

W. NOWACKI

**Z zastosowań rachunku różnic skończonych
w mechanice budowli**

**De l'application du calcul des différences finies aux problèmes
de la mécanique de construction**

Odbitka z „Archiwum
Mechaniki Stosowanej“
Tom III zeszyt 3—4

WYDAWNICTWO
ZAKŁADU MECHANIKI BUDOWLI POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
GDAŃSK 1951

Z zastosowań rachunku różnic skończonych w mechanice budowli

De l'application du calcul des differences finies aux problèmes de la mécanique de construction

W. Nowacki, Gdańsk

A) W wielu zagadnieniach mechaniki budowli, dających się opisać równaniem różniczkowym, natrafiamy na poważne trudności przy całkowaniu tego równania.

Na ogół mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi jednorodnymi (np. zagadnienia wyboczenia i drgania) oraz niejednorodnymi (np. zginanie i drganie wymuszone).

W wypadku stałych współczynników tych równań i jednorodnych warunków brzegowych uzyskać możemy na ogół wzory zamknięte.

Już jednak w tak prostym wypadku, jakim jest zginanie pręta o zmiennym przekroju, otrzymujemy równanie różniczkowe o zmiennych współczynnikach; ścisłe rozwiązanie tego równania uzyskać można tylko w nielicznych wypadkach zmienności pręta.

Te trudności omijamy na rozmaitych drogach, uzyskując rozwiązanie przybliżone metodą numerycznego czy wykreślnego rozwiązywania równań różniczkowych, czy też stosując metody rachunku wariacyjnego (metoda Ritz'a, Galerkina, Treftza).

Spośród licznych metod rozwiązania, prostotą i dużą zdolnością przystosowania do zmienności rozmaitych czynników (zmiana przekroju, masy, obciążenia) wyróżnia się metoda rachunku różnic skończonych.

Zastosowanie jej do statyki belki prostej jest ogólnie znane choć w odmiennej trochę postaci, jako zagadnienie wieloboku

sznurowego. Do problemów wyboczenia i zwichrzenia prętów dostosował metodę różnic skończonych H. Hencky, do teorii płyt N. J. Nielsen i H. Marcus.*)

W naszym kraju metoda ta znajduje coraz szersze zastosowanie, głównie dzięki pracom prof. dr W. Wierzbickiego i jego uczniów.

W niniejszej pracy autor stawia sobie za zadanie przedstawić w sposób jednolity i usystematyzowany rozwiązania szeregu zagadnień typowych dla mechaniki budowli, oraz wskazać na analogię między rozwiązaniem równań różnicowych, a teorią równań całkowych.

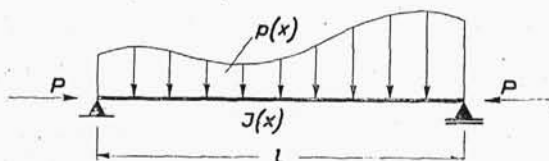
We wszystkich omawianych zagadnieniach, tak liniowych jak i płaskich, starał się autor uzyskać rozwiązanie na najprostszej drodze, przy pomocy macierzy sprzężonej trójczołowego względnie pięcioczołowego układu równań.

Przedstawione w tej pracy zagadnienia nie wyczerpują, rzecz jasna, wszelkich możliwości; omówiono jedynie zagadnienia, znajdujące najszersze zastosowanie w mechanice budowli.

B) Jednoczesne zginanie i ściskanie (względnie zginanie i rozciąganie pręta)

1. Omówmy najpierw wypadek najprostszy, mianowicie pręt na dwu podporach swobodnie podparty. Obciążenie $p(x)$ oraz moment bezwładności $J(x)$ niech będzie zmienny w sposób ciągły lub nieciągły (skokami). Znane równanie różniczkowe tego zagadnienia brzmi

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \pm P \frac{d^2 y}{dx^2} = q(x) \dots \quad (1)$$



Rys. 1

*) H. Hencky: Ueber die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raum. Der Eisenbau 1920.

H. Marcus: Die Theorie elastischer Gewebe. Berlin 1924.

N. J. Nielsen: Bestemmelse af Spøendinger i Plader ved Anvendelse af Differensligninger, Kopenhaga 1920.

W. Wierzbicki: Arithmètisation des problèmes de flambage. Arch. Mech. Stos. 1949.

W równaniu tym znak „plus” przy wielkości P odnosi się do siły ściskającej, znak „minus” do rozciągającej siły P .

Wprowadźmy oznaczenia $x = l \cdot \xi$; $\frac{J_0}{J(x)} = \eta(\xi)$, gdzie J_0 jest porównawczym momentem bezwładności.

Przy tych oznaczeniach doprowadzamy równanie (1) do postaci bezwymiarowej.

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\eta(\xi)} \frac{d^2 y}{d\xi^2} \right) \pm \frac{Pl^2}{EJ_0} \frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{l^4}{EJ_0} q(\xi) \dots \quad (1a)$$

Rozwiązanie tego równania przy zmiennej funkcji $\eta(\xi)$ natrafia na ogół na duże i często nieprzewidywalne trudności natury matematycznej. Rozwiązanie przybliżone tego równania najłatwiej uzyskać można przez zastąpienie pochodnych ilorazami różnicowymi, a tym samym przez zamianę równania różniczkowego na układ równań liniowych niejednorodnych.

Równanie (1a) możemy zastąpić układem dwu równań różniczkowych

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{l^4}{EJ_0} q(\xi) \quad (2a)$$

$$\frac{1}{\eta(\xi)} \frac{d^2 y}{d\xi^2} \pm \frac{Pl^2}{EJ_0} y = \varphi. \quad (2b)$$

Doprowadziliśmy w ten sposób zagadnienie do postaci analogicznej z metodą momentów wtórnych Mohra. Z pierwszego bowiem równania wyznaczamy momenty gnące (φ jest proporcjonalne do momentu zginającego); z drugiego równania wyznaczamy ugięcie, traktując już φ jako funkcję znaną.

Podzielmy teraz długość l na n równych części Δx .

$$\text{Zatem} \quad l = n \Delta x; \quad \Delta x = l \Delta \xi \quad \Delta \xi = \frac{1}{n}.$$

Zastąpmy teraz pochodne ilorazami różnicowymi:

$$\left. \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} \right|_k \rightarrow (\varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1}) n^2$$

$$\left. \frac{d^2 y}{d\xi^2} \right|_k \rightarrow (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) n^2$$

Równanie (2) doprowadzamy zatem do postaci:

$$\varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1} = \frac{q_k l^4}{EJ_0 n^2} \quad (3a)$$

$$y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = \frac{\varphi_k \eta_k}{n^2} \mp \frac{Pl^2}{EJ_0 n^2} \cdot \eta_k y_k \quad (3b)$$

Warunki brzegowe zagadnienia (2) kształtują się następująco

$$y(0)=0; \quad y(1)=0; \quad \varphi(0)=0; \quad \varphi(1)=0.$$

Dla układu równań (3a,b) otrzymamy

$$\varphi_0=0; \quad \varphi_n=0; \quad y_0=0; \quad y_n=0.$$

Lewe strony równań (3) przedstawiają związki trójczłonowe, prawe przyjmujemy jako wartości znane.

Rozwiązanie układu równań (3a) może nastąpić przy pomocy macierzy sprzężonej tego układu,

$$\varphi_k = \frac{l^4}{EJ_0 n^2} \sum_{i=1}^{i=n-1} q_i \beta_{ik} \quad (4)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1.$$

Podobnie i rozwiązanie układu równań (3b) daje

$$y_k = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=n-1} \varphi_i \eta_i \beta_{ik} \mp \frac{Pl^2}{EJ_0 n^2} \sum_{i=1}^{i=n-1} \eta_i y_i \beta_{ik} \quad (5)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1.$$

Jeśli teraz do równania (5) wstawimy związek (4), otrzymamy ostatecznie

$$y_k = \frac{l^4}{EJ_0 n^4} \sum_i q_i \eta_i \beta_{ik} \mp \frac{Pl^2}{EJ_0 n^2} \sum_i \eta_i y_i \beta_{ik} \dots \quad (6)$$

$$(k=1, 2, \dots, n-1).$$

Tutaj
$$\vartheta_{ik} = \sum_{r=1}^{r=n-1} \beta_{rk} \beta_{ir}.$$

Zauważmy, że
$$y_k = \frac{l^4}{EJ_0 n^4} \sum_i q_i \eta_i \vartheta_{ik}.$$

przedstawia nam rzędne ugięcia belki zginanej bez udziału siły osiowej.

