

P O L S K A A K A D E M I A N A U K

K O M I T E T I N Ż Y N I E R I I Ł Ą D O W E J

ARCHIWUM INŻYNIERII ŁĄDOWEJ

TOM III

ZESZYT 4

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

WARSZAWA

1957

STAN NAPRĘŻENIA W GRUBEJ PŁYCE KOŁOWEJ, WYWOŁANY DZIAŁANIEM POŁA TEMPERATURY

WITOLD NOWACKI (Warszawa)

W pracy niniejszej wyznaczmy stan naprężenia w grubej płycie kołowej o grubości $2h$ i średnicy $2a$ wywołany działaniem osiowo symetrycznego pola temperatury. Rozpatrzmy w części pierwszej przypadek symetrycznego względem płaszczyzny $z = 0$, w części drugiej antysymetrycznego względem tej płaszczyzny pola temperatury. Dążyć będziemy do tego, aby w płaszczyznach $z = \pm h$ spełnione zostały w ścisły sposób wszelkie warunki brzegowe, zadawalając się spełnieniem warunków brzegowych odnoszących się do naprężeń na powierzchni $r = a$ w sposób przybliżony.

1. Niech dane będzie ustalone pole temperatury, określone równaniem różniczkowym

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

z warunkami brzegowymi

$$(1.2) \quad T(r, \pm h) = \begin{cases} f(r) & \text{dla } 0 < r < b, \\ 0 & \text{dla } b < r < a, \end{cases}$$

$$T(a, z) = 0,$$

gdzie $2b$ oznacza średnicę koła, stanowiącego obszar ekspozycji ciepła.

Rozwiązaniem równania (1.1) wraz z warunkami (1.2) jest

$$(1.3) \quad T(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cosh a_n z}{\cosh a_n h} J_0(a_n r),$$

gdzie A_n jest współczynnikiem rozwinięcia funkcji $T(r, \pm h)$ w szereg funkcji Bessela.

$$(1.4) \quad T(r, \pm h) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r)$$

przy założeniu, że wielkości $a_n a$ są pierwiastkami równania $J_0(a_n a) = 0$.

Dla wyznaczenia składowych stanu naprężenia wygodnie będzie posłużyć się funkcją termosprężystego przemieszczenia Φ , przy czym

$$(1.5) \quad \bar{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \bar{w} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Wprowadzenie tych związków do trzech równań przemieszczeniowych teorii sprężystości [1] sprowadza je do jednego równania

$$(1.6) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \vartheta_0 T, \quad \vartheta_0 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t,$$

gdzie ν jest liczbą Poissona, α_t współczynnikiem rozszerzalności cieplnej.

Poszukujemy takiego rozwiązania szczególnego równania (1.6), które w płaszczyznach $z = \pm h$ oraz na powierzchni $r = a$ spełni warunek $\Phi = 0$. Taką całką szczególną jest funkcja

$$(1.7) \quad \Phi = \frac{\vartheta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0(a_n r)}{a_n^2 \cosh a_n h} Z_n(z),$$

gdzie

$$Z_n(z) = a_n z \sinh a_n z - a_n h \operatorname{tgh} a_n h \cosh a_n z.$$

Składowe stanu naprężenia (σ_{ij}) uzyskamy ze związków [1]

$$(1.8) \quad \sigma_{ij} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial i \partial j} - \nabla^2 \Phi \delta_{ij} \right),$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem K r o n n e c k e r a.

Otrzymamy kolejno

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \nabla^2 \Phi \right) = -G \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh a_n h} \{ [(2 - a_n h \operatorname{tgh} a_n h) \cosh a_n z + a_n z \sinh a_n z] J_0(a_n r) - \\ &\quad - [a_n z \sinh a_n z - a_n h \operatorname{tgh} a_n h \cosh a_n z] \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \}, \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} &= 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \nabla^2 \Phi \right) = -G \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh a_n h} \\ &\quad \{ [(2 - a_n h \operatorname{tgh} a_n h) \cosh a_n z + a_n z \sinh a_n z] J_0(a_n r) - \\ &\quad - \left(J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right) (a_n z \sinh a_n z - a_n h \operatorname{tgh} a_n h \cosh a_n z) \}, \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = 2 G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \nabla^2 \Phi \right) = G \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0(a_n r)}{\cosh a_n h}$$

$$(a_n z \sinh a_n z - a_n h \operatorname{tgh} a_n h \cosh a_n z),$$

$$\bar{\alpha}_{rz} = 2 G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} = - G \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n r)}{\cosh a_n h} [(1 -$$

$$- a_n h \operatorname{tgh} a_n h) \sinh a_n z + a_n z \cosh a_n z],$$

$$\bar{\sigma}_{r\varphi} = 0.$$

Korzystając ze związków (1.5) znajdziemy, że

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{\vartheta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0(a_n r)}{a_n \cosh a_n h} (a_n z \sinh a_n z - \\ &- a_n h \operatorname{tgh} a_n h \cosh a_n z), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\vartheta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0(a_n r)}{a_n \cosh a_n h} [(1 - a_n h \operatorname{tgh} a_n h) \sinh a_n z + \\ &+ a_n z \cosh a_n z]. \end{aligned}$$

