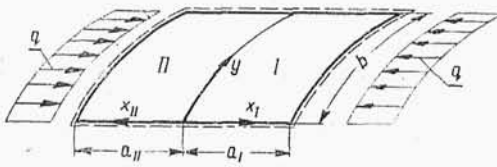
$$(1.26) \quad \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{n, I}^2}{D_{n, m, I}} + \frac{\alpha_{n, II}^2}{D_{n, m, II}} \right) = 0,$$

gdzie

$$D_{n,m,I,II} = N_{I,II} (a_{n,I,II}^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{E \delta_{I,II}}{R^2} \frac{\alpha_{n,I,II}^4}{(a_{n,I,II}^2 + \beta_m^2)^2} - q a_{n,I,II}^2,$$

$$a_{n,I,II} = \frac{n\pi}{a_{I,II}}, \quad N_{I,II} = \frac{E \delta_{I,II}^3}{12(1-\nu^2)}.$$

W przypadku szczególnym $N_I = N_{II} = N$, $a_I = a_{II} = a/2$ i $\delta_I = \delta_{II} = \delta$ otrzymamy uproszczoną postać warunku wyboczenia (1.26)



Rys. 4

$$(1.27) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\bar{a}_n^2}{D_{n,m}} = 0,$$

gdzie $\bar{a}_n = 2n\pi/a$. Ostatni warunek odnosi się do postaci wyboczenia symetrycznej względem linii $y=0$; wzdłuż linii y

powłoka jest utwierdzona zupełnie. Dla postaci wyboczenia antysymetrycznej względem linii y wyznaczmy siłę krytyczną ze wzoru

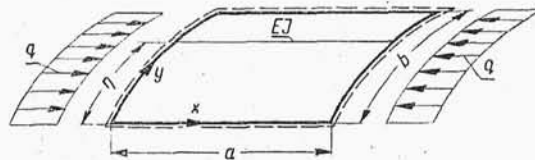
$$(1.28) \quad q = \frac{1}{a_n^2} \left[N(\bar{a}_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{E \delta}{R^2} \frac{\bar{a}_n^4}{(\bar{a}_n^2 + \beta_m^2)^2} \right].$$

Przedstawiony powyżej sposób wyznaczenia siły krytycznej dla powłoki dwuprzęsłowej rozszerzyć można na powłoki z niepodatnymi podporami oraz podzielone na więcej niż na dwa przęsła. Dla r przęseł otrzymamy układ $(r-1)$ równań trójczłonowych jednorodnych, analogicznych do równań trzech momentów. Przyrównanie wyznacznika tego układu równań do zera jest poszukiwanym warunkiem wyboczenia układu.

W przypadku $q_I = q_{II} = q$ i $\delta_I = \delta_{II} = \delta$ podać można dla rozpatrywanych powłok dwu i wieloprzęsłowych warunki wyboczenia w postaci sum odznaczających się znacznie lepszą zbieżnością.

Rozpatrzmy powłokę walcową (rys. 5). Powłoka ta jest na swym obwodzie podparta w sposób przegubowo przesuwany, a ponadto wzdłuż prostej $y = \eta$ podparta żebrem sprężystym o sztywności zginania EJ ¹⁾.

Dla $q > q_{kr}$ układ złożony z płyty i żebra dozna odkształcenia; wzdłuż prostej $y = \eta$ powstaną



Rys. 5

¹⁾ Por. [4].

reakcje radialne $p(x)$ między płytą a żebrą. Wygięcie żebra wyrazimy wzorem

$$(1.29) \quad \bar{w}(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \sin a_n x}{E J \alpha_n^4},$$

a wygięcie płyty wzdłuż prostej $y = \eta$ wzorem

$$(1.30) \quad w(x, \eta) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_n \sin^2 \beta_m \eta}{D_{n,m}} \sin a_n x.$$

Z warunku wspólnego ugięcia płyty i żebra

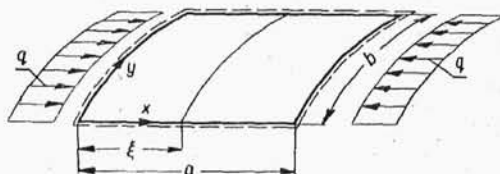
$$w(x, \eta) = \bar{w}(x)$$

otrzymamy warunek wyboczenia układu

$$(1.31) \quad \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{D_{n,m}} + \frac{1}{E J \alpha_n^4} = 0.$$

Po wykonaniu w powyższym związku przejścia granicznego $EJ \rightarrow \infty$ otrzymamy warunek wyboczenia dwuprzęsłowej powłoki walcowej

$$(1.32) \quad \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{D_{n,m}} = 0.$$



Rys. 6

Jest rzeczą widoczną, że warunek wyboczenia (1.32) przedstawia szereg szybciej zbieżny od szeregu ze wzoru (1.23).