Równanie (6) przedstawia analogię między rozwiązaniem równania różnicowego, a równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju. Dla $n \rightarrow \infty$ równanie (6) przechodzi w równanie całkowe, a wielkości $\eta_i \beta_{ik}$, $\eta_i \vartheta_{ik}$ w odpowiednie rdzenie równania całkowego.

Zanim przystąpimy do omówienia macierzy $\|\beta_{ik}\|$, $\|\vartheta_{ik}\|$ doprowadzimy jeszcze wyrażenie pod znakiem sumy do postaci symetrycznej.

W analogii do równań całkowych, pomnożmy obie strony równania (6) przez $\sqrt{\eta_k}$.

Wtedy

$$Y_k = \frac{l^4}{EJ_0 n^4} \sum_i Q_i \bar{\vartheta}_{ik} \mp \frac{Pl^2}{EJ_0 n^2} \sum_i Y_i \bar{\beta}_{ik} \dots \quad (7)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1,$$

gdzie

$$\bar{\vartheta}_{ik} = \sqrt{\eta_i \cdot \eta_k} \vartheta_{ik}; \quad \bar{\beta}_{ik} = \sqrt{\eta_i \cdot \eta_k} \beta_{ik};$$

$$Y_k = \sqrt{\eta_k} \cdot y_k; \quad Q_i = q_i \sqrt{\eta_i}.$$

Rozwiązanie równania (7) możemy uzyskać znanym z równań całkowych sposobem iteracyjnym Neumanna.

Jako pierwsze przybliżenie przyjmijmy postać ugięcia pręta bez udziału siły osiowej.

Wstawiając zatem $Y_i^{(0)}=0$ w drugiej sumie równania (7) przyjmujemy jako pierwsze przybliżenie

$$Y_k^{(1)} = F_k, \quad F_k = \frac{l^4}{EJ_0 n^4} \sum_i Q_i \bar{\vartheta}_{ki}.$$

Wtedy

$$Y_k^{(2)} = F_k \mp \lambda \sum_i F_i \bar{\beta}_{ik} \quad \lambda = \frac{Pl^2}{EJ_0 n^2}.$$

Wstawiając $Y_k^{(2)}$ pod znak sumy w ostatnim wyrażeniu równania (7) mamy

$$Y_k^{(3)} = F_k \mp \lambda \sum_i [F_i \mp \lambda \sum_r F_r \bar{\beta}_{ri}] \bar{\beta}_{ik}$$

$$Y_k^{(3)} = F_k \mp \sum_i F_i [\lambda \bar{\beta}_{ik} \mp \lambda^2 \bar{\beta}_{ik}^{(2)}]$$

gdzie

$$\bar{\beta}_{ik}^{(2)} = \sum_r \bar{\beta}_{ri} \bar{\beta}_{kr}.$$

Postępując w ten sposób dalej, uzyskamy szereg

$$Y_k^{(s)} = F_k \mp \sum_{i=1}^{n-1} F_i [\lambda \bar{\beta}_{ik} \mp \lambda^2 \bar{\beta}_{ik}^{(2)} \pm \lambda^3 \bar{\beta}_{ik}^{(3)} + \dots \dots \dots]. \quad (8)$$

Możemy zatem uzyskać Y_k z dowolną dokładnością. Szereg ten jest szybkozbieżny i do zastosowań praktycznych można po-prześcić na trzech członach.

Podobne operacje wykonać można również na równaniu (6), bowiem podane równanie iteracyjne można stosować również do „rdzeni” niesymetrycznych.

Podany tu sposób postępowania posiada pewne zalety, mianowicie łatwego wyznaczania macierzy $\|\beta_{ik}\|$, $\|\vartheta_{ik}\|$ itd.

Otóż rozwiązanie układu równań

$$M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1} = a_k \quad (9)$$

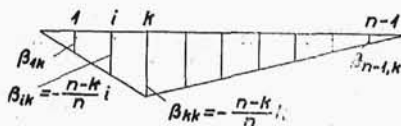
w postaci

$$M_k = \sum_i a_i \beta_{ik}$$

daje bardzo prostą postać wyrażen β_{ik} .

Mianowicie

$$\beta_{ik} = \begin{cases} -\frac{n-k}{n} i & \text{dla } i \leq k \\ -\frac{n-i}{n} k & \text{dla } i \geq k. \end{cases} \quad (10)$$



Rys. 2

Okazuje się więc, że wartości β_{ik} leżą na linii „trójkątowej” i stoją w ścisłym związku z linią wpływową momentów zginających.

Macierz $\|\vartheta_{ik}\|$ otrzymamy przez mnożenie macierzy $\|\beta_{ik}\|$ przez macierz $\|\beta_{ik}\|$. Oznaczmy to symbolicznie $\|\vartheta_{ik}\| = \|\beta_{ik}\|^2$.

Macierz $\|\beta_{ik}\|$,

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \beta_{13}, \dots & \beta_{1, n-1} \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \beta_{23}, \dots & \beta_{2, n-1} \\ \beta_{31}, & \beta_{32}, & \beta_{33}, \dots & \beta_{3, n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n-1, 1}, & \beta_{n-1, 2}, & \beta_{n-1, 3}, \dots & \beta_{n-1, n-1} \end{vmatrix}$$

Macierz $\|\vartheta_{ik}\|$,

$$\begin{vmatrix} \vartheta_{11}, & \vartheta_{12}, & \vartheta_{13}, \dots & \vartheta_{1, n-1} \\ \vartheta_{21}, & \vartheta_{22}, & \vartheta_{23}, \dots & \vartheta_{2, n-1} \\ \vartheta_{31}, & \vartheta_{32}, & \vartheta_{33}, \dots & \vartheta_{3, n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vartheta_{n-1, 1}, & \vartheta_{n-1, 2}, & \vartheta_{n-1, 3}, \dots & \vartheta_{n-1, n-1} \end{vmatrix}$$

Dla wyznaczenia wielkości ϑ_{ik} mnożymy wartości β_{ik} znajdujące się i -tej i k -tej kolumnie przez siebie i tak przemnożone dodajemy do siebie.

Zauważmy jeszcze, że zarówno wyrażenia β_{ik} jak i ϑ_{ik} są symetryczne względem obu przekątnych macierzy.

Macierz $\|\vartheta_{ik}\|$ odpowiada macierzy sprzężonej układu równań

$$M_{k-2} - 4M_{k-1} + 6M_k - 4M_{k+1} + M_{k+2} = b_k \quad M_k = \sum_i b_i \vartheta_{ik} \dots \quad (11)$$

które powstało przez przemnożenie przez siebie macierzy układu równań (10). Z drugiej strony układ równań (11) odpowiada przekształceniu równania różniczkowego

$$\frac{d^4 M}{d\xi^4} = \bar{b}_k \quad \text{na równanie różnicowe } \Delta^4 M = \bar{b}_k.$$

Zatem macierz sprzężona $\|\vartheta_{ik}\|$ związana będzie (pominawszy czynnik proporcjonalności) z linią wpływową ugięcia belki.

Dalsze macierze występujące w równaniu (8) uzyskamy przez kolejne mnożenie macierzy według podanego wzoru.

Uwagi dotyczące macierzy pozwolą nam już oszacować zbieżność szeregu Neumanna.

A) W przedziale $(0, n)$ oszacujemy wielkość $\bar{\beta}_{ik}$.

$$|\bar{\beta}_{ik}| \leq \frac{n}{4} \bar{\eta}$$

gdzie $\bar{\eta}$ jest największą wartością funkcji $\eta(\xi)$ w tym przedziale.

Łatwo wykazać, że

$$|\bar{\beta}_{ik}^{(2)}| < \frac{n^2}{4^2} \bar{\eta} \quad |\bar{\beta}_{ik}^{(3)}| < \frac{n^3}{4^3} \bar{\eta} \text{ itd.}$$

Zatem szereg występujący w równaniu (8) możemy przedstawić w postaci:

$$|\lambda \bar{\beta}_{ik} \mp \lambda^2 \bar{\beta}_{ik}^{(2)} \pm \lambda^3 \bar{\beta}_{ik}^{(3)} \dots| < |\lambda| \frac{n}{4} \bar{\eta} + |\lambda|^2 \frac{n^2}{4^2} \bar{\eta} + |\lambda|^3 \frac{n^3}{4^3} \bar{\eta} \dots \quad (a)$$

Prawa strona tej nierówności przedstawia szereg geometryczny zbieżny w wypadku gdy

$$|\lambda| < \frac{4}{n} \quad \text{t. j. gdy} \quad P < \frac{4nEJ_0}{l^2}.$$

Ponieważ szereg majoryzujący jest zbieżny, zbieżny jest również szereg występujący w równ. (8).

