

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

# ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

R A D A   R E D A K C Y J N A

WITOLD NOWACKI - PRZEWODNICZĄCY  
JULIAN BONDER   MICHAŁ BROSZKO  
WACŁAW OLSZAK   BOHDAN STEFANOWSKI  
STANISŁAW TURSKI   WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T   R E D A K C Y J N Y

JERZY NOWIŃSKI - REDAKTOR  
TADEUSZ IWIŃSKI   JÓZEF JANICZEK

TOM VI                      WARSZAWA 1954                      ZESZYT 2  
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## STATECZNOŚĆ PŁYT PROSTOKĄTNYCH WZMOCNIONYCH ŻEBRAMI

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Zagadnienia stateczności płyt prostokątnych wzmocnionych żebrami rozwiązywane były głównie przy użyciu metody energetycznej. Szereg rozwiązań uzyskali w tym zakresie S. Timoszenko, [1], E. Chwalla, [2], C. Torre, [3], i A. Strasser, [4]. Przy stosowaniu metody energetycznej wyraża się postać wyboczenia płyty skończonym szeregiem funkcyjnym, w którym przyjęte funkcje spełniają warunki brzegowe zagadnienia. Współczynniki wyrazów szeregu wyznacza się z warunku minimum całkowitej energii potencjalnej układu. Przy użyciu metody energetycznej nie otrzymuje się jednak warunków wyboczenia płyty w postaci zamkniętej.

Warunki wyboczenia płyty stężonej żebrami podali w postaci zamkniętej najpierw A. S. Łokszin<sup>1)</sup> oraz R. Barbré<sup>2)</sup>. Odnoszą się one do płyt z żebrami podłużnymi, względnie do płyt z żebrami poprzecznymi. Zawiała jednak forma tych warunków, wyrażająca się nader złożonymi równaniami przestępnymi, czyni ich stosowanie przydatne dla przypadku jednego lub najwyżej dwu żeber.

W niniejszej pracy podane zostały w pierwszych trzech ustępach ściśle rozwiązania zagadnienia wyboczenia płyty wzmocnionej żebrami, stanowiące nową metodę rozwiązania układów tego typu.

W ostatnim ustępie pracy podano rozwiązanie przybliżone dla przypadku płyty wzmocnionej gęstożebrowym rusztem. Rozwiązanie to, w połączeniu z metodą podaną w pierwszych trzech ustępach, pozwala na wyznaczenie sił krytycznych dla nowych bardziej złożonych układów płytowych.

---

<sup>1)</sup> Por. [5], str. 225.

<sup>2)</sup> Por. [6], str. 117.

### 1. Płyta wzmocniona żebrami poprzecznymi

Zajmijmy się najpierw płytą wzmocnioną jednym tylko żebrzem poprzecznym (rys. 1).

Dla  $q > q_{kr}$  płyta i żebro doznają wygięcia. Między płytą i żebrzem powstaną siły pionowe — siły wzajemnego oddziaływania — będące funkcją zmiennej  $y$ . Oznaczmy je przez  $r(y)$ . Ugięcia płyty i żebra będą, oczywiście, jednakowe. Zakładamy, że między żebrzem i płytą nie powstaną siły tarcia. Dodatkowo założymy jeszcze, że żebro umieszczone jest symetrycznie względem płyty. Oddzielmy w myśli żebro od płyty. Wtedy płyta znajduje się pod obciążeniem siłami  $q$  jednostajnie rozłożonymi na brzegu oraz pod obciążeniem  $r(y)$  na prostej  $x = \xi$ . Żebro natomiast zginane jest obciążeniem  $-r(y)$ . Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty przyjmuje postać

$$(1.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x, y).$$

Tutaj  $N$  oznacza sztywność płyty na zginanie,  $q$  obciążenie ściskające, jednostajnie rozłożone na brzegach  $x=0$  i  $x=a$ , oraz  $w$  ugięcie płyty.

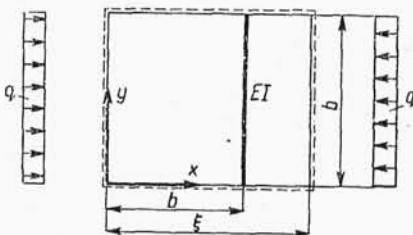
Przy założeniu swobodnego podparcia płyty na wszystkich krawędziach przyjmiemy rozwiązanie równania (1.1) w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego

$$(1.2) \quad w(x, y) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} a_{n,m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y$$

$$\left( \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \beta_m = \frac{m\pi}{b} \right).$$

Obciążenie  $r(y)$  wyrazimy za pomocą pojedynczego szeregu trygonometrycznego

$$(1.3) \quad r(y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} r_m \sin \beta_m y.$$



Rys. 1

Wtedy

$$(1.4) \quad p(x, y) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} p_{n,m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y = \\ = \frac{2}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} r_m \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Wstawiając (1.2) oraz (1.4) do równania (1.1) otrzymamy

$$(1.5) \quad a_{n,m} = \frac{2}{a} \frac{r_m \sin \alpha_n \xi}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q \alpha_n^2}.$$

Ugięcie żebra otrzymamy jako rozwiązanie równania różniczkowego

$$(1.6) \quad EI \frac{d^4 \bar{w}}{dy^4} = -r(y).$$

Przy założeniu swobodnego podparcia żebra przyjmujemy

$$(1.7) \quad \bar{w}(y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} b_m \sin \beta_m y.$$

Korzystając z (1.3) oraz z (1.7) otrzymamy rozwiązanie równania (1.6) w postaci

$$(1.8) \quad \bar{w}(y) = - \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{r_m \sin \beta_m y}{EI \beta_m^4}.$$

Z warunku jednakowych ugięć płyty i żebra w przekroju  $x = \xi$ , tj. z warunku

$$w(\xi, y) = \bar{w}(y)$$

wynika, że dla dowolnego  $y$  powinien zachodzić związek

$$(1.9) \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha_n \xi}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q \alpha_n^2} + \frac{1}{EI \beta_m^4} = 0.$$

Powyższy związek stanowi warunek wyboczenia płyty stężonej żebrami. Dla ustalonych wymiarów płyty i żebra, tzn. ustalonych sztywności zginania płyty i żebra, uzyskamy ze związku (1.9) nie-

skończoną ilość pierwiastków  $q$ ; najmniejszy z nich daje najmniejszą wartość siły krytycznej.

Wprowadzając oznaczenia  $a/b = \varrho$ ,  $EI/bN = \gamma$ ,  $s = q/q_E$ , gdzie  $q_E = N\pi^2/b^2$  oraz zważywszy, że wyboczenie w kierunku osi  $x$  nastąpić może w szeregu półfal, w zależności od parametrów  $\varrho$  i  $\gamma$ , natomiast w kierunku  $y$  tylko w jednej półfali ( $m = 1$ ), napiszemy związek (1.9) w postaci

$$(1.10) \quad 2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{(n^2 + \varrho^2)^2 - n^2 \varrho^2 s} + \frac{1}{\gamma \varrho^3} = 0.$$

Przejdźmy do przypadku  $p$  żeber poprzecznych. Jeżeli przez  $r_i(y)$  oznaczyć funkcję sił wzajemnego oddziaływania  $i$ -tego żebra i płyty wzdłuż prostej  $x = \xi_i$ , to ugięcie płyty wywołane obciążeniem  $q$  oraz obciążeniami  $r_i(y)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) wyrazimy wzorem

$$(1.11) \quad w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{i=1,2,\dots}^{i=p} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{r_m^{(i)} \sin a_n \xi_i \sin a_n x \sin \beta_m y}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - q a_n^2}$$

Ugięcie  $k$ -tego żebra określi związek

$$(1.12) \quad \bar{w}_k(y) = - \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{r_m^{(k)} \sin \beta_m y}{EI_k \beta_m^4}.$$

Z warunku wspólnego ugięcia płyty i żebra w przekroju  $x = \xi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) otrzymamy układ równań

$$(1.13) \quad \frac{r_m^{(k)}}{EI_k \beta_m^4} + \frac{2}{a} \sum_{i=1,2,\dots}^{i=p} r_m^{(i)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_k}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - q a_n^2} = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, p).$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (1.13) daje poszukiwany warunek wyboczenia.