Analogicznie dla powłoki z niepodatną podporą wzdłuż prostej $x = \xi$ (rys. 6) warunek wyboczenia przyjmie postać

$$(1.33) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{D_{n,m}} = 0.$$

Dla $\eta = b/2$ i $\xi = a/2$ otrzymamy warunki wyboczenia

$$(1.34) \quad \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{D_{n,m}} = 0, \quad \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{D_{n,m}} = 0,$$

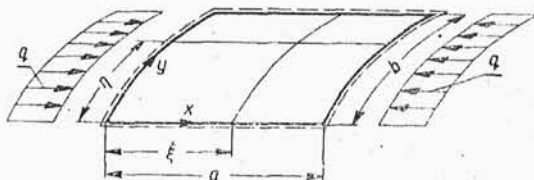
które stanowią analogon do warunków (1.24) i (1.27).

Podany powyżej sposób można oczywiście przenieść na dowolną ilość niepodatnych podpór o kierunkach osi x lub y .

Wreszcie dla powłoki swobodnie podpartej na obwodzie i dodatkowo podpartej w sposób niepodatny wzdłuż linii $x = \xi$ i $y = \eta$ uzyskamy układ równań

$$(1.35) \quad \begin{cases} r_m \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{D_{n,m}} + q \sin \beta_m \eta \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{t_n \sin a_n \xi}{D_{n,m}} = 0, \\ \sin a_n \xi \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{r_m \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} + q t_n \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{D_{n,m}} = 0. \end{cases}$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań prowadzi do warunku wyboczenia powłoki.



Rys. 7

2. Do uzyskanych w pierwszej części pracy wyników dojść można również stosując pojedyncze szeregi trygonometryczne. Metoda pojedynczych szeregów trygonometrycznych pozwoli na wyznaczenie sum szeregów występujących w równaniach (1.18) (szeregi określające G_m i H_r), a także w równaniach odnoszących się do tych przypadków, w których dwa lub trzy sąsiednie brzegi płyty są utwierdzone. W ten sposób unikniemy wyznaczania sum wolnozbieżnych szeregów przy wyliczeniu sił krytycznych z układu równań typu (1.18).

Rozwiążemy dwa podstawowe zadania: (a) wyznaczenie powierzchni ugięcia powłoki ściskanej obciążeniem q i obciążonej momentami

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin a_n x$$

na brzegu $y=0$ oraz momentami

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin a_n x$$

wzdłuż brzegu $y=b$; (b) wyznaczenie powierzchni ugięcia powłoki w przypadku, gdy wzdłuż brzegu $x=0$ działa moment

$$A(y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \beta_m y,$$

a wzdłuż brzegu $x = a$ moment

$$C(y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \beta_m y.$$

W obu przypadkach mamy do czynienia z jednorodnym układem równań różniczkowych (1.1).

Przyjmując $w = \nabla^4 F$ oraz

$$(2.1) \quad \eta = \frac{E \delta \partial^4 F}{R^2 \partial x^4},$$

gdzie

$$(2.2) \quad F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin a_n x,$$

spełniamy równanie (1.1.1) tożsamościowo, a równanie (1.1.2) sprowadzamy do układu równań zwyczajnych

$$(2.3) \quad \left[\left(\frac{a^2}{\pi^2} \frac{d^2}{dy^2} - n^2 \right)^4 + \gamma n^4 - s n^2 \left(\frac{a^2}{\pi^2} \frac{d^2}{dy^2} - n^2 \right)^2 \right] F_n = 0.$$

Jak łatwo sprawdzić, założenie (2.2) spełnia warunki przegubowo przesuwego podparcia na brzegach $x = 0$ i $x = a$.