Dodać należy, że oszacowanie wartości $\bar{\beta}_{ik}$ jest dość grube, na ogół szereg (8) będzie wykazywał lepszą zbieżność niż szereg geometryczny (a).

Wróćmy jeszcze do równania (5).

Napiszmy je w postaci

$$\sum_i q_i \eta_i \vartheta_{ik} = \frac{EJ_0 n^4}{l^4} y_k \pm \frac{P n^2}{l^2} \sum_i \eta_i y_i \beta_{ik}. \quad (12)$$

Jeżeli założymy, że ugięcie belki jest znane, to rozwiązanie układu równań da nam odpowiedź na pytanie, jakie powinno być obciążenie belki odpowiadające założonemu wygięciu.

Równanie (12) stanowi analogię z równaniem całkowym Fredholma pierwszego rodzaju. Jeżeli P jest siłą ściskającą, to równanie (12) będzie posiadało sens jedynie w wypadku P mniejszego od siły krytycznej P_{kr} .

2. Układ równań (5a, 5b) można rozwiązać również bez uciekania się do iteracji.

Napiszmy równania (5a, b) w odmiennej trochę postaci

$$\varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1} = \frac{q_k l^4}{EJ_0 n^2} \quad (13a)$$

$$y_{k-1} - (2 \pm \lambda_k) y_k + y_{k+1} = \frac{\varphi_k \eta_k}{n^2} \quad (13b)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1.$$

Rozwiązaniem tego układu równań będzie

$$\varphi_k = \frac{l^4}{EJ_0 n^2} \sum_i q_i \beta_{ki} \quad (14a)$$

$$y_k = \frac{1}{n^2} \sum_i \varphi_i \eta_i \beta_{ki}^* \quad (14b)$$

Tutaj $\|\beta_{ki}^*\|$ jest macierzą odwrotną układu równań (13b).

Układ równań (14a, b) zastąpić można jednym równaniem

$$y_k = \frac{l^4}{EJ_0 n^4} \sum_i q_i \eta_i \vartheta_{ik}^* \quad (15)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1.$$

$$\vartheta_{ik}^* = \sum_r \beta_{rk} \beta_{ir}^*.$$

Równanie (15) jest jeszcze równaniem niesymetrycznym.

Przy oznaczeniach

$$Y_k = y_k \sqrt{\eta_k}; \quad Q_i = q_i \sqrt{\eta_i}.$$

$$\gamma_{ik} = \vartheta_{ik}^* \sqrt{\eta_i \cdot \eta_k}$$

$$\text{znajdziemy} \quad Y_k = \frac{l^4}{EJ_0 n^4} \sum_i Q_i \gamma_{ik}. \quad (16)$$

Macierz $\|\vartheta_{ik}^*\|$ otrzymamy przez pomnożenie macierzy $\|\beta_{ik}\|$ i $\|\beta_{ik}^*\|$.

Zauważmy, że człony macierzy $\|\beta_{ik}^*\|$ zależą od wartości λ_k .

Jak się później przekonamy, człony te dla pewnych wartości P rosną nieograniczenie — mamy wtedy do czynienia z wypadkiem wyboczenia pręta. Na razie odczytajmy z równania (16), że przy nieograniczeniu rosnącym β_{ik} , ugięcie nie zależy ani od rodzaju, ani wielkości obciążenia q_k .

Dla ustalonej odszkalowanej, a w wypadku siły ściskającej ponadto przy założeniu $P < P_{kr}$ równanie (16) pozwoli na wyznaczenie obciążenia q .

Znajomość rzędnych linii ugięcia pozwoli na wyznaczenie momentów zginających i sił tnących w każdym przekroju pręta

$$M_k = -EJ(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_k \rightarrow -\frac{EJ_0 n^2}{\eta_k l^2} (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) \quad (17)$$

$$T_k = -EJ(x) \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_k \rightarrow -\frac{EJ_0 n^3}{2 \eta_k l^3} (y_{k-2} - 2y_{k-1} + 2y_{k+1} - y_{k+2}). \quad (18)$$

3. Znacznie trudniej kształtuje się zadanie omówione w poprzednim ustępie w wypadku niejednorodnych warunków brzegowych. Są to wypadki zupełnego lub sprężystego zamocowania pręta względnie wypadek wspornika.

Rozbicie równania (1) na układ dwóch równań (2) nie może tu znaleźć zastosowania — nieznane są bowiem warunki brzegowe funkcji φ (innymi słowy nieznane są momenty utwierdzenia). Punktem wyjścia może być jedynie równanie (1).

Przy nowym oznaczeniu $\frac{J(\xi)}{J_0} = \varrho(\xi)$ przekształcimy równanie (1) na równanie różnicowe

$$y_{k-2} \varrho_{k-1} - 2y_{k-1} (\varrho_{k-1} + \varrho_k) + y_k (\varrho_{k-1} + 4\varrho_k + \varrho_{k+1}) - 2y_{k+1} (\varrho_k + \varrho_{k+1}) + y_{k+2} \varrho_{k+1} \pm \lambda (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) = q_k \cdot a \quad (19)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1.$$

$$\lambda = \frac{P l^2}{EJ_0 n^2} \quad a = \frac{l^4}{n^4 EJ_0}$$

Warunki brzegowe kształtują się następująco:

Dla brzegu utwierdzonego zupełnie

$$\frac{dy}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta \xi} \Big|_{k=0} = \frac{n}{2} (y_{k-1} - y_{k+1}) = 0; \quad y_{-1} = y_1. \quad (20)$$

Dla brzegu swobodnego otrzymamy z warunków brzegowych $M_0=0$; $T_0=0$ następujące związki

$$y_{-1} - 2y_0 + y_1 = 0$$

$$y_{-2} - 2y_{-1} + 2y_1 - y_2 = 0.$$

Stąd

$$y_{-1} = 2y_0 - y_1; \quad y_{-2} = 4y_0 - 4y_1 + y_2. \quad (21)$$

Rozwiązanie układu równań (19) nastąpić może dwojakim sposobem, podobnie jak to uczyniono w wypadku belki swobodnie w dwóch punktach podpartej.

a) Napiszmy układ równań (19) tak, aby wyrażenie $\pm \lambda \Delta^2 y_k$ znalazło się po prawej stronie równania (19).

Rozwiązaniem wtedy będzie

$$y_k = a \sum_i q_i a_{ik} + \lambda \sum_i \Delta^2 y_i a_{ik} \quad (22)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Tutaj a_{ik} przedstawia składniki macierzy sprzężonej układu równań

$$\begin{aligned} y_{k-1} q_{k-1} - 2y_{k-1}(q_{k-1} + q_k) + y_k(q_{k-1} + 4q_k + q_{k+1}) - 2y_{k+1}(q_k + q_{k+1}) + \\ + y_{k+2} q_{k+1} = b_k \end{aligned} \quad (23)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ponieważ układ tych pięcioczłonowych równań zarówno dla warunków brzegowych (20) czy (21) jest symetryczny względem głównej przekątnej, więc i macierz $\|a_{ik}\|$ będzie symetryczna względem głównej przekątnej.

Układ równań (22) rozwiązać można sposobem iteracyjnym omówionym w ustępie B 1).

b) Równaniu możemy również nadać postać

$$\begin{aligned} y_{k-2} q_{k-1} - 2y_{k-1}(q_{k-1} + q_k \mp \lambda) + y_k(q_{k-1} + 4q_k + q_{k+1} \pm \lambda) - \\ - 2y_{k+1}(q_k + q_{k+1} \mp \lambda) + y_{k+2} q_{k+1} = q_k \cdot a \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (24)$$

Rozwiązujemy symetryczny układ równań (24) i otrzymujemy

$$y_k = a \sum_i q_i a_{ik}^*. \quad (25)$$

Wszelkie uwagi dotyczące rozwiązania równań analogicznego zagadnienia o jednorodnych warunkach brzegowych znajdą i tu zastosowanie. Dla stałego przekroju ($\eta_k=1$) otrzymamy oczywiście znaczne uproszczenia.