Żądamy, aby płaszczyzny $z = \pm h$ i powierzchnia $r = a$ płyty wolne były od naprężeń. Stan naprężeń $(\bar{\sigma}_{ij})$ spełnia jednak tylko część warunków brzegowych. W płaszczyznach $z = \pm h$ równe zero jest jedynie naprężenie $\bar{\sigma}_{zz}$. Dla zniweczenia w płaszczyznach $z = \pm h$ naprężeń $\bar{\sigma}_{rz}$ dodamy do stanu naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$ drugi stan naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$. Z uwagi na to, że mamy do czynienia z zagadnieniem osiowo symetrycznym, wyrazimy składowe stanu naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ przy pomocy funkcji L o v e'a φ [2].

Mamy zatem

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{rr} &= \frac{2 G}{1 - 2 \nu} \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right], \\ \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} &= \frac{2 G}{1 - 2 \nu} \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right], \\ \bar{\bar{\sigma}}_{zz} &= \frac{2 G}{1 - 2 \nu} \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\ \bar{\bar{\sigma}}_{rz} &= \frac{2 G}{1 - 2 \nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ponadto mamy

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \\ \bar{w} &= \frac{1}{1-2\nu} \left[2(1-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

Funkcja φ spełnić winna równanie biharmoniczne

$$(1.13) \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Rozwiązanie równania (1.13) przyjmujemy w postaci

$$(1.14) \quad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(z) J_0(a_n r),$$

gdzie

$$M_n(z) = C_n \sinh a_n z + B_n a_n z \cosh a_n z.$$

Współczynniki C_n , D_n wyznaczymy z warunków brzegowych dla $z = \pm h$

$$(1.15) \quad \bar{\sigma}_{zz} + \bar{\sigma}_{zz} = 0, \quad \bar{\sigma}_{rz} + \bar{\sigma}_{rz} = 0.$$

Otrzymamy

$$(1.16) \quad \begin{aligned} A_n &= (1-2\nu a_n h \tanh a_n h) B_n, \\ B_n &= \frac{(1-2\nu) A_n \vartheta_0}{2 a_n^3 \cosh a_n h}. \end{aligned}$$

Wstawiając tak określoną funkcję φ do wzorów (1.11) i (1.12) otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= G \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh a_n h} \{ [a_n z \sinh a_n z + (2 - a_n h \tanh a_n h) \cosh a_n z] J_0(a_n r) - [(2 - 2\nu - a_n h \tanh a_n h) \cosh a_n z + a_n z \sinh a_n z] \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \}, \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} &= G \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh a_n h} \left\{ 2\nu J_0(a_n r) \cosh a_n z + \left[(2 - 2\nu - a_n h \tanh a_n h) \cosh a_n z + a_n z \sinh a_n z \right] \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{zz} &= -G \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0(a_n r)}{\cosh a_n h} Z_n(z), \\
 \bar{\sigma}_{rz} &= G \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n r)}{\cosh a_n h} \left[(1 - a_n h \operatorname{tgh} a_n h) \right. \\
 (1.17) \quad &\left. \sinh a_n z + a_n z \cosh a_n z \right], \\
 \bar{u} &= \frac{\vartheta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n r)}{a_n \cosh a_n h} \left[(2 - 2\nu - a_n h \operatorname{tgh} a_n h) \cosh a_n z + \right. \\
 &\quad \left. + a_n z \sinh a_n z \right], \\
 \bar{w} &= \frac{\vartheta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0(a_n r)}{a_n \cosh a_n h} \left[(1 - 2\nu + a_n h \operatorname{tgh} a_n h) \sinh a_n z - \right. \\
 &\quad \left. - a_n z \cosh a_n z \right],
 \end{aligned}$$

Dodając do siebie składowe stanu naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$ oraz $(\bar{\sigma}'_{ij})$ otrzymamy składowe stanu naprężenia $(\bar{\sigma}''_{ij})$

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{rr} &= -2G(1-\nu)\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cosh a_n z J_1(a_n r)}{\cosh a_n h a_n r}, \\
 (1.18) \quad \sigma'_{\varphi\varphi} &= -2G(1-\nu)\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cosh a_n z}{\cosh a_n h} \left[J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right], \\
 \sigma'_{zz} &= 0, \quad \sigma'_{rz} = 0, \quad \sigma'_{r\varphi} = 0.
 \end{aligned}$$