Równanie charakterystyczne równania (2.3)

$$(2.4) \quad \left(\frac{a^2}{\pi^2} r^2 - n^2 \right)^4 + \gamma n^4 - s n^2 \left(\frac{a^2}{\pi^2} r^2 - n^2 \right)^2 = 0$$

daje osiem pierwiastków

$$(2.5) \quad r_{1,2,\dots,8} = \pm \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 \pm \sqrt{\frac{s n^2}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4 \gamma / s^2})}}.$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego (2.3) jest funkcja

$$(2.6) \quad F_n(y) = C_1 \cosh k_1 y + C_2 \cosh k_2 y + C_3 \cosh k_3 y + C_4 \cosh k_4 y + \\ + \bar{C}_1 \sinh k_1 y + \bar{C}_2 \sinh k_2 y + \bar{C}_3 \sinh k_3 y + \bar{C}_4 \sinh k_4 y,$$

gdzie

$$k_{1,2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + \sqrt{\frac{s n^2}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4 \gamma / s^2})}},$$

$$k_{3,4} = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 - \sqrt{\frac{s n^2}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4 \gamma / s^2})}}.$$

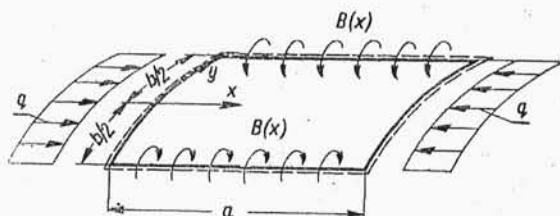
Zajmijmy się przypadkiem, w którym $B_n = D_n$, to jest, kiedy na brzegach $y = 0$ i $y = b$ działają jednakowe momenty. Będziemy tutaj mieli do czynienia z postacią ugięcia powłoki symetryczną względem osi $y = b/2$. W układzie współrzędnych, obranym jak to przedstawiono na rys. 8, przyjmujemy

$$(2.7) \quad F_n(y) = \sum_{i=1}^4 C_i \cosh k_i y.$$

Stałe całkowania znajdziemy z następujących warunków brzegowych dla $y = \pm b/2$:

$$F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0,$$

$$-N \frac{\partial^6 F}{\partial y^6} = B(x).$$



albo

Rys. 8

$$(2.8) \quad F_n = \frac{d^3 F_n}{d y^3} = \frac{d^4 F_n}{d y^4} = 0. \quad -N \frac{d^6 F_n}{d y^6} = B_n.$$

Powyższe warunki brzegowe prowadzą do następującego układu równań:

$$(2.9) \quad \begin{cases} K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 0, \\ k_1^2 K_1 + k_2^2 K_2 + k_3^2 K_3 + k_4^2 K_4 = 0, \\ k_1^4 K_1 + k_2^4 K_2 + k_3^4 K_3 + k_4^4 K_4 = 0, \\ k_1^6 K_1 + k_2^6 K_2 + k_3^6 K_3 + k_4^6 K_4 = -B_n/N, \end{cases}$$

gdzie

$$K_i = C_i \cosh \frac{k_i b}{2} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Stałe C_i wyznaczamy ze wzoru

$$(2.10) \quad C_i = - \frac{B_n}{N \cosh \frac{k_i b}{2}} \frac{1}{(k_i^2 - k_1^2)(k_i^2 - k_2^2) \dots (k_i^2 - k_4^2)},$$

gdzie w mianowniku opuszczamy czynnik $(k_i^2 - k_i^2)$.

Ugięcie powłoki wyznaczymy ze związku

$$(2.11) \quad w = \nabla^4 F = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (F_n^{IV} - 2 a_n^2 F_n'' + a_n^4 F_n) \sin a_n x.$$

Zatem

$$(2.12) \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^4 C_i (k_i^2 - \alpha_n^2)^2 \cosh k_i y \right] \sin \alpha_n x,$$

$$(2.13) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=-b/2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^4 C_i k_i (k_i^2 - \alpha_n^2)^2 \sinh \frac{k_i b}{2} \right] \sin \alpha_n x.$$

Zauważmy, że przy użyciu podwójnych szeregów trygonometrycznych [por. wzór (1.9) przy $B_n = D_n$ i $y = 0$] wzór (2.12) przedstawia się następująco:

$$(2.14) \quad w = \frac{4}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{B_n \beta_m}{D_{n,m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Zatem

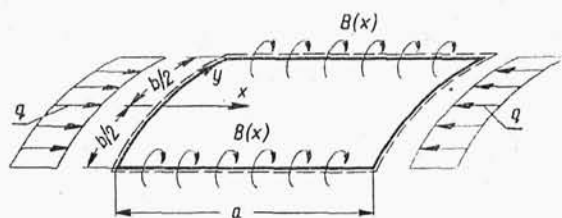
$$(2.15) \quad B_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} = - \frac{b}{2} \sum_{i=1}^4 C_i k_i (k_i^2 - \alpha_n^2)^2 \sinh \frac{k_i b}{2}.$$