C) Wyboczenie pręta

1. W wypadku belki w dwóch końcach swobodnie podpartej, rozwiązanie tego zagadnienia otrzymamy z równania (6), kładąc w nim $q=0$

$$y_k = \lambda \sum_i \eta_i y_i \beta_{ik} \quad (26)$$

lub też w postaci zsymetryzowanej

$$Y_k = \lambda \sum_i Y_i \beta_{ik}^* \quad (27)$$

Wyznaczenie siły krytycznej P_{kr} może nastąpić przy użyciu metod jakie nam daje teoria równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju. Podamy tu dwa sposoby, przystosowane do naszych rozwiązań.

a) Przyjmujemy jako pierwsze przybliżenie $Y_k^{(1)}=1$. Drugie przybliżenie znajdziemy z równania (26)

$$Y_k^{(2)} = \lambda \sum_i \beta_{ik}^* \cdot 1.$$

Parametr λ dobieramy tak, aby w dowolnym punkcie przedziału j było $Y_j^{(2)}=1$.

Stąd

$$1 = \lambda' \sum_i \beta_{ij}^* \quad \lambda' = \frac{1}{\sum_i \beta_{ij}^*} \quad (28)$$

Dalszym przybliżeniem będzie

$$Y_k^{(3)} = \lambda \sum_i \beta_{ik}^* Y_i^{(2)} = \lambda \lambda' \sum_i \beta_{ik}^* \sum_r \beta_{ri}^* = \lambda \lambda' \sum_i \beta_{ik}^{*(2)}.$$

Parametr λ znowu dobieramy tak, aby

$$Y_j^{(3)} = \lambda'' \lambda' \sum_i \beta_{ij}^{*(2)} = 1. \quad \text{Stąd } \lambda'' = \frac{\sum_i \beta_{ij}^*}{\sum_i \beta_{ij}^{*(2)}} \quad (29)$$

Postępując tak dalej otrzymamy dla p -tego kroku

$$\lambda^{(p)} = \frac{\sum_i \beta_{ij}^{*(p-1)}}{\sum_i \beta_{ij}^{*(p)}} \quad (30a)$$

W powyższych wzorach $\beta_{ij}^{*(p)}$ oznacza element macierzy $\|\beta_{ij}^*\|^{(p)}$. Podany tu sposób pokrywa się ze sposobem wykreślnym L. Vianella, względnie ze sposobem „momentów wtórnych” prof. dr W. Wierzbickiego *). Sposób ten jednak prowadzi do celu tylko wtedy, gdy postać wygięta pręta nie przecina osi x między początkiem a końcem pręta (założyliśmy, że $Y_k^{(1)} \neq 0$).

Dokładność wyznaczenia parametru λ wzrasta ze wzrostem przedziałów, na które podzieliliśmy długość l .

Dla pręta o stałym przekroju, przy podziale na 10 części, otrzymamy dla $j=5$:

$$\sum_1^9 \beta_{ij} = 12,5; \quad \sum_1^9 \beta_{ij}^{(2)} = 131,25; \quad \sum_1^9 \beta_{ij}^{(3)} = 1345,625; \quad \sum_1^9 \beta_{ij}^{(4)} = 13742,8125,$$

$$\text{a ze wzoru (30a)} \quad \lambda' = \frac{1}{12,5} = 0,08; \quad \lambda'' = \frac{12,5}{131,25} = 0,0952$$

$$\lambda''' = 0,09754; \quad \lambda'''' = 0,097843 \quad P_{kr} = \frac{EJ}{l^2} n^2 \lambda'''' = 9,7845 \frac{EJ}{l^2}$$

$$\text{zamiast wartości ścisłej } P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

$$\text{b) Dobieramy wielobok } Y_k^{(1)} \text{ tak, aby } \sum_i^{n-1} (Y_i^{(1)})^2 = 1.$$

$$\text{Obliczamy} \quad Y_k^{(2)} = \lambda' \sum_i \beta_{ik}^* Y_i^{(1)} = \lambda' C_k^{(1)}.$$

Z warunku, aby $\sum_i (Y_i^{(2)})^2 = 1$ t.j. z warunku $\lambda'^2 \sum_i [C_k^{(1)}]^2 = 1$ wyznaczamy λ'

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{\sum_i (C_k^{(1)})^2}}. \quad (30b)$$

$$\text{Obliczamy dalej} \quad Y_k^{(3)} = \lambda'' \sum_i \beta_{ik}^* Y_i^{(2)} = \lambda'' C_k^{(2)}.$$

Podobnie z warunku $\sum_i (Y_i^{(3)})^2 = 1$ wyznaczamy

$$\lambda'' = \frac{1}{\sqrt{\sum_i (C_k^{(2)})^2}}.$$

*) W. Wierzbicki — „Sposób momentów wtórnych w zastosowaniu do wyznaczenia siły krytycznej”. Przegląd Techniczny 1946. Nr 9 — 10.

Postępując tak dalej, otrzymamy przy p -tym kroku

$$\lambda^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i (C_i^{(p)})^2}}.$$

Dla pręta o stałym przekroju i $n=10$ wyliczymy przy przyjęciu dla $Y_k^{(1)}$ symetrycznej paraboli 2-go stopnia

$$\lambda' = 0,09795 \quad \lambda'' = 0,097887.$$

Otrzymujemy tu szybszą zbieżność ciągu λ niż poprzednim sposobem.

Przy tej sposobności warto omówić prosty wypadek wyboczenia pręta o stałym przekroju i ocenić jak od ilości przedziałów zależy dokładność wyznaczenia wartości krytycznej.

Wychodzimy z równania (3b) przy $\eta=1$.

$$y_{k-1} - 2 y_k + y_{k+1} + \lambda y_k = 0. \quad (31)$$

Rozwiązaniem tego równania różnicowego przy warunkach brzegowych $y_0=0$; $y_n=0$ będzie

$$y_k^{(i)} = A \sin \frac{\pi k i}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (32)$$

Wstawiając powyższy związek do równania (32) dochodzimy (wyboczenie wg jednej półfali) do zależności

$$\lambda = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \quad (33)$$

albo

$$P_{kr} = \frac{2 EJ n^2}{l^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right). \quad (33a)$$

Przy przejściu do granicy otrzymamy

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=10$	$n=\infty$
$\frac{Pl_2}{EJ} =$	8,0	9,0	9,39	9,549	9,648	9,707	9,773	9,7886	$\frac{\pi^2}{9,8696}$

Z powyższego zestawienia wynika, że dla $n=8$ otrzymujemy dostatecznie dokładną wartość P_{kr} ; szacować należy, że ilość ośmiu przedziałów będzie wystarczająca i dla wypadku zmiennego prze-

kroju. Jeśli porównamy jeszcze wartość λ dla $n = 10$ z wartościami otrzymanymi drogą iteracji, to stwierdzimy, że sposób I-szy daje wartości mniejsze, sposób II-gi większe od wartości uzyskanej z równania (33).

2. W wypadku niejednorodnych warunków brzegowych pręta podlegającego ścisnaniu, punktem wyjścia będzie równanie (22), w którym położymy $q_i = 0$

$$y_k = \lambda \sum_i \Delta^2 y_i a_{ik}. \quad (34)$$

Iterowanie tego równania można wykonać sposobem podanym w poprzednim ustępie. Ze względu na przegięcie odkształconej w pobliżu miejsca utwierdzenia pręta należałoby przyjmować podział pręta na co najmniej 8 części, aby uzyskać wartość siły krytycznej z dostateczną do zastosowań dokładnością.

Wróćmy jeszcze do wypadku jednoczesnego ścisnienia i zginania pręta.

Przy $\eta = 1$ napiszemy równanie (13b) w postaci

$$\Delta^2 y_k + \lambda y_k = \frac{\varphi_k}{n^2}. \quad (a)$$

Wyrażmy funkcje φ_k i y_k przy pomocy funkcji właściwych równania jednorodnego

$$\Delta^2 y_k + \lambda y_k = 0. \quad (b)$$

Oznaczmy rozwiązania właściwe znormowane tego równania przez $y_k^{(i)}$, a przynależne im wartości właściwe przez $\lambda^{(i)}$.

Zatem napiszemy*)

$$y_k = \sum_{r=1}^{n-1} c_r y_k^{(r)} \quad \frac{\varphi_k}{n^2} = \sum_{r=1}^{n-1} u_r y_k^{(r)}.$$

Powyższe zależności wstawiamy do równania (a); otrzymamy

$$\sum_{r=1}^{n-1} \{c_r [\Delta^2 y_k^{(r)} + \lambda y_k^{(r)}] - u_r y_k^{(r)}\} = 0. \quad (c)$$

*) Fr. Bleich — E. Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. 1927.