Dla przyjętych uprzednio oznaczeń oraz przy  $m = 1$  otrzymamy

$$(1.14) \quad \frac{r^{(k)}}{\gamma k \varrho^3} + 2 \sum_{i=1,2,\dots}^{i=p} r^{(i)} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_i \sin a_n \xi_k}{(n^2 + \varrho^2)^2 - n^2 \varrho^2 s} = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, p).$$

Rozwiązanie tego układu równań upraszcza w wybitnym stopniu symetria układu względem osi  $x = a/2$ . W tym przypadku jest

dla symetrycznej postaci wyboczenia  $r^{(1)} = r^{(p)}$ ,  $r^{(2)} = r^{(p-1)}$ , ..., a dla antymetrycznej postaci wyboczenia  $r^{(1)} = -r^{(p)}$ ,  $r^{(2)} = -r^{(p-1)}$ , ...

Korzystanie z równań (1.10) i (1.14) objaśnimy dwoma prostymi przykładami.

(a) Niech dana będzie płyta wzmocniona jednym żebrzem poprzecznym w połowie rozpiętości. Zatem przy  $\xi = a/2$  jest  $\sin^2 a_n \xi = 1$  dla  $n = 1, 3, \dots$  oraz  $\sin^2 a_n \xi = 0$  dla  $n = 2, 4, \dots$

Równanie (1.10) napiszemy w postaci

$$(1.15) \quad \frac{1}{\gamma \varrho^3} + 2 \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2)^2 - \varrho^2 n^2 s} = 0.$$

Ustalając stosunek  $\varrho = a/b$  wyznaczyć możemy z równania (1.15) funkcję  $s = s(\gamma)$ .

Wartości  $s$  ograniczone będą od dołu wartością siły krytycznej przy założeniu  $\gamma = 0$ , od góry zaś wartościami  $s$  występującymi przy powstaniu linii węzłowej wzdłuż prostej  $x = a/2$ . I tak, dla  $\varrho = 1$  mamy dla  $\gamma = 0$   $s = 4$ ; przy powstaniu linii węzłowej wzdłuż prostej  $x = a/2$  będzie  $s = (2^2 + 1)^2 / 2^2 = 6,25$ . Odpowiadającą tej wartości  $s = 6,25$  wartość  $\gamma$  wyznaczymy ze wzoru (1.15). Otrzymamy tu  $\gamma = 1,196$ .

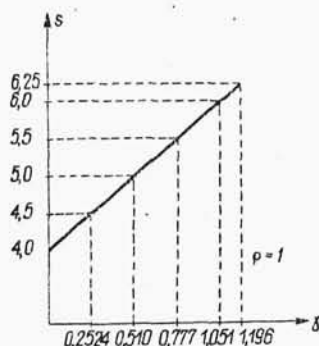
Dla  $\gamma > 1,196$  nie otrzymamy już zwiększenia siły krytycznej układu.

Na rys. 2 podano wykres funkcji  $s = s(\gamma)$  dla  $\varrho = 1$ .

(b) Niech dana będzie płyta wzmocniona dwoma żebrami o jednakowym przekroju i sztywności zginania, położonymi symetrycznie względem prostej  $x = a/2$ . Niech  $\xi_1 = a/3$  oraz  $\xi_2 = 2a/3$ . Rozważyć należy tu dwa przypadki wyboczenia: symetrycznego i antymetrycznego względem prostej  $x = a/2$ .

W pierwszym przypadku, przy  $r^{(1)} = r^{(2)}$ , uzyskamy z układu równań (1.14)

$$(1.16) \quad \frac{1}{\gamma \varrho^3} + 4 \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi}{6}}{(n^2 + \varrho^2)^2 - n^2 \varrho^2 s} = 0.$$

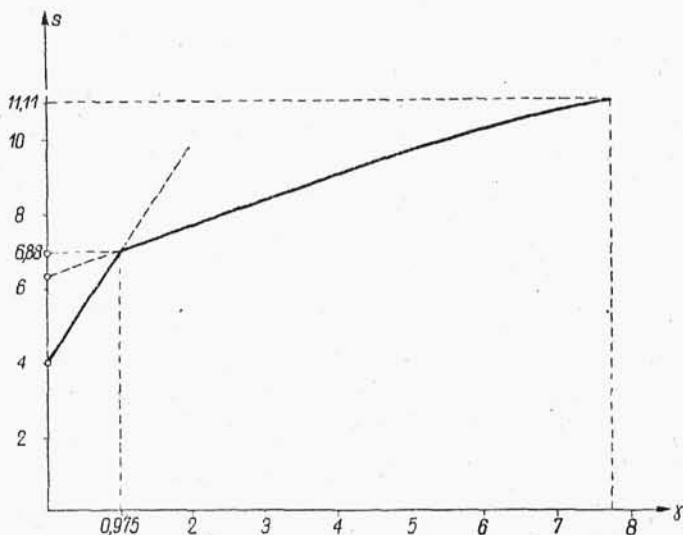


Rys. 2

Dla antymetrycznej postaci wyboczenia  $r^{(1)} = -r^{(2)}$  uzyskamy

$$(1.17) \quad \frac{1}{\gamma \varrho^3} + 4 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}} \sin \frac{n\pi}{3} \sin \frac{n\pi}{6}}{(n^2 + \varrho^2)^2 - n^2 \varrho^2 s} = 0.$$

Na rys. 3 naniesiono funkcję  $s = s(\gamma)$  dla  $\varrho = 1$ . Wykres kończy się na wartości  $\gamma_0$ , przy której otrzymuje się postać wyboczenia o trzech półfalach z zerowymi wartościami ugięcia wzdłuż prostych  $x = a/3$ ,  $x = 2a/3$ .



Rys. 3

Dla trzech i więcej żeber staje się wyznaczenie sił krytycznych na podstawie układu równań (1.14) zadaniem rachunkowo nader uciążliwym, chociaż bez porównania prostszym, niż to ma miejsce w rozwiązaniach podanych przez Ł o k s z i n a i B a r b r é, [6]. Dla trzech i więcej żeber prędzej doprowadzi do celu metoda podana w ustępie czwartym.

Wreszcie zauważmy, że przedstawioną metodę zastosować można również do przypadku dwukierunkowego ściskania płyty.

## 2. Płyta wzmocniona żebrami podłużnymi

Zajmijmy się najprostszym układem tego typu, płytą wzmocnioną tylko jednym żebrzem podłużnym (rys. 4). Oznaczmy przez  $EI$  sztywność żebra na zginanie, przez  $A$  jego przekrój, a przez  $t(x)$

siły wzajemnego oddziaływania żebra i płyty wzdłuż prostej  $y = \eta$ .