Po prostych przekształceniach znajdziemy

$$(2.16) \quad \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} = \frac{a^2}{8 N \pi^2 S_n} \left[P_n \left(\frac{k_1 b}{2} \operatorname{tgh} \frac{k_1 b}{2} - \frac{k_3 b}{2} \operatorname{tgh} \frac{k_3 b}{2} \right) + \right. \\ \left. + R_n \left(\frac{k_4 b}{2} \operatorname{tgh} \frac{k_4 b}{2} - \frac{k_2 b}{2} \operatorname{tgh} \frac{k_2 b}{2} \right) \right],$$

gdzie

$$P_n = \sqrt{\frac{s n^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 \gamma}{s^2}} \right)}, \quad R_n = \sqrt{\frac{s n^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \gamma}{s^2}} \right)},$$



Rys. 9

$$S_n = \frac{s n^2}{2} \sqrt{1 - \frac{4 \gamma}{s^2}}.$$

W drugim przypadku obciążenia powłoki momentami $B(x)$ (rys. 9) powierzchnia ugięcia powłoki będzie antysymetryczna względem

osi x . Z rozwiązania (2.6) przyjmujemy jedynie funkcje nieparzyste

$$(2.17) \quad F_n(y) = \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i \sinh k_i y.$$

Z warunków brzegowych wyznaczmy stałe całkowania

$$(2.18) \quad \bar{C}_i = \frac{B_n}{N \sinh \frac{k_i b}{2}} \frac{1}{(k_i^2 - k_1^2) \dots (k_i^2 - k_4^2)} \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Ugięcie powłoki otrzymamy ze wzoru

$$(2.19) \quad w = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^4 \bar{C}_i (k_i^2 - a_n^2)^2 \sinh k_i y \right] \sin a_n x.$$

Z przyrównania pochodnej $[\partial w / \partial y]_{y=0,2}$ i odpowiedniej pochodnej ze wzoru (1.9) (przy $B_n = -D_n$) otrzymamy

$$(2.20) \quad \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} = \frac{a^2}{8N\pi^2 S_n} \left[P_n \left(\frac{k_1 b}{2} \operatorname{ctgh} \frac{k_1 b}{2} - \frac{k_3 b}{2} \operatorname{ctgh} \frac{k_3 b}{2} \right) + \right. \\ \left. + R_n \left(\frac{k_4 b}{2} \operatorname{ctgh} \frac{k_4 b}{2} - \frac{k_2 b}{2} \operatorname{ctgh} \frac{k_2 b}{2} \right) \right].$$

Rozważmy dalej przypadek, w którym na powłokę ściskaną siłami q działają momenty podporowe $A(y)$ wzdłuż prostych $x=0$ i $x=a$.

Przyjmując

$$w = \nu^4 F, \quad q = \frac{E \delta}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

gdzie

$$(2.21) \quad F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(x) \sin \beta_m y,$$

spełnimy tożsamościowo równanie (2.1), a równanie (2.2) doprowadzimy do układu zwyczajnych równań różniczkowych

$$(2.22) \quad \left[\left(\frac{b^2}{\pi^2} \frac{d^2}{dx^2} - m^2 \right)^4 + \bar{\gamma} \frac{b^4}{\pi^4} \frac{d^4}{dx^4} + 2 \bar{s} \frac{b^2}{\pi^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{b^2}{\pi^2} \frac{d^2}{dx^2} - m^2 \right)^2 \right] F_m = 0,$$

gdzie

$$\bar{\gamma} = \frac{E \delta b^4}{N \pi^4 R^2}, \quad \bar{s} = \frac{q b^2}{2 N \pi^2}.$$

Równanie charakterystyczne równania (2.22)

$$(2.23) \quad \left(\frac{b^2}{\pi^2} r^2 - m^2 \right)^4 + \bar{\gamma} \frac{b^4}{\pi^4} r^4 + 2 \bar{s} \frac{b^2}{\pi^2} r^2 \left(\frac{b^2}{\pi^2} r^2 - m^2 \right)^2 = 0$$

daje osiem pierwiastków

$$r_{1,2,\dots,8} = \pm \frac{\pi i}{2b} \left(\sqrt{\bar{s} \pm \sqrt{\bar{s}^2 - \bar{\gamma}}} + \sqrt{\bar{s} \pm \sqrt{\bar{s}^2 - \bar{\gamma} - 4m^2}} \right).$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (2.22) przyjmie postać

$$(2.24) \quad F_m(x) = C_1 \cos k_1 x + C_2 \cos k_2 x + C_3 \cos k_3 x + C_4 \cos k_4 x + \\ + \bar{C}_1 \sin k_1 x + \bar{C}_2 \sin k_2 x + \bar{C}_3 \sin k_3 x + \bar{C}_4 \sin k_4 x,$$

