

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

R A D A R E D A K C Y J N A

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY
JULIAN BONDER MICHAŁ BROSZKO
WACŁAW OLSZAK BOHDAN STEFANOWSKI
STANISŁAW TURSKI WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

JERZY NOWIŃSKI - REDAKTOR
TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

TOM VI WARSZAWA 1954 ZESZYT 4
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

DRGANIA WŁASNE I WYBOCZENIE PŁYTY PROSTOKĄTNEJ NA OBWODZIE CAŁKOWICIE UTWIERDZONEJ

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Zagadnienie drgań własnych i wyboczenia płyty prostokątnej na obwodzie całkowicie utwardzonej zostało rozwiązane w sposób ścisły dopiero w ubiegłym dwudziestoleciu. Wymienić tu należy prace S. Tomotika, [1], i S. Iguchiego, [2], dotyczące drgań własnych płyty, oraz rozwiązania E. Trefftza, [3], G. J. Taylora, [4], O. H. Faxena, [5], i S. Iguchiego, [6], odnoszące się do zagadnienia stateczności płyt w sposób zupełny utwardzonych na obwodzie.

W niniejszym komunikacie zostanie podany odmienny sposób rozwiązania tych złożonych zagadnień niż u wymienionych autorów, przy czym rozwiązanie dotyczyć będzie przypadku ogólniejszego, mianowicie drgań własnych płyty przy udziale stałych sił ściskających lub rozciągających, działających w płaszczyźnie środkowej płyty.

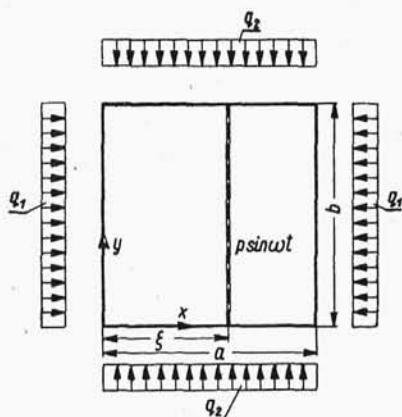
Rozważmy najpierw płytę prostokątną na brzegach swobodnie podpartą, poddaną działaniu sił ściskających q_1 i q_2 , oraz obciążenia periodycznego $p \sin \omega t$, działającego prostopadle do płaszczyzny płyty wzdłuż prostej $x = \xi$.

Rozwiązanie równania różniczkowego drgań poprzecznych płyty

$$(1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w + q_1 w_{xx} + q_2 w_{yy} + \mu w_{tt} = p(x, y) \sin \omega t$$

przyjmuje tu postać

$$(2) \quad w = \frac{2}{a} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m \sin \alpha_n \xi}{D_{n,m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y,$$



Rys. 1

gdzie

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}$$

oraz

$$D_{n,m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2) - \mu \omega^2.$$

We wzorze (1) w oznacza ugięcie płyty, N sztywność zginania płyty, ω częstotliwość drgań, μ masę odniesioną do jednostki powierzchni środkowej oraz t czas. Ze wzoru (2) można przejść, różniczkując go względem ξ , do przypadku obciążenia płyty momentami M , rozłożonymi w sposób ciągły wzdłuż prostej $x = \xi$. Otrzymamy dla tego przypadku

$$(3) \quad w = \frac{2}{a} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m \alpha_n \cos \alpha_n \xi}{D_{n,m}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Tutaj A_m jest współczynnikiem rozwinięcia Fouriera momentu M wzdłuż prostej $x = \xi$. Dla $\xi = 0$ otrzymamy przypadek obciążenia płyty momentami M wzdłuż osi y .

Stosując powyższe postępowanie dla przypadku, gdy wzdłuż brzegów $x=0$, $y=0$, $x=a$ i $y=b$ działają momenty, których rozwinięcie Fouriera posiada współczynniki oznaczone kolejno przez A_m, B_n, C_m i D_n , uzyskamy dla ugięcia płyty następujący wzór:

$$(4) \quad w = \frac{2}{a} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[A_m - (-1)^n C_m] \alpha_n + \frac{a}{b} [B_n - (-1)^m D_n] \beta_m}{D_{n,m}} \times \\ \times \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Z warunków zupełnego utwierdzenia płyty na jej brzegach,

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} = 0,$$

otrzymamy układ czterech równań jednorodnych. Układ ten uprości się do dwóch równań ze względu na symetrię warunków brzegowych i obciążenia.

Zauważmy, że zależności

$$(5) \quad A_m = C_m, \quad B_n = D_n \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots)$$

odnoszą się do postaci drgań symetrycznej względem obu osi symetrii płyty.

Zależności

$$(6) \quad A_m = C_m, \quad B_n = -D_n \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 2, 4, 6, \dots)$$

odpowiadają liniom węzłowym wzdłuż prostej $y = b/2$. Mamy tu postać drgań symetryczną względem osi $x = a/2$ i antysymetryczną względem $y = b/2$.