Rozwiązaniem równania różniczkowego ugięcia płyty

$$(2.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x, y),$$

zważywszy że

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sin a_n x,$$

będzie następujące wyrażenie:

$$(2.2) \quad w(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1, 2, \dots} \sum_{m=1, 2, \dots} \frac{t_n \sin a_n x \sin \beta_m \eta \sin \beta_m y}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - q a_n^2}.$$

Niech na żebro działa siła skupiona ściskająca  $S$ ; ponadto żebro przyjmuje proporcjonalną do swego przekroju część obciążenia  $q$ . Tak więc równanie ugięcia żebra wyrażone jest wzorem

$$(2.3) \quad E J \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + (S + q A) \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = - \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} t_n \sin a_n x.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$(2.4) \quad \bar{w}(x) = - \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{t_n \sin a_n x}{E J a_n^4 - (S + q A) a_n^2}.$$

Z warunku wspólnego ugięcia żebra i płyty tj. dla  $w(x, \eta) = \bar{w}(x)$  uzyskamy

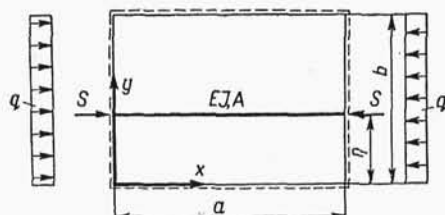
$$(2.5) \quad \frac{1}{E J a_n^4 - (S + q A) a_n^2} + \frac{2}{b} \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 - q a_n^2} = 0.$$

Przy oznaczeniach

$$\frac{a}{b} = \varrho, \quad \frac{E J}{N b} = \chi, \quad s = \frac{q}{q_E}, \quad \frac{A}{b} = \delta, \quad \frac{S b}{N \pi^2} = p,$$

gdzie  $q_E = N \pi^2 / b^2$ , napiszemy związek (2.5) w postaci

$$(2.6) \quad \frac{1}{n^4 \chi - s n^2 \varrho^2 \delta - p n^2 \varrho^2} + 2 \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 - n^2 \varrho^2 s} = 0.$$



Rys. 4



W związku tym mieści się szereg przypadków szczególnych. I tak, dla  $S = 0$  i  $\delta = 0$  mamy przypadek wyboczenia płyty stężonej zębem nie przenoszącym ściskania, dla  $S = 0$  i  $\delta \neq 0$  mamy przypadek wyboczenia płyty z zębem przenoszącym ściskanie, a dla  $q = 0$  i  $S \neq 0$  przypadek wyboczenia zębra stężonego płytą (zadanie A. Sommerfelda, [7]).

Wstawiając do związku (2.6)  $n = 1, 2, \dots$  otrzymamy kolejne postaci wyboczenia układu według jednej, dwu, trzech, ... półfal.

Dla  $r$  zębów podłużnych otrzymamy układ równań

$$(2.7) \quad \frac{t_n^{(k)}}{n^4 \chi_k - s n^2 \varrho^2 \delta_k - p_k n^2 \varrho^2} + 2 \sum_{i=1,2,\dots}^r t_n^{(i)} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_i \sin \beta_m \eta_k}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 - n^2 \varrho^2 s} = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, r).$$

W przypadku symetrii układu względem prostej  $y = b/2$  otrzymujemy znaczne uproszczenia.

Rozpatrzmy kilka przykładów szczególnych.

(a) Płyta wzmocniona jednym zębem leżącym w połowie rozpiętości.

Niech  $q = 0$  i  $\delta = 0$ . Z równania (2.6) uzyskamy

$$(2.8) \quad p = \frac{n^2 \chi}{\varrho^2} + \frac{1}{2 n^2 \varrho^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2}}.$$

Stąd

$$(2.9) \quad S_{kr} = \frac{E J n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{N \pi^2}{2 n^2 a} \frac{1}{\varrho \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2}}.$$

Dla  $EJ = 0$  otrzymujemy wynik zgodny z rozwiązaniem S. Timoszenki<sup>3)</sup> uzyskanym na drodze energetycznej.

W przypadku  $b > a$  wyboczenie płyty nastąpi według jednej półfali ( $n = 1$ ). Zatem

<sup>3)</sup> Por. [8], str. 365.

$$S_{kr} = \frac{N\pi^2}{2a} \frac{1}{\varrho \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(1+\varrho^2 m^2)^2}}.$$

Przy  $b \rightarrow \infty$  i ustalonym  $a$  otrzymamy  $S_{kr} = 4\pi N/a$  zgodnie ze znanym rozwiązaniem A. S o m m e r f e l d a, [7].

(b) Płyta wzmocniona dwoma żebrami o jednakowych sztywnościach zginania i o jednakowym przekroju.

Niech  $\eta_1 = b/3$  i  $\eta_2 = 2b/3$ . Zakładamy, jak uprzednio, że  $q = \delta = 0$ . Z układu równań (2.7) przy symetrycznej postaci wybożenia względem  $y = b/2$ , tj. przy  $t^{(1)} = t^{(2)}$ , uzyskamy

$$(2.10) \quad \frac{1}{n^4 \chi - p n^2 \varrho^2} + 4 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \frac{m\pi}{3} \cos \frac{m\pi}{6}}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2} = 0,$$

skąd

$$(2.10.1) \quad S_{kr} = \frac{EJ n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{N\pi^2}{4n^2 a} \frac{1}{\varrho \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \frac{m\pi}{3} \cos \frac{m\pi}{6}}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2}}.$$

Dla  $\varrho = 1$ , przy  $n = 1$ , otrzymamy

$$S_{kr} = \frac{EJ \pi^2}{a^2} + \frac{N\pi^2}{a} 1,3234.$$

(c) Niech dana będzie płyta wzmocniona jednym żebrzem w przekroju  $y = b/2$ . Niech  $p = 0$ . Z równania (2.6) znajdziemy warunek wyboczenia w postaci

$$(2.11) \quad \frac{1}{n^4 \chi - s n^2 \varrho^2 \delta} + 2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 - n^2 \varrho^2 s} = 0.$$

Dyskusję ograniczymy do płyty kwadratowej ( $\varrho = a/b = 1$ ). Wyboczenie układu nastąpi według jednej półfali ( $n = 1$ ).

Otrzymamy tu

$$(2.12) \quad \chi = s\delta - \frac{1}{2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(1+m^2)^2 - s}}.$$

Na rys. 5 podano wykres  $s = s(\gamma)$  dla szeregu wartości  $\delta$ . Wzór (2.12) nie uwzględnia przypadku wybożenia antymetrycznego płyty względem prostej  $y = b/2$ . W przypadku dwu półfal w tym kierunku mamy

$$s_0 = \frac{1}{\varrho^2} (1 + \varrho^2 m^2)^2,$$

zatem dla

$$m = 2 \text{ i } \varrho = 1 \quad s_0 = 25.$$

Ze związku (2.12) wyznaczyć można dla  $s_0 = 25$  wartość  $\chi$  (przy zadanym  $\delta$ ), przy której wybożenie w kierunku osi  $y$  w dwu półfalach daje mniejszą siłę krytyczną niż wybożenie według jednej półfali w kierunku osi  $x$ .

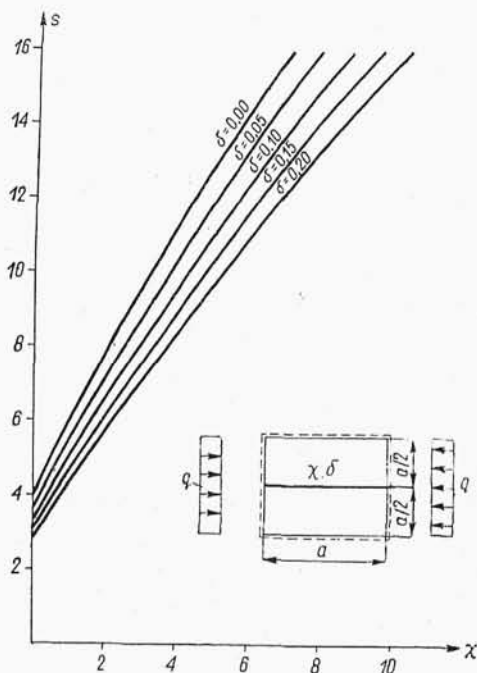
(d) Również znacznie trudniejszą zadanie dotyczące wybożenia płyty wzmocnionej dwoma żebrami, o tej samej sztywności zginania  $EJ$  oraz o tym samym przekroju  $A$ , symetrycznie

umieszczonych względem prostej  $y = b/2$ . Otrzymamy tu z równania (2.7) układ dwu równań o dwu niewiadomych  $t^{(1)}$  i  $t^{(2)}$ . Przyjmijmy, że  $\eta_1 = b/3$  i  $\eta_2 = 2b/3$ . Wtedy dla symetrycznej postaci wybożenia płyty ( $t^{(1)} = t^{(2)}$ ) będzie

$$(2.13) \quad \frac{1}{n^4 \chi - s n^2 \delta} + 4 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \frac{m\pi}{3} \cos \frac{m\pi}{6}}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 - n^2 \varrho^2 s} = 0.$$