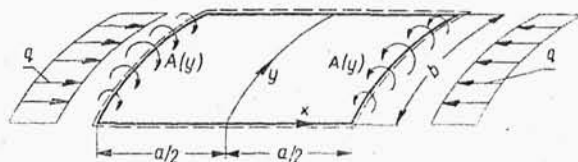
gdzie

$$k_{1,2} = \frac{\pi}{2b} \left(\sqrt{\bar{s} + \sqrt{\bar{s}^2 - \bar{\gamma}}} + \sqrt{\bar{s} \pm \sqrt{\bar{s}^2 - \bar{\gamma}} - 4m^2} \right),$$

$$k_{3,4} = \frac{\pi}{2b} \left(\sqrt{\bar{s} - \sqrt{\bar{s}^2 - \bar{\gamma}}} + \sqrt{\bar{s} \pm \sqrt{\bar{s}^2 - \bar{\gamma}} - 4m^2} \right).$$

Rozważmy przypadek symetrycznej postaci odkształcenia powłoki, gdy na brzegach $x=0$ i $x=a$ działają jednakowe momenty $A(y)$ (rys. 10). Dla przyjętego układu współrzędnych przyjmiemy

$$F_m(x) = \sum_{i=1}^4 C_i \cos k_i x.$$



Rys. 10

Z warunków brzegowych dla $x = \pm a/2$

$$F_n = \frac{d^2 F_m}{dx^2} = \frac{d^4 F_m}{dx^4} = 0, \quad -N \frac{d^6 F_m}{dx^6} = A_m$$

wyznaczymy stałe całkowania

$$(2.25) \quad C_i = -\frac{A_m}{N \cos \frac{k_i a}{2}} \frac{1}{(k_i^2 - k_1^2) \dots (k_i^2 - k_4^2)}.$$

W mianowniku ostatniego wzoru opuścić należy czynnik $(k_i^2 - k_i^2)$. Ugięcie powłoki określa wzór

$$(2.26) \quad w = \nu^4 F = \sum_{m=1,2,\dots} (F_m^{IV} - 2\beta_m^2 F_m'' + \beta_m^4 F_m) \sin \beta_m y.$$

Tak więc

$$(2.27) \quad w = \sum_{m=1,2,\dots} \left[\sum_{i=1}^4 C_i (k_i^2 - \beta_m^2)^2 \cos k_i x \right] \sin \beta_m y.$$

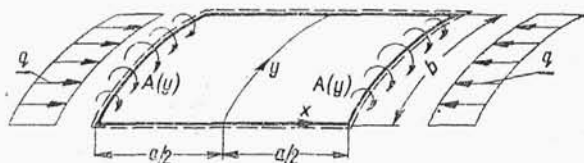
Przyrównując do siebie wyrażenie

$$(2.28) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=-a/2} = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^4 C_i k_i (k_i^2 - \beta_m^2)^2 \sin \frac{k_i a}{2} \right] \sin \beta_m y$$

oraz odpowiednią pochodną wzoru (1.9) na lewym brzegu powłoki otrzymamy związek

$$(2.29) \quad A_m \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\alpha_n^2}{D_{n,m}} = \frac{a}{4} \sum_{i=1}^4 C_i k_i (k_i^2 - \beta_m^2)^2 \sin \frac{k_i a}{2}.$$

W przypadku obciążenia powłoki momentami antysymetrycznie działającymi na brzegach $x = a/2$ (rys. 11) otrzymamy odkształcenie powłoki antysymetryczne względem $x = 0$.