Z równania (b) znajdujemy, że $\Delta^2 y_k^{(r)} = -\lambda^{(r)} y_k^{(r)}$.

Łatwo już z równania (c) otrzymamy dla dowolnego $y_k^{(r)}$ prosty związek

$$c_r = \frac{u_r}{\lambda - \lambda^{(r)}}.$$

Ostatecznie więc

$$y_k = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{u_r y_k^{(r)}}{\lambda - \lambda^{(r)}}.$$

Z równania tego odczytamy, że dla $\lambda \rightarrow \lambda^{(r)}$ ugięcie y_k dąży do nieskończoności. Z drugiej strony $\lambda^{(r)}$ jest związane z siłą krytyczną P_{kr} .

Należy wykazać, że dla $\lambda \rightarrow \lambda^{(r)}$ również wielkość β_{ik}^* w równaniu (14b) będzie dążyła do nieskończoności.

W tym celu wyrażmy u_r przy pomocy funkcji φ_k i $y_k^{(r)}$.

Z teorii równań różnicowych wiadomo, że

$$u_r = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi_i y_i^{(r)}}{n^2}.$$

Zatem

$$y_k = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{y_k^{(r)}}{\lambda - \lambda^{(r)}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi_i y_i^{(r)}}{n^2}$$

albo po przekształceniu sum

$$y_k = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi_i}{n^2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{y_k^{(r)} y_i^{(r)}}{\lambda - \lambda^{(r)}}.$$

Porównyując ostatnie równanie z równaniem (14b) otrzymamy przy założeniu $\eta=1$.

$$\beta_{ki}^* = - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{y_k^{(r)} y_i^{(r)}}{\lambda - \lambda^{(r)}}.$$

Widzimy, że dla $\lambda \rightarrow \lambda^{(r)}$ wielkość β_{ki}^* rośnie ponad wszelką miarę. Gdybyśmy rozpatrywali zjawisko jednoczesnego zginania i rozciągania pręta, to β_{ik}^* przyjmie postać

$$\beta_{ki}^* = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{y_k^{(r)} y_i^{(r)}}{\lambda + \lambda^{(r)}}.$$

Wreszcie przy zginaniu pręta należy położyć $\lambda=0$.

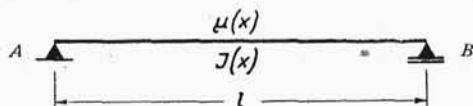
$$\beta_{kci} = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{y_k^{(r)} y_i^{(r)}}{\lambda^{(r)}}.$$

Ostatnie wyrażenie jest odpowiednikiem bilinearnej formy rzędu równania całkowego.

Powyższe rozważanie, przeprowadzone dla prostego przykładu pręta na dwóch podporach swobodnie podpartego można w całej rozciągłości przenieść i na inne typy podparcia, jak i na dowolną zmienność przekroju. Trudności jednak wyznaczenia wartości $\lambda^{(r)}$ jak i funkcji $y_k^{(r)}$ wzrastają niewspółmiernie, tak, że wyznaczenie wielkości β_{ik}^* przy pomocy algorytmu Gaussa czy też sposobem krakowianowym wydaje się drogą najprostszą i najprędzej prowadzącą do celu.

D) Drganie poprzeczne pręta

Wiele kłopotu nastęrcza wyznaczanie częstotliwości drgań własnych pręta o zmiennym przekroju. Zadanie to da się bez wielkiej trudności rozwiązać przy pomocy rachunku różnic skończo-



rys. 3

nych. Postaramy się i tu doprowadzić rozwiązanie do postaci takiej, z jaką mieliśmy do czynienia przy wyboczeniu pręta.

Równanie różniczkowe tego zagadnienia przy przyjętych w ustępie B oznaczeniach, przyjmie następującą postać

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} = 0.$$

Przy założeniu $x = l \xi$, $\frac{J_0}{J(x)} = \eta(\xi)$, $\bar{y}(x, t) = y(\xi) \sin \omega t$ równanie powyższe przechodzi na

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\eta(\xi)} \frac{d^2 y}{d\xi^2} \right) - \mu(\xi) \frac{\omega^2 l^4}{EJ_0} y = 0. \quad (35)$$

Dla jednorodnych warunków brzegowych $y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0$ rozbijamy równanie (35) na dwa.

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{\omega^2 \mu_0 l^4}{EJ_0} y \delta(\xi) \quad \frac{d^2 y}{d\xi^2} = \varphi(\xi) \eta(\xi) \quad (36)$$

$$\mu(\xi) = \mu_0 \delta(\xi).$$

Odpowiednie równania różnicowe przyjmą postać

$$\varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1} = \frac{\mu_0 l^4 \omega^2}{EJ_0 n^2} y_k \delta_k$$

$$y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = \frac{\varphi_k \eta_k}{n^2}$$

$$k=1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (37)$$

Rozwiązaniem tego układu równań będzie

$$\varphi_k = \frac{\mu_0 \omega^2 l^4}{EJ_0 n^2} \sum_i y_i \beta_{ik} \delta_i \quad (38a)$$

$$y_k = \frac{1}{n^2} \sum_i \varphi_i \eta_i \beta_{ik}. \quad (38b)$$

Łącząc te dwa równania w jedno, otrzymamy

$$y_k = \alpha \sum_i y_i \delta_i \vartheta_{ik} \quad (39)$$

$$\|\vartheta_{ik}\| = \|\beta_{ik}\|^2; \quad \alpha = \frac{l^4 \omega^2 \mu_0}{EJ_0 n^4}.$$

Symetryzacja „rdzenia” równania (39) daje

$$Y_k = \alpha \sum_i Y_i \bar{\vartheta}_{ik} \quad (40)$$

$$Y_k = y_k / \sqrt{\nu_k}; \quad \bar{\vartheta}_{ik} = \sqrt{\nu_i} \cdot \sqrt{\nu_k} \vartheta_{ik} \quad \nu_k = \eta_k \delta_k.$$

Sprowadziliśmy więc zagadnienie drgania pręta swobodnego, do takiej samej postaci, jak przy wyboczeniu (wzory 26, 27).

Poza parametrem α , różnica polega jeszcze na tym, że we wzorze (40) występuje macierz $\|\beta_{ik}\|^2$ w miejscu tam występującej macierzy $\|\beta_{ik}\|$.

Jeżeli drgania swobodne odbywają się przy udziale siły osiowej P ściskającej, lub rozciągającej, to równanie różniczkowe (35) przyjmie postać:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\eta(\xi)} \frac{d^2 y}{d\xi^2} \right) \pm \frac{P l^2}{E J_0} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \frac{\mu_0 \delta(\xi) \omega^2 l^4}{E J_0} y = 0 \quad (41)$$

a odpowiednie rozwiązanie w rachunku różnic skończonych

$$y_k = \alpha \sum_i y_i \delta_i \eta_i \theta_{ik} \pm \lambda \sum_i \eta_i y_i \beta_{ik} \quad (42)$$

$$\lambda = \frac{P l^2}{E J_0 n^2}.$$

Jeżeli w równaniu tym położyć $\lambda=0$, otrzymamy z równania (39), rozwiązanie zagadnienia drgania bez udziału siły osiowej; jeśli natomiast postawić $\omega=0$, otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia wyboczenia. Równanie (42) należy interpretować w ten sposób, że przy stałym P siła ściskająca zmniejsza, a siła rozciągająca zwiększa częstotliwość drgań własnych. Odczytamy również z równania (42), że dla ściskającej siły P dążącej do P_{kr} [a więc dla wypadku, $y_k - \lambda \sum_i \eta_i y_i \beta_{ik} \rightarrow 0$ (porównaj wzór 26)] częstotliwość drgań własnych zdąża do zera.

Przy niejednorodnych warunkach brzegowych równanie różniczkowe (39) doprowadzamy do następującego układu równań różnicowych:

$$y_{k-2} q_{k-1} - 2y_{k-1} (q_{k-1} + q_k) + y_k (q_{k-1} + 4q_k + q_{k+1}) - \\ - 2y_{k+1} (q_k + q_{k+1}) + y_{k+2} q_{k+1} = \alpha y_k \quad (43)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1. \quad q_k = \frac{J_k}{J_0}.$$

Rozwiązanie tego układu równań daje

$$y_k = \alpha \sum_i y_i a_{ik} \quad (44)$$

gdzie $\|a_{ik}\|$ jest macierzą sprzężoną układu równań

$$\Delta^2 (q \Delta^2 y)_k = b_k. \quad (45)$$

W wypadku jednoczesnego ściskania lub rozciągania pręta siłą P otrzymamy

$$y_k = \alpha \sum_i y_i a_{ik} \mp \lambda \sum_i \Delta^2 y_i a_{ik} \quad (46)$$

Z porównania wzorów (44) (50) i (46) wynika również, że przy wzroście siły ściskającej (znak minus przy λ) częstotliwości ω maleją, na odwrót wzrost siły ściskającej powoduje zwiększenie częstotliwości drgań własnych*).