Dla antymetrycznej postaci wybożenia ( $t^{(1)} = -t^{(2)}$ ) uzyskamy

$$(2.14) \quad \frac{1}{n^4 \chi - s n^2 \delta} + 4 \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-2}{2}} \sin \frac{m\pi}{3} \cos \frac{m\pi}{6}}{(n^2 + \varrho^2 m^2)^2 - n^2 \varrho^2 s} = 0.$$



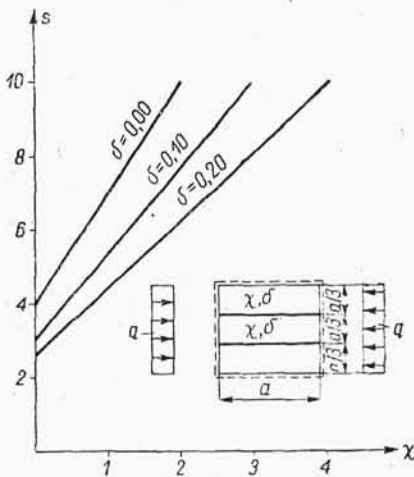
Rys. 5

Na rysunku 6 podano wykresy  $s=s(\gamma, \delta)$  dla przypadku  $\varrho=1$  i  $n=1$ . Ze wzoru (2.14) wyznaczyć można tę wartość  $\gamma_0$ , przy której nastąpi wyboczenie w kierunku osi  $y$  w trzech półfalach, z liniami węzłowymi wzdłuż prostych  $\eta_1=b/3$  i  $\eta_2=2b/3$ . W równaniu (2.14) należy podstawić

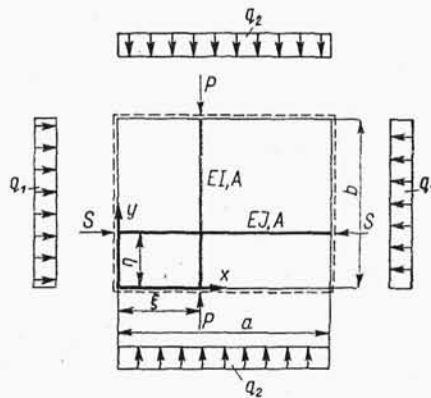
$$s=s_0=9\left[\frac{3\varrho}{m}+\frac{m}{3\varrho}\right]_{\substack{\varrho=1 \\ m=3}}^2=36.$$

Przedstawione przykłady dają dobrą orientację co do przydatności przedstawionego sposobu rozwiązywania zagadnień wyboczenia tego typu.

Metodę powyższą bez trudu da się rozszerzyć na zagadnienia dwukierunkowego ściskania płyty stężonej żebrami.



Rys. 6



Rys. 7

### 3. Płyta wzmocniona żebrami poprzecznymi i podłużnymi

Zajmijmy się płytą wzmocnioną dwoma wzajemnie prostopadłymi do siebie żebrami (rys. 7). Płyta, na obwodzie swobodnie podparta, niech będzie ściskana w dwu kierunkach. Na żebra niech działają, oprócz obciążeń  $q_1$  i  $q_2$ , siły  $S$  i  $P$ . Wzajemne oddziaływanie żebra i płyty wzdłuż prostej  $y=\eta$  oznaczmy przez  $t(x)$ , a wzdłuż prostej  $x=\xi$  przez  $r(y)$ .

Ugięcie płyty przyjmie postać

$$(3.1) \quad w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2)} + \\ + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_n \sin \beta_m \eta \sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2)}.$$

Ugięcie żebra podłużnego wyrazimy wzorem

$$(3.2) \quad \bar{w}(x) = - \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{t_n \sin \alpha_n x}{E J \alpha_n^4 - (S + q_1 A) \alpha_n^2},$$

a ugięcie żebra poprzecznego wzorem

$$(3.3) \quad \bar{\bar{w}}(y) = - \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{r_m \sin \beta_m y}{E I \beta_m^4 - (P + q_2 A) \beta_m^2}.$$

Z warunku wspólnego ugięcia płyty i żebra wzdłuż prostej  $x = \xi$ , tj. z warunku  $w(\xi, y) = \bar{\bar{w}}(y)$ , otrzymamy

$$(3.4) \quad r_m \left[ \frac{1}{E I \beta_m^4 - (P + q_2 A) \beta_m^2} + \frac{2}{a} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha_n \xi}{D_{n, m}} \right] + \\ + \frac{2}{b} \sin \beta_m \eta \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{t_n \sin \alpha_n \xi}{D_{n, m}} = 0,$$

gdzie

$$D_{n, m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^3 - (q_1 \alpha_n^2 + q_2 \beta_m^2).$$

Analogicznie z warunku  $w(x, \eta) = \bar{w}(x)$  uzyskamy

$$(3.5) \quad \frac{2}{a} \sin \alpha_n \xi \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{r_m \sin \beta_m \eta}{D_{n, m}} + t_n \left[ \frac{1}{E J \alpha_n^4 - (S + q_1 A) \alpha_n^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{b} \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{D_{n, m}} \right] = 0.$$

Z przyrównania wyznacznika układu równań (3.4) i (3.5) do zera wyznaczyć można najmniejszą wartość siły krytycznej.

W przypadku  $r$  żeber podłużnych oraz  $p$  żeber poprzecznych uzyskamy układ równań

$$(3.6) \quad \frac{r_m^{(k)}}{EI_k \beta_m^4 - (P_k + q_2 A_k) \beta_m^2} + \frac{2}{a} \sum_{i=1, 2, \dots}^{i=p} r_m^{(i)} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_i \sin \alpha_n \xi_k}{D_{n,m}} +$$

$$+ \frac{2}{b} \sum_{i=1, 2, \dots}^{i=r} \sin \beta_m \eta_i \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{t_n^{(i)} \sin \alpha_n \xi_k}{D_{n,m}} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, p),$$

$$(3.7) \quad \frac{t_n^{(k)}}{EJ_k \alpha_n^4 - (S_k + q_1 A_k) \alpha_n^2} + \frac{2}{b} \sum_{i=1}^{i=r} t_n^{(i)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_i \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{i=p} \sin \alpha_n \xi_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^{(i)} \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (3.7) i (3.8) jest warunkiem wyboczenia płyty. Podany sposób rozwiązania jest rozwiązaniem ścisłym; przydatność jego jest jednak ograniczona trudnościami rachunkowymi, piętrzącymi się w przypadku większej ilości żeber. Dlatego też sposób ten może być stosowany z powodzeniem jedynie dla układów symetrycznych o, co najwyżej, dwu żebrach poprzecznych i podłużnych. W układzie równań (3.7) i (3.8) znajduje się kilka przypadków szczególnych, między innymi przypadki rozpatrywane w dwu uprzednich ustępach pracy.

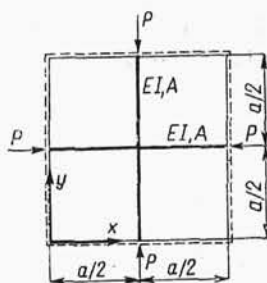
Tok postępowania przy wyznaczaniu siły krytycznej objaśnimy na dwu prostych przykładach.

(a) Niech dana będzie płyta kwadratowa ( $a=b$ ) z dwoma jednakowymi żebrami ( $EJ=EI$  i  $A=A$ ) ściskany siłą  $S=P$ . Ponadto niech  $q_1=q_2=0$ . W tym szczególnym przypadku oddziaływania wzdłuż prostych  $x=a/2$  i  $y=b/2$  są jednakowe.