Rys. 11

Przyjmiemy

$$(2.30) \quad F_m(x) = \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i \sin k_i x.$$

Z warunków brzegowych dla $x = a/2$

$$F_m = \frac{d^3 F_m}{dx^3} = \frac{d^4 F_m}{dx^4} = 0, \quad -N \frac{d^6 F_m}{dx^6} = -A_m$$

uzyskamy stałe całkowania

$$(2.31) \quad \bar{C}_i = -\frac{A_m}{N \sin \frac{k_i a}{2} (k_i^2 - k_1^2) \dots (k_i^2 - k_4^2)} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Tak więc

$$(2.32) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=-a/2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^4 k_i \bar{C}_i (k_i^2 - \beta_m^2)^2 \cos \frac{k_i a}{2} \right] \sin \beta_m y.$$

Porównując ostatnie wyrażenie do odpowiedniej pochodnej wzoru (1.9) (przy $A_m = -C_m$, $B_n = D_n = 0$) otrzymamy

$$(2.33) \quad A_m \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\alpha_n^2}{D_{n,m}} = \frac{a}{4} \sum_{i=1}^4 k_i (k_i^2 - \beta_m^2)^2 C_i \cos \frac{k_i a}{2}.$$

Za pomocą uzyskanych wzorów zamkniętych wyrazić można warunki wyboczenia (1.13.1), (1.14), (1.15) i (1.16) w postaci równań przestępnych. Są one jednak tak złożone, że polecić należy stosowanie warunków wyboczenia w postaci sum zawierających nieznany parametr s . Natomiast poleca się

wyrażenie wzorami zamkniętymi sum G_m i H_r występujących w układzie równań (1.18). W tym układzie równań szeregi G_m i H_r odznaczają się bardzo małą zbieżnością w porównaniu z dwoma pozostałymi szeregami. Droga postępowania przy rozwiązywaniu tego układu równań jest następująca. Dla przyjętego s wyznaczamy z wyrażeń zamkniętych wielkości G_m i H_r dla kolejnych wartości $m, r = 1, 3, \dots$. Ograniczając się do trzech, a najwyżej do czterech wyrazów szeregów

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_n B_n}{D_{n,m}}, \quad \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m A_m}{D_{n,m}},$$

obliczamy wartość wyznacznika układu równań. Droga prób wyznaczamy dwie wartości wyznacznika (jedną dodatnią, drugą ujemną) bliskie zeru. Dalej ze wzoru interpolacyjnego Lagrange'a wyznaczamy wartość s_{kr} .

Dla tych przypadków, w których jedna z krawędzi lub dwie sąsiadujące krawędzie są utwierdzone, a pozostałe swobodnie podparte, najwygodniej będzie korzystać z warunków wyboczenia (1.34) i (1.35) (z ostatniego dla $\xi = a/2$, $\eta = b/2$).

Zauważmy dalej, że stosowanie pojedynczych szeregów trygonometrycznych stanowi jedyną drogę rozwiązania zagadnienia wyboczenia powłoki dla przypadków, w których warunki brzegowe odbiegają od tych, które rozważa się w niniejszej pracy. Szczególnie częstym (zwłaszcza w konstrukcjach budowlanych) jest przypadek nieprzesuw nego podparcia przegubowego lub nieprzesuw nego utwierdzenia zupełnego brzegów $y=0$ i $y=b$. W pierwszym przypadku mamy na tym brzegu $w=0$, $u=0$, $v=0$ i $M_y=0$, w drugim $w=0$, $u=0$, $v=0$ i $\partial w/\partial y=0$. Warunki te można spełnić, zważywszy że funkcja $F_n(y)$ zawiera osiem stałych całkowania, co odpowiada ośmiu warunkom brzegowym, po cztery na każdym z brzegów. Znaczne uproszczenie uzyskamy dla warunków brzegowych symetrycznych wzdłuż brzegów $y=0$ i $y=b$ i przy wykorzystaniu symetrycznej i antysymetrycznej postaci wyboczenia powłoki. Uzyskamy tu układ czterech równań jednorodnych tak dla symetrycznej, jak i antysymetrycznej postaci wyboczenia. Przyrównanie do zera wyznacznika układu daje warunek wyboczenia. Otrzymujemy równanie przestępne o bardzo zawiłej budowie. Trudności jednak rachunkowe występujące przy wyznaczaniu najmniejszego pierwiastka równania przestępnego są tak znaczne, że należy szukać innej drogi rozwiązania zagadnienia, na przykład stosowania metod energetycznych lub ortogonalizacyjnych.