Odwrotnie, zależności

$$(7) \quad A_m = -C_m, \quad B_n = D_n \quad (m = 2, 4, 6, \dots; n = 1, 3, 5, \dots)$$

odnoszą się do przypadku linii węzłowych wzdłuż osi symetrii $x = a/2$.

Wreszcie zależności

$$(8) \quad A_m = -C_m, \quad B_n = -D_n \quad (m, n = 2, 4, 6, \dots)$$

odpowiadają liniom węzłowym wzdłuż prostych $x = a/2$ i $y = b/2$.

Ograniczymy się do rozważenia symetrycznej (względem obu osi) postaci drgań własnych płyty.

Z warunków

$$[w_x]_{x=0} = 0, \quad [w_y]_{y=0} = 0$$

otrzymamy układ dwu równań

$$(9.1) \quad A_m \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{D_{n,m}} + \frac{a\beta_m}{b} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{B_n \alpha_n}{D_{n,m}} = 0,$$

$$(9.2) \quad \alpha_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_m \beta_m}{D_{n,m}} + \frac{a B_n}{b} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} = 0.$$

Eliminując z powyższego układu równań B_n uzyskamy

$$(10) \quad A_m - \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} A_i G_{mi} = 0,$$

gdzie

$$G_{mi} = \frac{\beta_m \beta_i}{E_m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{F_k D_{k,i} D_{k,m}}$$

oraz

$$E_m = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{D_{n,m}}, \quad F_k = \sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_r^2}{D_{r,k}}.$$

Z przyrównania do zera wyznacznika układu równań (10)

$$(11) \quad \begin{vmatrix} 1 - G_{11}, & -G_{13}, & -G_{15}, & \dots \\ -G_{31}, & 1 - G_{33}, & -G_{35}, & \dots \\ -G_{51}, & -G_{53}, & 1 - G_{55}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

otrzymuje się nieskończoną ilość pierwiastków, z których najmniejszy daje podstawową częstotliwość drgań własnych płyty.

Dla płyty kwadratowej oraz przy $q_1 = q_2 = q$ otrzymamy znaczne uproszczenie układu równań. Występująca w równaniu (10) wartość G_{mi} przyjmuje tu postać

$$(12) \quad G_{mi} = - \frac{\beta_m a_i}{E_m D_{m,i}}.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$s = \frac{q a^2}{N \pi^2}, \quad \lambda = \mu \frac{\omega^2 a^4}{N \pi^4}$$

mamy

$$(13) \quad G_{mi} = - \frac{m_i}{[(i^2 + m^2)^2 - s(i^2 + m^2) - \lambda]} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + m^2)^2 - s(n^2 + m^2) - \lambda}$$

Występującą w wyrażeniu (13) sumę można przedstawić następującym wzorem zamkniętym:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + m^2)^2 - s(n^2 + m^2) - \lambda} &= \frac{1}{4 \sqrt{\lambda^2 + \frac{s^2}{4}}} \times \\ &\times \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m^2 - \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \lambda}} \operatorname{tgh} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{m^2 - \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \lambda}} + \right. \\ &\left. + \frac{\pi}{2} \sqrt{\sqrt{\frac{s^2}{4} + \lambda} + \frac{s}{2} - m^2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\sqrt{\frac{s^2}{4} + \lambda} + \frac{s}{2} - m^2} \right). \end{aligned}$$

Uwzględniając jedynie cztery pierwsze wyrazy układu równań (5) i przyrównując wyznacznik czwartego rzędu do zera, otrzymujemy częstotliwości drgań własnych podane w tablicy 1.

Tablica 1

S	-3	-1	0	1	3
$\frac{a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu}{N}} \omega$	4,57	3,98	3,65	3,28	2,40

Jest rzeczą widoczną, że ze wzrostem sił ściskających maleje częstotliwość drgań własnych. Dla $q \rightarrow q_{kr}$ zdąża ona do zera. Ze wzrostem sił rozciągających częstotliwość drgań własnych wzrasta. Dla $s = 0$, a więc dla przypadku drgań własnych bez udziału siły osiowej, jak i dla przypadku $\omega = 0$, a więc dla zagadnienia stateczności płyty, układ równań (10) jest identyczny z układem równań, uzyskanych przez S. Iguchiego na innej drodze.

Zauważmy, że zależności (6)-(8) pozwalają na wyznaczenie sił krytycznych dla płyt zupełnie utwierdzonych wzdłuż trzech i dwóch ze sobą sąsiadujących krawędzi.

Szczególnie prosto przedstawiają się równania warunkowe drgań własnych (a przy $\omega = 0$ równania warunkowe wyboczenia płyty) dla przypadku utwierdzenia pełnego płyty wzdłuż jednego lub dwu przeciwległych boków. Na przykład, dla płyty wzdłuż krawędzi $x=0$ zupełnie utwierdzonej, a na pozostałych bokach swobodnie podparte, równanie warunkowe przyjmuje (przy $C_m = 0$, $D_n = B_n = 0$) szczególnie prostą postać

$$(14) \quad \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{D_{n,m}} = 0.$$

Powyższe rozważania dają się uogólnić na płyty ortotropowe. Należy nie zmieniając toku postępowania wprowadzić zamiast $D_{n,m}$ wartość $\Delta_{n,m}$.