Otrzymamy układ równań

$$(3.8) \quad r_m \left[ \frac{1}{EI \beta_m^4 - P \beta_m^2} + \frac{2}{a} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} \right] +$$

$$+ \frac{2}{a} \sin \frac{m\pi}{2} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{r_n \sin \frac{n\pi}{2}}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} = 0.$$



Rys. 8

Przyjmijmy  $m = 1$ , a z drugiego szeregu uwzględnijmy tylko pierwszy człon. Równanie (3.9) doprowadzimy do postaci

$$r_1 \left[ \frac{1}{EI\beta_1^4 - P\beta_1^2} + \frac{2}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{N(\alpha_n^2 + \beta_1^2)^2} + \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{N(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} \right] = 0.$$

Zważywszy że  $\beta_1 = \alpha_1 = \pi/a$  i  $\alpha_n/\beta_n = n$ , otrzymamy po prostych przeliczeniach, że

$$P_{kr} = \frac{EI\pi^2}{a^2} + \frac{N\pi^2}{a} 0,9766.$$

(b) Przyjmijmy teraz kolejno  $m = 1, 2, 3$ , a z drugiego szeregu wzoru (3.9) uwzględnijmy trzy człony. Otrzymamy układ trzech równań:

$$(3.10.1) \quad r_1 \left[ \frac{1}{EI\beta_1^4 - P\beta_1^2} + \frac{2}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{N(\alpha_n^2 + \beta_1^2)^2} + \frac{2}{a} \frac{1}{N(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} \right] - r_3 \frac{2}{aN(\alpha_3^2 + \beta_1^2)^2} = 0,$$

$$(3.10.2) \quad r_2 \left[ \frac{1}{EI\beta_2^4 - P\beta_2^2} + \frac{2}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{N(\alpha_n^2 + \beta_2^2)^2} \right] = 0,$$

$$(3.10.3) \quad -r_1 \frac{2}{aN(\alpha_1^2 + \beta_3^2)^2} + r_3 \left[ \frac{1}{EI\beta_3^4 - P\beta_3^2} + \frac{2}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{N(\alpha_n^2 + \beta_3^2)^2} + \frac{2}{a} \frac{1}{N(\alpha_3^2 + \beta_3^2)^2} \right] = 0.$$

Drugie równanie powyższego układu odpada. Odpowiada ono wyboczeniu płyty według dwu półfal z linią węzłową na linii żebra AB. Przyrównanie do zera wyznacznika równań (3.10.1) i (3.10.2) daje

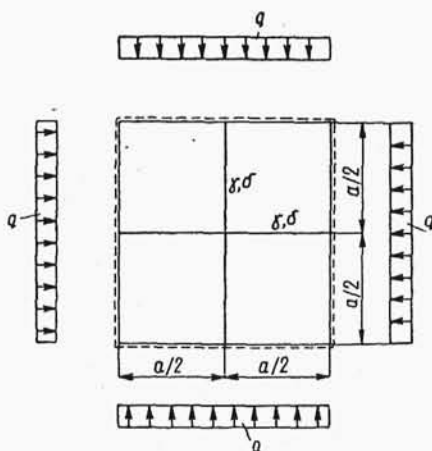
$$P_{kr} = \frac{EJ\pi^2}{a^2} + \frac{N\pi^2}{a} 0,953.$$

Jak widzimy, różnica między pierwszym a drugim przybliżeniem jest nieznaczna.

Dla dwu żeber poprzecznych i podłużnych o tej samej sztywności zginania i o tym samym przekroju uzyskamy znaczne uproszczenie równań (3.4) i (3.5). Wynika to stąd, że funkcje reprezentujące siły wzajemnego oddziaływania żebra na płytę są identyczne wobec symetrii układu względem dwu osi symetrii. Poprzestając na pierwszych członach (dla  $i = 1, i = 2$ ) drugiego podwójnego szeregu równania (3.7) uzyskano

$$P = \frac{EJ\pi^2}{a^3} + \frac{N\pi^2}{a} 0,665.$$

(c) Niech dana będzie płyta kwadratowa ( $a=b$ ) z dwoma jednakowymi żebrami ( $EJ=EI$  i  $A=\Lambda$ ), ściskana siłami  $q_1 = -q_2 = q$ . Ponadto niech  $S=P=0$ . Również w tym szczególnym przypadku oddziaływania wzdłuż prostych  $x=a/2$  i  $y=b/2$  będą identyczne. Otrzymamy układ równań



Rys. 9

$$(3.10) \quad r_m \left[ \frac{1}{EI\beta_m^4 - qA\beta_m^2} + \frac{2}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q(\alpha_n^2 + \beta_m^2)} \right] + \\ + \frac{2}{a} \sin \frac{m\pi}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{r_n \sin \frac{n\pi}{a}}{N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - q(\alpha_n^2 + \beta_m^2)} = 0.$$

Przyjmijmy  $m=1$ , a w drugim szeregu uwzględnijmy tylko pierwszy człon. Doprowadzi to nas po prostych przekształceniach do związku

$$(3.11) \quad \frac{1}{\gamma - s\delta} + \frac{1}{2-s} + 2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2 - (1+n^2)s} = 0,$$

gdzie

$$\gamma = \frac{EI}{aN}, \quad s = \frac{qa^2}{N\pi^2}, \quad \delta = \frac{A}{a}.$$



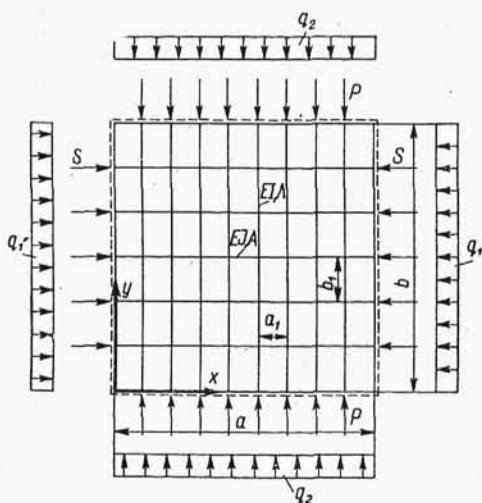
$$(3.12) \quad \text{Dla} \quad \begin{cases} \gamma = 0, & \delta = 0 & \text{otrzymamy} & S_{kr} = 2, \\ \gamma = 1,0, & \delta = 0 & \text{otrzymamy} & S_{kr} = 3,926, \\ \gamma = 1,0, & \delta = 0,2 & \text{otrzymamy} & S_{kr} = 2,850. \end{cases}$$

#### 4. Wyboczenie płyty wzmocnionej gęstą siatką żebier

W wielu zagadnieniach konstrukcyjnych wzmacniamy płytę rusztem z żebier w celu podwyższenia siły krytycznej. Wyznaczenie siły krytycznej następuje dla takich złożonych układów przy użyciu metody energetycznej. Rozwiązania wymagają jednak licznych żmudnych rachunków, przy czym w miarę powiększania liczby żebier rosną trudności rachunkowe. Podamy tu prosty sposób wyznaczania sił krytycznych oparty na modelu płyty ortotropowej o zerowej sztywności skręcania. Sposób ten znamieny jest

tym, że w miarę zwiększania liczby żebier poprzecznych i podłużnych dokładność wyników będzie wzrastać.

Niech dana będzie płyta prostokątna wzmocniona rusztem żebrowym. Żebra podłużne, o sztywności na zginanie  $EJ$  i przekroju  $A$ , rozmieszczone są w jednakowych odległościach  $b_1$ ; żebra poprzeczne, o sztywności na zginanie  $EI$  i przekroju  $\Lambda$ , rozmieszczone są w jednakowych odstępach  $a_1$ . Żebra podłużne ściskane są siłami  $Aq_1$  oraz  $S$ , żebra poprzeczne siłami  $Aq_2$  oraz  $P$ .