3. Przedstawiony w pierwszej części pracy sposób rozwiązywania zagadnień stateczności powłoki walcowej kołowej rozszerzyć można na bardziej złożone przypadki wyboczenia układu. Przede wszystkim na przypadek powłoki poddanej obciążeniu radialnemu \bar{p} o jednostajnej intensywności

na powierzchni powłoki i obciążeniu q_1 działającemu w kierunku osi x . Obciążenie \bar{p} wywołuje reakcje wzdłuż krawędzi $y=0$ i $y=b$ o wartości $q_2 = \bar{p} R$. Jak długo obciążenie \bar{p} jest mniejsze od pewnej wartości granicznej, mamy do czynienia ze stanem błonowym naprężeń. Istnieje jednak taka wartość obciążenia zewnętrznego, przy której następuje utrata stateczności. Zmianę stanu naprężeń i odkształceń, mającą miejsce przy utracie stateczności, opisują następujące równania różniczkowe W. Z. Własowa, [1],

$$(3.1) \quad \frac{R}{E\delta} \nabla^4 \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$(3.2) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N \nabla^4 w + q_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Łatwo spostrzec, że dla tego ogólniejszego przypadku wyboczenia słuszne pozostają wszelkie rozwiązania zawarte w pierwszej części pracy, jeżeli zamiast występującego tam wyrażenia $D_{n,m}$ przyjmiemy wyrażenie $D'_{n,m}$, gdzie

$$D'_{n,m} = N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{E\delta}{R^2} \frac{a_n^4}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2} - q_1 a_n^2 - q_2 \beta_m^2.$$

W analogiczny sposób jak dla zagadnień stateczności rozwiązać można zagadnienia drgań własnych powłoki przy utwierdzeniu jej krawędzi w dowolnej kolejności. Odpowiednie równania różniczkowe drgań wymuszonych, będące podstawą zasadniczego związku (1.9), mają tu postać, [1],

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{R}{E\delta} \nabla^4 \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N \nabla^4 w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \sin \omega t. \end{cases}$$

Tutaj μ jest masą odniesioną do jednostki powierzchni środkowej powłoki, a ω częstotliwością drgań. Nie powtarzając postępowania zmierzającego do uzyskania wzoru (1.9) podamy ugięcie powłoki, wywołane działaniem momentów brzegowych w sposób okresowo zmienny:

$$(3.4) \quad w = \frac{2}{a} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ |A_m - (-1)^n C_m| a_n + \\ + |B_n - (-1)^m D_n| \beta_m \varrho \} \frac{\sin a_n x \sin \beta_m y}{D'_{n,m}},$$

gdzie

$$D'_{n,m} = \frac{N\pi^4}{a^4} \left[(n^2 + m^2 \varrho^2)^2 + \gamma \frac{n^4}{(n^2 + m^2 \varrho^2)^2} - \lambda \right], \quad \lambda = \frac{\mu \omega^2 a^4}{N\pi^4}.$$

Z warunków zerowej wartości pochodnej $\partial w / \partial n$ na brzegach utwierdzonych otrzymuje się warunki drgań swobodnych powłoki. W mocy pozostają wzory (1.11), (1.13), (1.15), (1.16), (1.18), (1.22), (1.26), (1.32), (1.33) i (1.35), jeśli w mianowniku sum zastąpić $D_{n,m}$ przez $D'_{n,m}$.

Sumy

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D'_{n,m}}, \quad \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D'_{n,m}}$$

dadzą się obliczyć. Skorzystać tu można ze wzorów (2.18) i (2.20) wstawiając zamiast $k_{1,2}$, $k_{3,4}$, P_n , R_n i S_n wartości

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{aligned} k'_{1,2} &= \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + \sqrt{\frac{\lambda}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\gamma n^4}{\lambda^2}}\right)}}, \\ k'_{3,4} &= \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\gamma n^4}{\lambda^2}}\right)}}, \\ P'_n &= \sqrt{\frac{\lambda}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\gamma n^4}{\lambda^2}}\right)}, \\ R'_n &= \sqrt{\frac{\lambda}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma n^4}{\lambda^2}}\right)}, \\ S'_n &= \frac{\lambda}{2} \sqrt{1 - \frac{4\gamma n^4}{\lambda^2}}. \end{aligned} \right.$$