Rozważmy jeszcze wypadek belki swobodnie podpartej o stałym przekroju, wykonującej drgania swobodne i ściskanej stałą siłą P .

Równanie różnicowe przyjmie tu postać

$$\Delta^4 y_k + \lambda \Delta^2 y_k - \alpha y_k = 0. \quad (a)$$

Rozwiązaniem tego równania jednorodnego będzie

$$y_k = A \sin \beta_k \quad (k=1, 2, \dots, n-1). \quad (b)$$

Z warunku brzegowego $y_n = 0$ otrzymamy

$$\beta = \frac{\pi i}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (c)$$

Wstawiając β do równania (b), a to ostatnie do równania (a) uzyskamy

$$\alpha^{(i)} = 2^2 \left(1 - \cos \frac{\pi i}{n} \right)^2 - 2 \lambda \left(1 - \cos \frac{\pi i}{n} \right) \quad (d)$$

Jeśli $\lambda = 0$, to

$$\alpha^{(i)} = \alpha_0^{(i)} = 2^2 \left(1 - \cos \frac{\pi i}{n} \right)^2.$$

Z tego związku wyznaczmy $(n-1)$ kolejnych częstotliwości drgań $\omega^{(i)}$ własnych pręta przy $P = 0$. Jeśli natomiast $\alpha = 0$, to

$$\lambda^{(i)} = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi i}{n} \right) = \lambda_0^{(i)}.$$

Z tego równania wyznaczmy $(n-1)$ kolejnych sił krytycznych $P^{(i)}$.

Równanie (d) możemy zatem napisać w postaci:

$$\alpha^{(i)} = \alpha_0^{(i)} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^{(i)}} \right) \quad (e)$$

*) Przy $y_k > 0$ wielkość $\Delta^2 y_k < 0$.

albo też

$$(\omega^{(i)})^2 = (\omega_0^{(i)})^2 \left(1 - \frac{P}{P^{(i)}} \right). \quad (f)$$

Z powyższego wynika, że ze wzrostem siły P maleje częstotliwość drgań własnych i dla $P \rightarrow P_k$ zmierza do zera. Łatwo też wykazać, że dla $n \rightarrow \infty$

$$\omega_0^{(i)} \rightarrow \frac{i\pi}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}; \quad \lambda_0^{(i)} \rightarrow \frac{EJ\pi^2 i^2}{l^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

W wypadku drgań wymuszonych przy udziale siły osiowej równanie różnicowe przyjmie postać

$$\Delta^4 y_k + \lambda \Delta^2 y_k - \alpha y_k = \frac{p_k}{EJn^4}. \quad (g)$$

Rozwiązanie tego równania da się przedstawić przy pomocy funkcji właściwych $y_k^{(i)}$ i wartości właściwych $\alpha^{(i)}$ równania (a).

Na podstawie analogicznych rozważań jak w ustępie C. 2. otrzymamy

$$y_k = \frac{1}{EJn^4} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \sum_{r=1}^{n-1} \frac{y_k^{(r)} y_i^{(r)}}{\alpha - \alpha^{(r)}} = \frac{1}{EJn^4} \sum_i p_i b_{ik}.$$

Tutaj

$$b_{ik} = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{y_k^{(r)} y_i^{(r)}}{\alpha - \alpha^{(r)}}$$

jest członem macierzy sprzężonej do macierzy układu równań (g).

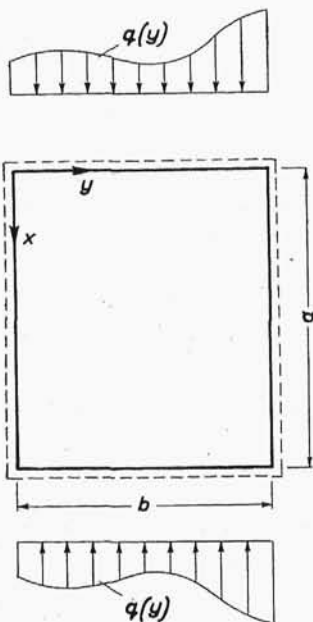
E) Wyboczenie płyt prostokątnych

1. Rozważmy płytę prostokątną dookoła swobodnie podpartą, obciążoną na brzegu $x=0$ $x=a$ obciążeniem $q(\xi)$ rozłożonym w sposób ciągły lub nieciągły.

Równanie różniczkowe zagadnienia brzmia

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{q(y)}{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (47)$$

Zajmijmy się najpierw płytą swobodnie wzdłuż brzegów podpartą. Warunki brzegowe są tu bardzo proste; mianowicie wzdłuż wszystkich brzegów jest $\nabla^2 w = 0$ i $w = 0$.



Rys. 4

Jeśli przez φ oznaczamy laplasjan

$$\varphi = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w$$

to równanie (47) możemy napisać w postaci układu dwu równań

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{q(y)}{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (48a)$$

$$\nabla^2 w = \varphi \quad (48b)$$

Równania różniczkowe (48a, b) będą spełnione jeśli przyjmiemy

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \Phi(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \\ w(x, y) &= W(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \quad (49)$$

$$(m=1, 2, \dots, \infty).$$

Spełnione będą również, przy tym przyjęciu, warunki brzegowe $w(0, y) = 0$; $w(a, y) = 0$; $\varphi(0, y) = 0$; $\varphi(a, y) = 0$.

W ten sposób otrzymamy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \alpha^2 \Phi = \frac{q_0 \alpha^2}{N} Y_{\eta}(y) \quad (50a)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \alpha^2 Y = \Phi \quad (50b)$$

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad q(y) = q_0 \eta(y)$$

Zamieniając pochodne ilorazami różnicowymi i przy podziale boku b na n odcinków Δy uzyskamy

$$\Phi_{k-1} - (2 + \varrho^2) \Phi_k + \Phi_{k+1} = \frac{q_0}{N} \varrho^2 Y_{k\eta k} \quad (51a)$$

$$Y_{k-1} - (2 + \varrho^2) Y_k + Y_{k+1} = \frac{\Phi_k b^2}{n^2} \quad (51b)$$

$$\varrho = \frac{m\pi b}{an}$$

Rozwiązanie układu równań (51a, 51b) daje

$$\Phi_k = \frac{q_0 \varrho^2}{N} \sum_i Y_i \eta_i \beta_{ik}$$

$$Y_k = \frac{b^2}{n^2} \sum_i \Phi_i \beta_{ik}$$

albo

$$Y_k = \lambda \sum_i Y_i \eta_i \vartheta_{ik} \quad (52)$$

$$\lambda = \frac{q_0}{N} \varrho^2 \frac{b^2}{n^2}$$

Sprowadziliśmy zatem i tu rozwiązanie do postaci analogicznej do jednorodnego równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju. Z układu równań wyliczymy macierz sprzężoną $\|\beta_{ik}\|$ — ze względu na trójęczłonowość tych równań nie sprawi to żadnego kłopotu. Przemnożenie macierzy przez siebie daje macierz $\|\vartheta_{ik}\|$. Przez symetryzację „rdzenia” otrzymamy dogodną do działań arytmetycznych postać równania (52)

$$y_k = \lambda \sum_i y_i \bar{\vartheta}_{ik} \quad (53)$$

$$y_k = Y \sqrt{\eta_k} \quad \bar{\vartheta}_{ik} = \sqrt{\eta_i} \cdot \sqrt{\eta_k} \cdot \vartheta_{ik}$$

Dla stosunku $a/b \leq 1$ możemy się spodziewać, że wyboczenie nastąpi według jednej półfali zarówno w kierunku x jak i y . Położymy $m=1$. Dla wzrastającego stosunku $\frac{a}{b}$ nadejdzie wreszcie moment, gdy wyboczenie jest możliwe zarówno w jednej jak i w dwóch półfalach. Dla dalszego wzrostu stosunku $\frac{a}{b}$ otrzymamy postać wyboczenia w kształcie dwóch półfal ($m=2$) itd.