Rys. 10

Z rozważań nad statecznością rusztów, [9], wynika, że dla rusztów gęstożebrowych zastąpić można ich działanie modelem płyty ortotropowej o zerowej sztywności skręcania. Sposób powyższy zastosujemy również teraz. Równanie ugięcia rusztu przyjmie w naszym przypadku postać

$$(4.1) \quad \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} + \left( \frac{S}{b_1} + \frac{q_1 A}{b_1} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \left( \frac{P}{a_1} + \frac{q_2 \Lambda}{a_1} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} = \bar{r}(x, y).$$

Równanie różniczkowe ugięcia płyty ma postać

$$(4.2) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w + q_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = r(x, y).$$

Zakładamy równość ugięcia płyty i rusztu oraz równość sił wzajemnego oddziaływania płyty na ruszt w każdym punkcie  $(x, y)$  rozpatrywanego obszaru prostokątnego. Zatem zakładamy, że

$$(4.3) \quad w(x, y) = \bar{w}(x, y), \quad r(x, y) = -\bar{r}(x, y).$$

Warunki te prowadzą do równania różniczkowego

$$(4.4) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left( \frac{S}{b_1} + \frac{q_1 A}{b_1} + q_1 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left( \frac{P}{a_1} + \frac{q_2 A}{a_1} + q_2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Powyższe równanie różniczkowe zawiera szereg przypadków szczególnych.

Zajmijmy się przede wszystkim przypadkiem płyty wzmocnionej żebrami, na brzegach swych swobodnie podpartej.

Rozwiązaniem równania (4.4) będzie

$$(4.5) \quad w(x, y) = A_{n,m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Wstawiając (4.5) do równania (4.4) otrzymamy

$$(4.6) \quad N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{EJ}{b_1} \alpha_n^4 + \frac{EI}{a_1} \beta_m^4 = \left( \frac{S}{b_1} + \frac{q_1 A}{b_1} + q_1 \right) \alpha_n^2 + \left( \frac{P}{a_1} + \frac{q_2 A}{a_1} + q_2 \right) \beta_m^2.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\frac{EJ}{Nb} = \lambda, \quad \frac{EI}{Na} = \gamma, \quad \frac{A}{b} = \delta_1, \quad \frac{A}{a} = \delta_2, \quad q = \frac{a}{b},$$

$$a_1 = \frac{a}{1+p}, \quad b_1 = \frac{b}{1+r}, \quad k = \frac{N\pi^2}{b^2},$$

gdzie  $r$  oznacza liczbę żeber podłużnych, a  $p$  liczbę żeber poprzecznych. Równanie (4.6) przyjmie przy tych oznaczeniach następującą postać:

$$(4.7) \quad k[(n^2 + m^2 \varrho^2)^2 + \chi(1+r)n^4 + \gamma(1+p)m^4 \varrho^3] = \\ = q_1 \left[ 1 + (1+r) \left( \delta_1 + \frac{S}{q_1 b} \right) \right] n^2 \varrho^2 + q_2 \left[ 1 + (1+p) \left( \delta_2 + \frac{P}{a q_2} \right) \right] m^2 \varrho^4.$$

Rozważmy przypadki szczególne.

(a) Niech ruszt składa się jedynie z żeber poprzecznych. Założmy dalej, że  $q_2 = 0$  i  $P = 0$ .

Z równania (4.7) otrzymamy

$$q_{1,kr} = k \frac{(n^2 + m^2 \varrho^2)^2 + \gamma(1+p)m^4 \varrho^3}{n^2 \varrho^2}.$$

Ponieważ wyboczenie w kierunku osi  $y$  nastąpi tylko w jednej półfali ( $m = 1$ ), więc otrzymamy

$$(4.8) \quad q_{1,kr} = \frac{N \pi^2}{b^2} \frac{(n^2 + \varrho^2)^2 + \gamma(1+p)\varrho^3}{n^2 \varrho^2}.$$

Identyczny wzór otrzymał S. Timoszenko<sup>4)</sup> przy użyciu metody energetycznej, przyjmując powierzchnię ugięcia w postaci  $w = a_{n,m} \sin \alpha_n x \sin (\pi y/b)$ . Dla  $p = 1$  wzór (4.8) identyczny będzie ze wzorem (1.15), jeśli w tym ostatnim ograniczymy się tylko do pierwszego członu szeregu nieskończonego; to samo dotyczy wzorów (1.16) i (1.17) dla  $p = 2$ . Dla skrajnego przypadku jednego tylko żeber poprzecznego, przy  $n = 1$ , mamy

$$(4.9) \quad q_{1,kr} = \frac{N \pi^2}{b^2} \frac{(1 + \varrho^2)^2 + 2\gamma \varrho^3}{\varrho^2}.$$

Tablica 1.  $\varrho = 1$ ,  $n = 1$ ,  $s = q_{kr} \frac{b^2}{N \pi^2}$

$s$	4,0	4,5	5,0	6,0	6,25	
$\gamma$	0	0,2524	0,510	1,051	1,196	wzór (1.15)
$\gamma$	0	0,2500	0,500	1,000	1,125	wzór (4.9)

W tablicy 1 zestawiono wyniki uzyskane na drodze ścisłej [wzór (1.15)] z wartościami uzyskanymi ze wzoru (4.9); w tablicy 2 zestawiono odpowiednie rezultaty dla przypadku dwu żeber poprzecznych.

<sup>4)</sup> Por. [8], str. 378.

Uderza tu duża zgodność wyników dla  $s < 7,0$ . Jest rzeczą oczywistą, że w miarę wzrostu liczby żeber przybliżenie uzyskane za pomocą wzoru (4.8) jest coraz lepsze.

Tablica 2.  $\varrho = 1, \quad p = 2 \quad s = q_{kr} \frac{b^2}{N n^2}$

$s$	4,0	4,5	6,0	7,0	9,0	11,0	
$\gamma$	0	0,3341	0,6698	1,018	3,981	7,667	wzór (1.16)
$\gamma$	0	0,3333	0,6667	1,000	3,666	6,333	wzór (4.8),

(b) Niech ruszt składa się jedynie z żeber podłużnych. Załóżmy, że  $q_1 = q_2 = 0, P = 0$ .

Równanie (4.7) daje

$$(4.10) \quad S_{kr} = k b \frac{(n^2 + m^2 \varrho^2)^2 + \chi(1+r)n^4}{n^2 \varrho^2}.$$

W tym przypadku najmniejszą wartość siły  $S$  otrzymamy przy wyboczeniu według jednej półfali w kierunku osi  $y$  ( $m = 1$ ). Tak więc

$$(4.10.1) \quad S_{kr} = \frac{N \pi^2}{b} \frac{(n^2 + \varrho^2)^2 + (1+r)\chi n^4}{n^2 \varrho^2 (1+r)}.$$

Już dla skrajnego przypadku jednego tylko żebra otrzymamy dość dobre przybliżenie. Na przykład, dla  $\varrho = 1$  i  $n = 1$

$$S_{kr} = \frac{E J \pi^2}{a^3} + \frac{4 N \pi}{a} 1,571,$$

zamiast ścisłego

$$S_{kr} = \frac{E J \pi^2}{a^3} + \frac{4 N \pi}{a} 1,49,$$

a więc błąd zawarty w drugim członie jest równy 70%.

Dla dwu żeber

$$S_{kr} = \frac{N \pi^2}{3 b} \frac{(n^2 + \varrho^2)^2 + 3 \chi n^4}{n^2 \varrho^2}.$$

Dla  $\varrho = 1$  i  $n = 1$  otrzymamy

$$S_{kr} = \frac{E J \pi^2}{a^3} + \frac{4 N \pi}{a} 1,047,$$

podczas gdy rozwiązanie ścisłe [wzór (2.10.1)] daje

$$S_{kr} = \frac{E J \pi^2}{a^3} + \frac{4 N \pi}{a} 1,039.$$

(c) Niech ruszt składa się z  $r$  żeber podłużnych. Załóżmy, że  $q_2 = P = S = \gamma = 0$ .