Zważywszy, że równanie różniczkowe drgań poprzecznych płyty ortotropowej ma postać (7).

$$(15) \quad B_1 w_{xxxx} + 2H w_{xxyy} + B_2 w_{yyyy} + q_1 w_{xx} + q_2 w_{yy} + \bar{\mu} w_{tt} = p \sin \omega t,$$

otrzymamy

$$\Delta_{n,m} = (B_1 \alpha_n^4 + 2H \alpha_n^2 \beta_m^2 + B_2 \beta_m^4) - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2) - \bar{\mu} \omega^2.$$

Tutaj B_1 i B_2 oznaczają sztywność zginania płyty w kierunkach osi x i y , $2H = B_1/m_2 + B_2/m_1 + 4C$, gdzie m_1 i m_2 są liczbami Poissona

dla tych kierunków, $C = (h^3/12) G_0$, gdzie G_0 jest stałą materiałową, odpowiednikiem modułu odkształcenia postaciowego ciała izotropowego, oraz h grubością płyty. Wreszcie $\bar{\mu}$ jest masą odniesioną do jednostki powierzchni płyty ortotropowej.

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. Tomotika, Phil. Mag., Londyn 142 (1936).
- [2] S. Iguchi, *Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte*, Ing.-Arch. 1937.
- [3] E. Trefftz, Zeitschr. angew. Math. Mech. 15 (1935).
- [4] G. I. Taylor, *The Buckling Load for a Rectangular Plate with Four Clamped Edges*, Zeitschr. angew. Math. Mech. 1933.
- [5] O. H. Faxen, *Die Knickfestigkeit rechteckiger Platten*, Zeitschr. angew. Math. Mech. 1935.
- [6] S. Iguchi, *Allgemeine Lösung der Knickungsaufgabe für rechteckige Platten*, Ing.-Arch. 1936.
- [7] M. T. Huber, *Teoria płyt prostokątnie-różnokierunkowych*, Lwów 1921.

Резюме

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ЗАЦЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ

Вопрос собственных колебаний и вопрос устойчивости прямоугольной пластинки, зацемленной по контуру, были точно решены несколькими авторами (С. Томотика, С. Игуши, Г. Тейлор, Е. Треффтц, О. Факсен) в 1933-1937 годах. В настоящем сообщении приводится различный, чем у упомянутых авторов, способ решения этого вопроса. Кроме того, решение касается более общей проблемы, а именно внутренних колебаний пластинки при участии сжимающих или растягивающих сил.

Исходным пунктом является выражение для поверхности изгиба пластинки, нагруженной периодически переменными и действующими вдоль краев пластинки, изгибающими моментами. Из условий полного зацемления пластинки по контуру и учитывая симметрию или антисимметрию форм колебаний, а также симметрию действия нагрузок q_1 и q_2 , получается система двух уравнений. Детерминант этой системы, приравненный к нулю, представляет критерий свободных колебаний пластинки.

Ограничиваясь симметричной, по отношению к обеим осям пластинки, формой собственных колебаний пластинки, получается система уравнений (9.1) и (9.2).

Для квадратной пластинки, а также при $q_1 = q_2 = q$, определяется основная частота собственных колебаний в зависимости от параметра q . Вышеизложенный способ решения применим к пластинкам, одна, две или три стороны которых защемлены, остальные же подперты свободно.

Этот способ можно применить без затруднений к ортотропным пластинкам.

S u m m a r y

FREE VIBRATIONS AND BUCKLING OF A RECTANGULAR PLATE WITH ALL EDGES BUILT IN

The problem of free vibrations and buckling of a rectangular plate with all edges built in has been solved by several authors (S. Tomotika, S. Iguchi, G. I. Taylor, E. Trefftz, O. H. Faxen) during the years 1933 to 1937. In the present paper a different method of solving this problems is discussed. The solution shown is of a somewhat more general character and concerns free vibrations of a plate subjected to compression or tension.

The starting point of the discussion is the expression of the deflection surface of the plate loaded at the edges by bending moments of periodic variability. Assuming that the plate is built in at all edges and considering the symmetrical (or antisymmetrical) form of vibrations, as well as the symmetry of loads q_1 and q_2 , we obtain a system of two equations. Its determinant, equalled to zero, constitutes the criterion of free vibrations of the plate. Limiting our considerations to vibrations symmetrical with respect to both axes of the plate we obtain the system of equations (9.1) and (9.2). For a square plate with $q_1 = q_2 = q$, the fundamental frequency of free vibrations is determined in function of the parameter q . This method can be applied to plates with one, two or three edges built in, the other being simply supported. The procedure can easily be modified for orthotropic plates.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 października 1954 r.