Gdy obciążenie działa zarówno w kierunku x jak i y otrzymamy układ równań

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{q(y)}{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{p(x)}{N} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (54a)$$

$$\nabla^2 w = \varphi. \quad (54b)$$

Po zmianie tego układu równań na układ równań różnicowych, rozwiązanie otrzymamy w postaci:

$$Y_k = \lambda_q \sum_i \eta_i Y_i \vartheta_{ik} - \lambda_p \sum_i \delta_i \Delta^2 Y_i \vartheta_{ik} \quad (55)$$

$$\lambda_q = \frac{q_0 \varrho^2 b^2}{N n^2} \quad \lambda_p = \frac{p_0 b^2}{N n^2}$$

$$\delta_i p_0 = p_i$$

Jeżeli zważyć, że przy wygięciu w jednej półfali w obu kierunkach dla $y_k > 0$ zawsze będzie $\Delta^2 Y_i < 0$, to ze wzoru (55) łatwo stwierdzimy, że ze wzrostem λ_p maleje siła krytyczna λ_q i na odwrót, (przy założeniu, że oba obciążenia są ściskające). Jeśli $q(y)$ jest ściskaniem, $p(x)$ rozciąganiem, to wzrost $q(x)$ wywołuje powiększenie siły krytycznej.

2. Dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej w krawędziach $x=0$; $x=a$, a utwierdzonej zupełnie czy sprężysto na pozostałych krawędziach, nie uda się już rozbić równania (47) na układ dwóch trójczłonowych równań. Przy przyjęciu $w=Y(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$ napiszemy równanie (47) w postaci

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha^4 Y = \frac{q_0 \eta(y) Y \alpha^2}{N} \quad (55)$$

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}$$

a po przejściu z pochodnych na ilorazy różnicowe

$$Y_{k-2} - (4 + \varrho^2) Y_{k-1} + (6 + 4\varrho^2 + \varrho^4) Y_k - (4 + \varrho^2) Y_{k+1} + Y_{k+2} = \frac{q_0 \eta_k Y_k \alpha^2 b^4}{N n^4} \quad (56)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1.$$

Rozwiązanie tego układu równań daje

$$Y_k = \lambda \sum_i \eta_i Y_i \alpha_{ik} \quad (57)$$

$$\lambda = \frac{q_0}{N} \varrho^2 \frac{b^2}{n^2}$$

Warunki brzegowe tego zagadnienia kształtują się tu następująco.

Dla brzegu utwierdzonego zupełnie w krawędzi $y=0$;

otrzymamy: $Y(0)=0; \quad Y'(0)=0$

względnie $Y_0=0; \quad Y_{-1}=Y_1 \quad (58)$

Dla brzegu swobodnego:

$$m_y = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = -N [Y''(0) - \mu \alpha^2 Y(0)] \sin \alpha x = 0$$

$$\bar{q}_y = -N \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=0} = -N [Y'''(0) - (2 - \mu) \alpha^2 Y'(0)] \sin \alpha x = 0.$$

W rachunku różnic skończonych zatem:

$$Y_{-1} = Y_0(2 + \mu \varrho^2) - Y_1 \quad (59)$$

$$Y_{-2} = Y_0 \{ [2 + (2 - \mu) \varrho^2] (2 + \mu \varrho^2) - 2 \} - Y_1 \{ 3 + 2(2 - \mu) \varrho^2 \}$$

3. Płyta dookoła zupełnie utwierdzona

Obciążenie $q(y)$ dowolnie rozłożone na krawędziach $x=0$ i $x=a$. Wychodzimy z równania różniczkowego (47). Zamienimy to równanie na układ równań liniowych. Podzielmy bok a na m równych odcinków Δx , a bok b na n odcinków Δy .

$$a = m \Delta x \quad b = n \Delta y.$$

Otrzymamy

$$X_r \Delta^4 Y_k + 2\varrho^2 \Delta^2 Y_k \Delta^2 X_r + \varrho^4 Y_k \Delta^4 X_r = -\lambda \eta_k Y_k \Delta^2 X_r \quad (60)$$

$$\varrho = \frac{mb}{na} \quad \lambda = \frac{q_0}{N} \varrho^2 \frac{b^2}{n^2}$$

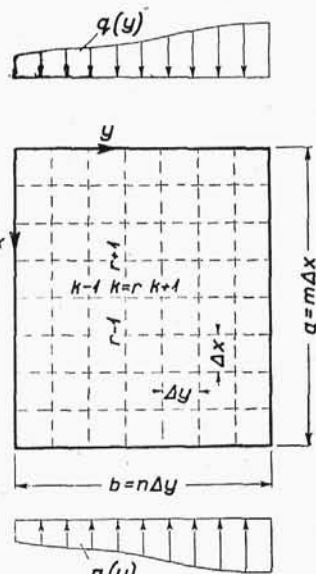
Przyjmujemy postać wygięcia płyty w przekroju $y = \text{const}$. Rzędne X_r ($r=1, 2, \dots, m-1$) traktujemy jako znane. Sumujemy teraz równanie (60) obustronnie w kierunku osi x . Otrzymamy

$$\Delta^4 Y_k + 2\varrho^2 A \Delta^2 Y_k + \varrho^4 B Y_k = -\lambda \eta_k A Y_k \quad (61)$$

gdzie

$$A = \frac{\sum_{r=1}^{m-1} \Delta^2 X_r}{\sum_{r=1}^{m-1} X_r},$$

$$B = \frac{\sum_{r=1}^{m-1} \Delta^4 X_r}{\sum_{r=1}^{m-1} X_r}.$$



Rys. 5

Rozwiązaniem tego pięcioczłonowego równania w budowie swej podobnego do równania (55) będzie

$$Y_k = \lambda_{(1)} \sum_i \eta_i Y_i \alpha_{ik} \quad (62)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Z równania tego znajdziemy w znany sposób $\lambda_{(1)}$ oraz wartości $Y_k (k=1, 2, \dots, n-1)$.

Wartości Y_k są zatem znane. Sumujemy teraz równanie (60) w kierunku osi y .

Otrzymamy

$$X_r \bar{B} + 2\varrho^2 \Delta^2 X_r \bar{A} + \varrho^4 \Delta^4 X_r = -\lambda \eta_r \Delta^2 X_r \quad (63)$$

gdzie

$$\bar{B} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \Delta^4 Y_k}{\sum_{k=1}^{n-1} Y_k}, \quad \bar{A} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \Delta^2 Y_k}{\sum_{k=1}^{n-1} Y_k}.$$

Rozwiązanie tego pięcioczłonowego równania daje

$$X_r = \lambda_{(2)} \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \Delta^2 X_i \gamma_{ik}. \quad (64)$$

Z tego równania wyznaczamy $\lambda_{(2)}$ oraz stosunki rzędnych X_r . Sumując równanie (60) ponownie w kierunku osi x otrzymujemy nowe wartości A , B i z równania (61) wyznaczamy następną wartość $\lambda_{(3)}$. Iterując równanie (62) i (64) otrzymujemy ciąg wartości $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \dots$ o znacznej zbieżności.

Powyższe rozważania dadzą się rozszerzyć i na wypadki płyty, w których jedna, dwie lub trzy krawędzie są swobodne.

Duże zastosowanie znajdzie rachunek różnic skończonych do płyt o zmiennej w sposób ciągły lub nieciągły grubości płyty oraz do wypadków obciążenia płyt siłami skupionymi.

Omówione tu rozwiązanie zagadnień wyboczenia płyt, można także rozszerzyć na zagadnienie drgań swobodnych płyt.

$$N \nabla^2 \nabla^2 w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (65)$$

względnie na zagadnienie ogólniejsze, jak drganie płyt, podlegających ścisaniu względnie rozciąganiu w jednym lub obu kierunkach osi współrzędnych.

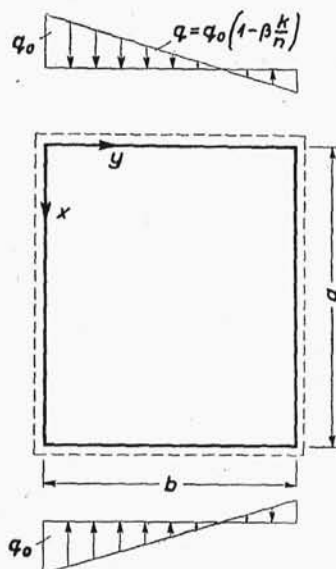
Poniżej podajemy trzy proste przykłady, które pozwolą zorientować się tak w toku postępowania, jak i w korzyściach płynących z zastosowań rachunku różnic skończonych do statyki i dynamiki konstrukcji inżynierskich.