Wtedy

$$(4.11) \quad q_{1,kr} = \frac{N \pi^2 (n^2 + m^2 \varrho^2)^2 + \chi (1+r) n^4}{b^2 [1 + (1+r) \delta_1] n^2 \varrho^2}.$$

Już dla skrajnego przypadku, jednego tylko żebra podłużnego ( $r = 1$ ), rozwiązanie daje dla  $\varrho \leq 2$  dostatecznie dokładne wyniki; przybliżenie będzie tym lepsze, im więcej będzie żeber poprzecznych.

W tablicy 3 podajemy wyniki porównawcze  $q_{1,kr}$  dla rozmaitych wartości  $\gamma$  i  $\delta$ , przy  $n = 1$  i  $\varrho = 1$ , wyznaczone ze wzoru (4.11) i z rozwiązania ścisłego (2.13).

Tablica 3.  $\delta = 0$ ,  $\varrho = 1$ ,  $n = 1$ ,  $s = q_{kr} \frac{b^2}{N \pi^2}$

$s$	4,0	5,0	6,0	8,0	10,0	
$\chi$	0	1/3	2/3	4/3	2,000	wzór (4.11)
$\chi$	0	0,334	0,6692	1,343	2,023	wzór (2.13)

(d) Niech ruszt składa się z  $r$  żeber podłużnych i  $p$  żeber poprzecznych. Dalej niech  $q_1 = q_2 = 0$ .

Wtedy

$$(4.12) \quad (1+r) \frac{S}{b} n^2 \varrho^2 + (1+p) \frac{P}{a} m^2 \varrho^4 = \\ = k [(n^2 + m^2 \varrho^2)^2 + \chi (1+r) n^4 + \gamma (1+p) m^4 \varrho^3].$$

Rozważmy przypadek szczególny  $S = P$ ,  $\chi = \gamma$ ,  $a = b$  oraz  $p = r = 1$ . Najmniejszą wartość siły krytycznej uzyskamy dla  $n = m = 1$ :

$$P_{kr} = \frac{E J \pi^2}{a^2} + \frac{N \pi^2}{a} 1,00,$$

zamiast rozwiązania ścisłego

$$P_{kr} = \frac{E J \pi^2}{a^2} + \frac{N \pi^2}{a} 0,953.$$

Dla dwu żeber podłużnych i dwu poprzecznych, dzielących płytę na dziewięć kwadratów, uzyskamy z równania (4.12)

$$P_{kr} = \frac{E J \pi^2}{a^2} + \frac{N \pi^2}{a} 0,6667.$$

W p. 3 jako pierwsze przybliżenie uzyskano

$$P_{kr} = \frac{EJ\pi^2}{a^2} + \frac{N\pi^2}{a} 0,665.$$

(e) Rozważmy wreszcie przypadek rusztu, w którym  $q_1 = q_2 = q$  oraz  $S = P = 0$ . Wtedy z równania (4.7) otrzymamy

$$(4.13) \quad q_{kr} = k \frac{(n^2 + m^2 \varrho^2)^2 + (1+r)\chi n^4 + (1+p)\gamma m^4 \varrho^4}{[1 + (1+r)\delta_1] n^2 \varrho^2 + [1 + (1+p)\delta_2] m^2 \varrho^4}.$$

W przypadku szczególnym,  $\varrho = 1$ ,  $\gamma = \chi$  i  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , znajdziemy dla  $n = m = 1$

$$(4.13.1) \quad q_{kr} = \frac{N\pi^2}{a^2} \frac{4 + (2+r+p)\gamma}{2 + (2+r+p)\delta}.$$

Załóżmy, że  $r = p = 1$ . Dla  $\gamma = 0$  i  $\delta = 0$  uzyskamy  $s_{kr} = 2,0$ ; dla  $\gamma = 1,0$  i  $\delta = 0$  mamy  $s_{kr} = 4,0$ ; wreszcie dla  $\gamma = 1,0$  i  $\delta = 0,2$  otrzymamy  $s_{kr} = 2,86$ . Wyniki te są bardzo bliskie wyników uzyskanych na podstawie wzoru (3.11).

Dotychczas zajmowaliśmy się płytą na wszystkich krawędziach swobodnie podpartą. Równanie różniczkowe (4.4) można jednak rozwiązać bez większego trudu dla przypadku, w którym dwa przeciwległe brzegi płyty są swobodnie podparte, a dwa pozostałe posiadają dowolne warunki brzegowe. Niech płyta będzie swobodnie podparta na brzegach  $x = 0$  i  $x = a$ . Przyjmiemy rozwiązanie równania różniczkowego (4.4) w postaci  $w = Y_n(y) \sin a_n x$ .

Doprowadzamy w ten sposób równanie cząstkowe do równania zwyczajnego

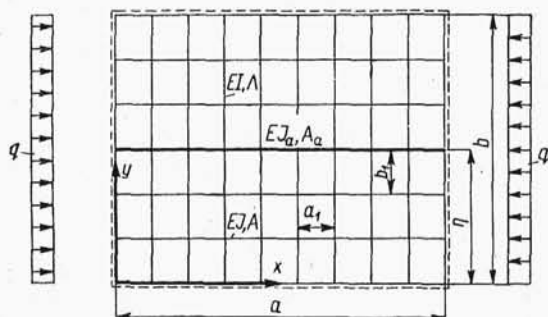
$$(4.14) \quad [1 + (1+r)\chi] Y_n^{IV} - \left\{ 2a_n^2 - \frac{q_2}{N} \left[ 1 + (1+p) \left( \delta_1 + \frac{S}{q_2 a} \right) \right] \right\} Y_n'' + \\ + \left\{ [1 + (1+p)\gamma] a_n^2 - \frac{q_1}{N} \left[ 1 + (1+r) \left( \delta_1 + \frac{S}{q_1 b} \right) \right] \right\} Y_n = 0.$$

Rozwiązanie ogólne tego równania zawiera cztery stałe całkowania. Uwzględniając cztery warunki brzegowe, po dwa na brzegu  $y = 0$  i na brzegu  $y = b$ , uzyskamy układ czterech równań jednorodnych. Przyrównanie wyznacznika układu równań do zera daje równanie przestępne, którego najmniejszy pierwiastek określa siłę krytyczną.

Nie rozwijamy w tym miejscu tego zagadnienia szerzej; dodamy jednak, że metody postępowania są tutaj analogiczne do metod postępowania w klasycznych rozwiązaniach zagadnień płyt niestężonych żebrowymi. Również nie będziemy rozwijali zagadnień przybliżonego rozwiązywania równania (4.4) za pomocą metody ortogonalizacyjnej B. G. G a l e r k i n a, [10], pozwalającej na uwzględnienie dowolnych warunków na wszystkich brzegach płyty.

5. Podane w poprzednim ustępie rozwiązania przybliżone mogą być przydatne do rozwiązania dalszych, bardziej złożonych przypadków. Zajmiemy się krótko dla przykładu dwoma takimi przypadkami.

(a) Niech będzie dana płyta dokoła swobodnie podparta, wzmocniona gęstym rusztem żebrowym. Ponadto wzdłuż prostej  $y = \eta$  ruszt wzmocniony został żebrem podłużnym silniejszym, o sztywności zginania  $EJ_a$  i przekroju  $A_a$  (rys. 11).



Rys. 11

Do rozwiązania tego zagadnienia zastosujemy metodę przedstawioną w p. 2.

Przyrównamy, mianowicie, do siebie ugięcia oraz wzajemne oddziaływania płyty wzmocnionej rusztem gęstożebrowym i żebrem  $(EJ_a, A_a)$  w przekroju  $y = \eta$ .