Wreszcie uogólnić można zagadnienie drgań swobodnych powłoki na przypadek drgań przy udziale sił osiowych. Drugie z równań (3.3) uzupełnić należy wyrazem $q_1 \partial^2 w / \partial x^2 + q_2 \partial^2 w / \partial y^2$. Słuszne tutaj pozostaną wszelkie rozważania pierwszej części pracy z tym, że zamiast $D'_{n,m}$ wstawić należy $D''_{n,m}$, gdzie

$$(3.6) \quad D''_{n,m} = \frac{N\pi^4}{a^4} \left[(n^2 + m^2 \varrho^2)^2 + \gamma \frac{n^4}{(n^2 + m^2 \varrho^2)^2} - s_1 n^2 - s_2 m^2 \varrho^2 - \lambda \right],$$

przy czym

$$s_1 = \frac{q_1 a^2}{N \pi^2}, \quad s_2 = \frac{q_2 a^2}{N \pi^2}.$$

Łatwo zauważyć, że ze wzrostem q_1 i q_2 częstotliwość drgań maleje i dla $q \rightarrow q_{kr}$ (przy ustalonym stosunku q_1/q_2) częstotliwość drgań dąży do zera. Ze wzrostem sił rozciągających q częstotliwość drgań swobodnych powłoki wzrasta.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Z. Własow, *Obszczaja teorja obotoczek i jej priloženje w tiechnike*, Moskwa 1949.
- [2] W. Nowacki, *Drgania własne i wyboczenie płyty na obwodzie całkowicie utwardzonej*, Arch. Mech. Stos. 4 (1954).
- [3] S. Iguchi, *Allgemeine Lösung der Knickungsaufgabe für rechteckige Platten*, Ing.-Arch. 1936.
- [4] W. Nowacki, *Stateczność płyt prostokątnych wzmocnionych żebrami*, Arch. Mech. Stos. 2 (1954).

Резюме

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе приводится точное решение проблемы продольного изгиба и колебаний круговой цилиндрической оболочки с различно опертыми краями. Исходным пунктом является дифференциальное уравнение продольного изгиба, или-же собственных колебаний, согласно технической теории оболочек В. З. Власова.

В первой части работы приводится решение вопроса устойчивости оболочки путем применения двойных тригонометрических рядов.

Выражая поверхности прогиба оболочки, подвергнутой действию продольных сжимающих сил и краевых моментов [уравнение (1.9)], при помощи двойных рядов Фурье, получают из краевых условий соответствующее количество условий. Рассматриваются случаи оболочек, один, два или четыре края которых защемлены [уравнения (1.12), (1.13.2), (1.14), (1.15), (1.18.1) и (1.18.2)]. Тем же методом решается вопрос продольного изгиба оболочки с продольными ребрами жесткости и, наконец, случай продольного изгиба сплошной оболочки.

Во второй части работы, применяя метод единичных тригонометрических рядов, суммируется часть рядов, выступающих в решениях, полученных при помощи тригонометрических рядов.

В третьей части работы приводятся дополнения, касающиеся продольного изгиба оболочки, сжимаемой в двух главных направлениях. Наконец, приводится решение проблемы собственных колебаний оболочки, сжимаемой в двух главных направлениях, при различных краевых условиях. Установлено, что, по мере роста сжимающих сил, частота собственных колебаний стремится к нулю. По мере роста растягивающих сил, $q \rightarrow q_{kr}$, частота собственных колебаний оболочки увеличивается.

S u m m a r y

BUCKLING AND FREE VIBRATIONS OF A CYLINDRICAL SHELL

An exact solution of the problem of buckling and free vibrations of a circular cylindrical shell for different ways of supporting the edges is given. The starting point is the differential equation of buckling and free vibrations of the engineer's theory of shells developed by V. Z. V l a s o v.

The first section brings a solution of the problem of stability of a shell by means of double trigonometric series.

Expressing the deflection surfaces of a shell subjected to longitudinal compressive forces and edge moments (Eq. 1.9) by means of double F o u r i e r series the necessary number of conditions is obtained. The cases of shells with one, two or four edges built in [Eqs. (1.12), (1.13.2), (1.14), (1.15), (1.18.1) and (1.18.2)] are discussed. The same method is used to solve the problem of a shell reinforced with longitudinal ribs and the case of buckling of a continuous shell.

In the second section part of the series appearing in the solution obtained by means of the trigonometric series is summed up using the method of single trigonometric series.

The third section contains some additional remarks on the problem of buckling of a shell subjected to compression in two principal directions. Finally, the solution of the problem of free vibrations of a shell subjected to compression in two principal directions for different ways of supporting the edges is given.

It is found that with increasing compressive forces the frequency of free vibrations decreases and for $q \rightarrow q_{cr}$ the frequency of free vibrations tends to zero. It increases with increasing tensile forces.