(F) Przykłady

Wyboczenie płyty. Płyta kwadratowa, na brzegach swobodnie podparta. Obciążenie q działa na brzegach $x=0$, $x=a$.

Podział boku b na 7 równych części. Zmienność obciążenia określa wzór

$$q = q_0 \left(1 - \beta \frac{k}{n} \right)$$



Rys. 6

Jako pierwsze przybliżenie przyjęto krzywą $Y_k^{(0)}$ niesymetryczną dla $\beta \neq 0$, a symetryczną dla $\beta = 0$. Rozpatrzono trzy wypadki a) $\beta = 2$; b) $\beta = 1$; c) $\beta = 0$.

Przy podziale na 7 części i założeniu, że wygięcie nastąpi w jednej półfali w kierunku osi x i y otrzymamy

$$\varrho^2 = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{b^2}{n^2} = \frac{\pi^2}{49} = 0,20142 \quad 2 + \varrho^2 = 2,20142.$$

Macierz układu równań (51 a, b) przyjmuje postać

$$\begin{vmatrix} 2,20142, & -1 & & & & & \\ -1 & 2,20142, & -1 & & & & \\ & -1, & 2,20142, & -1 & & & \\ & & -1, & 2,20142, & -1 & & \\ & & & -1 & 2,20142, & -1 & \\ & & & & -1 & 2,20142, & -1 \\ & & & & & -1 & 2,20142 \end{vmatrix}$$

Dla tego układu wyznaczono najpierw przy pomocy skróconego algorytmu Gaussa macierz sprzężoną $\|\beta_{ik}\|$

	1	2	3	4	5	6
1	0,63894	0,40657	0,25609	0,157201	0,08997	0,04087
2		0,89503	0,56377	0,346068	0,198073	0,08998
3			0,98500	0,604644	0,346070	0,157203
4				0,985003	0,563770	0,256094
5					0,895029	0,40657
6						0,63894

Z macierzy tej wyznaczono macierz $\|\vartheta_{ik}\| = \|\beta_{ik}\|^2$

	1	2	3	4	5	6
1	0,67359	0,84394	0,7777	0,61201	0,41245	0,20590
2		1,45130	1,45596	1,19012	0,81792	0,41245
3			1,86370	1,66186	1,19012	0,61201
4				1,86370	1,45596	0,7777
5					1,4130	0,84394
6						0,67359

a) Wypadek $\beta = 2$; $q_k = q_0 \left(1 - 2 \frac{k}{n}\right) = q_0 \eta_k$. Obciążenie q_k odpowiada czystemu zginaniu płyty. Jako pierwsze przybliżenie $Y_k^{(0)}$ przyjmujemy krzywą niesymetryczną, przy czym rzędne jej nie są określone równaniem — przyjęto je opierając się jedynie na intuicji.

Wartości η_k i $Y_k^{(0)}$ podajemy w poniższym zestawieniu:

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\eta_k =$	1	0,71424	0,42857	0,14286	-0,14286	-0,42857	-0,71429	-1
$Y_k^{(0)} =$	0	0,31	0,35	0,275	0,200	0,120	0,06	0
$\eta_k Y_k^{(0)} =$	0	0,2214	0,1414	0,0393	-0,0285	-0,0514	-0,0429	0

$$\sum_{i=1}^6 Y_k^{(0)} = 1,295$$

Dalsze przybliżenia wyliczamy ze wzoru

$$Y_k^{(r)} = \lambda \sum_i \eta_i Y_i^{(r-1)} \vartheta_{ik}.$$

Podajemy zestawienie tych przybliżeń oraz sumę rzędnych $Y_k^{(r)}$

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum Y_k^{(r)}$
$Y_k^{(1)} =$	0	0,2516	0,3552	0,3206	0,2708	0,115	0,0335	0	1,2702
$Y_k^{(2)} =$	0	0,2440	0,3585	0,3310	0,2303	0,1246	0,0519	0	1,3403
$Y_k^{(3)} =$	0	0,2441	0,3507	0,3163	0,2102	0,1071	0,0325	0	1,2609

Obliczamy parametry λ kolejnych przybliżeń:

$$\lambda_{(1)} = \frac{\sum Y_k^{(0)}}{\sum Y_k^{(1)}} = 1,0195, \quad \lambda_{(2)} = \frac{\sum Y_k^{(1)}}{\sum Y_k^{(2)}} = 0,9476$$

$$\lambda_{(3)} = \frac{\sum Y_k^{(2)}}{\sum Y_k^{(3)}} = 1,062 \quad q_{kr} = \frac{\lambda_{(3)} N n^4 a^2}{\pi^2 b^4};$$

$$q_{kr} = 26,177 \cdot \frac{N \pi^2}{b^2}.$$

Wartość q_{kr} wyznaczoną przez S. Timoszenko *) metodą energetyczną wynosi $q_{kr} = 25,6 \frac{N \pi^2}{b^2}$

b) Wypadek $\beta=1$, $q_k = q \left[1 - \frac{k}{n} \right] = q \eta_k$ $q_0 = q$; $q_n = 0$

Jako pierwsze przybliżenie przyjęto wielobok $Y_k^{(0)}$ jak dla wypadku a).

$k=$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\eta_k =$	1	0,85714	0,71429	0,57147	0,42857	0,28572	0,14286	0
$Y_k^{(0)} =$	0	0,31	0,33	0,275	0,200	0,120	0,06	0
$\eta_k Y_k^{(0)} =$	0	0,2657	0,1357	0,1571	0,0837	0,0343	0,0086	0

Podajemy dalsze przybliżenia uzyskane ze wzoru (52)

$k=$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum Y_k^{(r)}$
$Y_k^{(1)} =$	0	0,5684	0,9286	1,0311	0,9205	0,6713	0,3493	0	4,4692
$Y_k^{(2)} =$	0	1,6770	2,8787	3,3571	3,1201	2,3395	1,2367	0	14,6091
$Y_k^{(3)} =$	0	5,0678	12,6892	14,5049	10,1109	4,1252	0,62290	0	47,1209

$$\lambda_{(1)} = \frac{1,295}{4,4692} = \frac{1}{3,45} \quad \lambda_{(2)} = \frac{4,4692}{14,609} = \frac{1}{3,2368}$$

$$\lambda_{(3)} = \frac{14,609}{47,1209} = \frac{1}{3,22}$$

Dla trzeciego przybliżenia otrzymamy

$$q_{kr} = \frac{\lambda N n^4 a^2}{\pi^2 b^4} = 7,65 \frac{N \pi^2}{b^2}.$$

*) S. Timoszenko, Theory of Elastic Stability. 1936, str. 355.

Metodą energetyczną otrzymuje S. Timoszenko wartość

$$q_{kr} = 7,80 \frac{N\pi^2}{b^2}$$

c) Wypadek $\beta=0$. Obciążenie $q=\text{const.}$ $\eta=1$.

Jako pierwsze przybliżenie przyjmujemy krzywą symetryczną. Przy dalszych przybliżeniach wystarczy wyznaczać Y_k dla trzech pierwszych punktów.

$K=$	0	1	2	3	$\Sigma Y_k^{(r)}$
$Y_k^{(0)}=$	0	0,4340	0,7820	0,9749	2,1909
$Y_k^{(1)}=$	0	2,7190	4,903	6,1094	13,7314
$Y_k^{(2)}=$	0	17,0416	30,7081	38,2916	86,0412

$$\frac{1}{\lambda_{(1)}} = \frac{13,7314}{2,1909} = 6,2675; \quad \frac{1}{\lambda_{(2)}} = \frac{86,0412}{13,7314} = 6,2660$$

Dla drugiego przybliżenia otrzymamy

$$q_{kr} = 3,934 \cdot \frac{N\pi^2}{b^2} \text{ zamiast wartości ściślej } q_{kr} = \frac{4N\pi^2}{b^2}.$$

Résumé

De l'application du calcul des differences finies aux problèmes de la mécanique de construction

Ce mémoire traite de l'application du calcul des différences aux problèmes de la mécanique de construction concernant le flambage et la vibration des poutres et des plaques. La solution du système des équations linéaires qu'on obtient en substituant les coefficients différentiels aux dérivées dans les équations aux différences, y est amenée à l'expression propre à l'iteration. L'auteur envisage l'analogie advenant dans la résolution des dites équations et dans celle des équations intégrales, ainsi que des équations aux différences.

(Praca wpłynęła do Redakcji, dnia 16. I. 1952 r.)