Rozwiązaniem równania różniczkowego płyty wzmocnionej rusztem, tzn. równania

$$(5.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q \left( 1 + \frac{A}{b_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x, y),$$

gdzie

$$p(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} t_n \sin \alpha_n x \sin \beta_m \eta \sin \beta_m y,$$

jest

$$(5.2) \quad w(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_n \sin a_n x \sin \beta_m y \sin \beta_m y}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{EJ}{b_1} a_n^4 + \frac{EI}{a_1} \beta_m^4 - \left(1 + \frac{A}{b_1}\right) q a_n^2}.$$

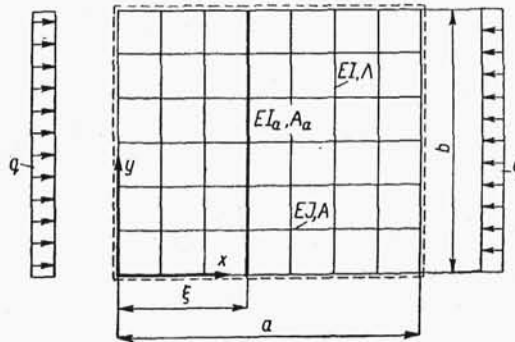
Równanie różniczkowe żebra o sztywności  $EJ_a$  napiszemy w postaci

$$(5.3) \quad EJ_a \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + q A_a \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sin a_n x.$$

Z warunku  $w(x, \eta) = \bar{w}(x)$  uzyskamy warunek wybożenia układu

$$(5.4) \quad \frac{1}{EJ_a a_n^4 - q A_a a_n^2} + \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{EJ}{b_1} a_n^4 + \frac{EI}{a_1} \beta_m^4 - \left(1 + \frac{A}{b_1}\right) q a_n^2} = 0.$$

Rozwiązanie to zawiera szereg przypadków szczególnych. Tak więc, przyjęcie  $EI = 0$  ogranicza nas do płyty wzmocnionej jedynie żebrami podłużnymi i żebrem o sztywności  $EJ_a$ . Możliwy jest również przypadek  $EJ = 0$  i  $A = 0$ . Wreszcie przypadek  $EJ = 0$ ,  $A = 0$  i  $EI = 0$  sprowadza nas do przykładu rozpatrywanego w p. 2.



Rys. 12

b) Postępując analogicznie, jak w ustępie pierwszym, otrzymamy dla naszkicowanego na rys. 12 układu następujący warunek wybożenia:

$$\frac{1}{EI_a \beta_m^4} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{EJ}{b_1} a_n^4 + \frac{EI}{a_1} \beta_m^4 - q \left(1 + \frac{A}{b_1}\right) a_n^2} = 0.$$



Приклады подобного типа можна бы мноżyć; з przedstawionych tutaj wynika, że powiązanie rozwiązań ścisłych według p. 1 i 3 z przybliżoną metodą, podaną w p. 4, przyczynić się może do rozwiązania nader złożonych zagadnień stateczności płyt wzmocnionych żebrami, bez uciekania się do żmudnych i wymagających dużej pracy rachunkowej metod energetycznych.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] S. T i m o s z e n k o, *Ob ustojczivosti plastinok podkrieplennykh žestkimi riebrami*, 1914.
- [2] E. C h w a l l a, *Stahlbau*, 9, 161, 1936.
- [3] C. T o r r e, *Zur Beulung versteifter Rechteckplatten bei veränderlicher Randbelastung*, *Österr. Ing.-Archiv*, t. 1, 3, 1946.
- [4] A. S t r a s s e r, *Zur Beulung versteifter Platten*, *Österr. Ing.-Archiv.*, t. 7, 3, (1953).
- [5] A. S. Ł o k s z i n, *Prikl. Mat. i Miech.*, 1935.
- [6] R. B a r b r é, *Stabilität gleichmässig gedruckter Rechteckplatten mit Längs-order Quersteifen*, *Ing.-Archiv*, t. 8, 1937.
- [7] A. S o m m e r f e l d, *Zeitschr. Math. Physik*, t. 54, 1906.
- [8] S. T i m o s c h e n k o, *Theory of Elastic Stability*, 1936.
- [9] W. N o w a c k i, *Z zagadnień teorii rusztów płaskich*, *Arch. Mech. Stos.*, t. 6, 1, (1954).
- [10] B. G. G a l e r k i n, *Stierżni i plastinki*, *Wiestnik Inż.*, 1915.

#### Резюме

#### УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

В первой части настоящей работы приводится точное решение вопроса устойчивости пластинки с поперечными ребрами жесткости. Исходя из дифференциального уравнения пластинки, сжимаемой и нагруженной вдоль прямой  $x = \xi$  вертикальной нагрузкой  $r(y)$ , при учёте линии прогиба ребра, нагруженного силами, интенсивность которых составляет —  $r(y)$ , автор, из условия равенства прогиба пластинки и ребра, выводит условие продольного изгиба пластинки в виде реляции (1.9) или (1.10). Для р поперечных ребер приведена система уравнений (1.14). Приравнение нулю определителя этой системы уравнений является требуемым условием продольного изгиба пластинки с ребрами жесткости. Значительным упрощением вопроса является симметрия системы. Полученные результаты сравнены с результатами дру-

гих авторов (Тимошенко, Локшин, Барбрэ), полученными ими иным путём.

Во втором разделе, поступая аналогично, получены условия продольного изгиба для пластинки с продольными ребрами жесткости. В третьем разделе вопрос устойчивости обобщен по отношению к пластинкам, усиленным поперечными и продольными ребрами жесткости. Однако решения, приведенные в первых трех разделах, ввиду значительной трудности расчета ограничены только двумя ребрами в каждом направлении.

В четвертом разделе представлено приближенное решение для пластинки с густой сетью ребер жесткости. Система перекрещивающихся ребер замещается затем моделью ортотропной пластины, с нулевым значением жесткости кручения. Из условия равенства взаимного воздействия  $p(x, y)$  пластинки на сеть ребер, а также из равенства прогибов обеих систем, получается дифференциальное уравнение проблемы (4.4). Для случая свободного подпора пластинки, из уравнения (4.4) получается условие продольного изгиба системы, (4.7). Далее рассматривается ряд частных случаев, получая при этом подтверждение уже известных результатов, а также и новые результаты.

Наконец, в последнем разделе использовано модель ортотропной пластинки, в сочетании с методом, представленным в первой части работы, для определения критических сил для новых, более сложных, систем пластинок с ребрами жесткости.

#### S u m m a r y

#### STABILITY OF RECTANGULAR PLATES REINFORCED WITH STIFFENING RIBS

The first part of the paper brings an exact solution of the problem of stability of a plate with transversal stiffening ribs. Starting from the differential equation for a plate subjected to compression, and loaded by a vertical load  $r(y)$  along the line  $x = \xi$ , and from the deflection line of the rib, loaded by forces of intensity  $-r(y)$ , the author obtains considering the condition of equality of deflection of both elements, the condition of buckling in the form (1.9) or (1.10). For  $p$  transversal stiffening ribs we have the system of equations (1.14). When the determinant of that system is equal to zero, then the desired condition of buckling of a plate with stiffening ribs

is achieved. A considerable simplification of the problem is obtained due to the symmetry of the structure. The results are compared with those of other authors (Timoshenko, Lokshin, Barbré) obtained by other means.

In Sect. 2 an analogous procedure permits to express the buckling conditions for a plate reinforced by longitudinal stiffening ribs. Sect. 3 brings a generalization of the buckling problem to a plate with transversal and longitudinal stiffening ribs. In view of considerable difficulties of calculation solutions are given only for two ribs in each direction.

In Sect. 4 an approximate solution in the case of a plate with a dense network of stiffening ribs is given. The system of crossed ribs is replaced by an orthotropic model, whose torsional rigidity is equal to zero. From the condition of equality of mutual reaction of forces  $p(x, y)$  exerted by the plate on the network of stiffening ribs, and from the condition equality of the deflections of both systems we obtain the differential equation (4.4)

From Eq. (4.4) the buckling condition (4.7) of a simply supported plate is obtained. Certain particular cases are considered, which confirm some well-known facts and which bring some new results.

In the last section an orthotropic model is considered together with the method presented in the first part of the paper, in order to determine the critical forces for more complicated plate systems with stiffening ribs.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 marca 1954 r.*

---