Charakterystycznym jest tu fakt, że naprężenia σ'_{zz} i σ_{rz} są równe zeru dla dowolnego punktu płyty. Ze wzorów (1.18) wynika, że brzegi $z = \pm h$ są wolne od naprężeń. Nie znika jednak naprężenie radialne na brzegu $r = a$. Na brzegu tym jest

$$\sigma'_{rr} + \sigma'_{\varphi\varphi}|_{r=a} = 0.$$

Stan przemieszczenia płyty charakteryzują funkcje

$$\begin{aligned}
 u' &= (1-\nu)\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n r)}{a_n \cosh a_n h} \cosh a_n z, \\
 (1.19) \quad w' &= (1-\nu)\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0(a_n r)}{a_n \cosh a_n h} \sinh a_n z.
 \end{aligned}$$

Przemieszczenie w' jest równe zeru dla $r = a$ oraz dla $z = 0$ przy $r < a$. Naprężenia σ'_{rr} , będące na brzegu $r = a$ jedynie funkcją zmiennej z , tworzą wypadkową

$$(1.20) \quad N = \int_{-h}^h \sigma'_{rr} / r = a \, dz = -4 G (1 - \nu) \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n a)}{a a_n^2} \operatorname{tgh} \alpha_n h.$$

Dodajmy do stanu naprężenia (σ'_{ij}) stan naprężenia (σ''_{ij}) stanowiący stan równomiernego rozciągania w kierunku promienia r . Ostateczne składowe stanu naprężenia oznaczmy przez (σ_{ij}) , a przynależne temu stanowi przemieszczenie przez u, w .

Otrzymamy zatem [3]; [4]

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma'_{rr} - \frac{N}{2h}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma'_{\varphi\varphi} - \frac{N}{2h}, \\ \sigma_{zz} &= 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \\ u &= u' - \frac{1-\nu}{2G(1+\nu)} \frac{rN}{2h}, \quad w = w' + \frac{\nu z N}{2(1+\nu)Gh}. \end{aligned}$$

W ten sposób spełniony jest w sposób ścisły warunek braku naprężeń w płaszczyznach $z = \pm h$, a w sposób przybliżony na brzegu $r = a$. Znamienny jest fakt, że w płycie brak naprężeń σ_{zz} i σ_{rz} .

Rozpatrzmy przypadek szczególny, w którym $f(r) = V_0 = \text{const}$ na powierzchni koła o promieniu b . Wtedy

$$(1.22) \quad A_n = \frac{2}{a I_1^2(a_n a)} \int_0^b f(\varrho) J_0(a \varrho) \varrho \, d\varrho = \frac{2bV_0}{a} \frac{J_1(a_n b)}{(a_n a) J_1^2(a_n a)}.$$

Ze wzorów (1.21) otrzymamy

$$(1.23) \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = -V_0 G (1 - \nu) \vartheta_0 \frac{2b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(a_n b) J_0(a_n r) \cosh \alpha_n z}{a_n a J_1^2(a_n a) \cosh \alpha_n h} - \frac{N}{h}.$$

Dla $z = h$, zważywszy, że

$$(1.24) \quad \frac{2b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(a_n b) J_0(a_n r)}{a_n a J_1^2(a_n a)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < r < b, \\ 0 & \text{dla } b < r < a, \end{cases}$$

znajdziemy

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} /_{z=h} &= -E a_t V_0 - \frac{N}{h} & \text{dla } 0 < r < b, \\ \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} /_{z=h} &= -\frac{N}{h} & \text{dla } b < r < a. \end{aligned}$$

Tutaj $E = 2G(1 + \nu)$ jest modułem sprężystości. Wzór (1.24) wyraża nieciągłość funkcji

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}|_{z=h}$$

w przekroju $r = b$. Na rysunku 1 przedstawiono wykresy naprężeń

$$\sigma_{rr}/r=0 \text{ i } \sigma_{rr}/z=0$$

dla płyty o wysokości $2h = a$ oraz o promieniu koła ekspozycji cieplnej $b = \frac{a}{2}$. Na rysunku 2 przedstawiono wykresy funkcji $T(O, z)$, $T(r, h)$.

Interesujące będzie przejście z płyty grubej do płyty cienkiej (tarczy). Dla malejących wartości h/a wykonać należy przejście asymptotyczne. W tym granicznym przypadku rozkład temperatury i rozkład naprężeń niezależne będą od zmiennej z .

Przyjmując we wzorach na pole temperatury i na naprężenia

$$\frac{\cosh a_n z}{\cosh a_n h} \approx 1, \quad \frac{\sinh a_n z}{\sinh a_n h} \approx \frac{z}{h}$$

otrzymamy

$$(1.25) \quad T(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r)$$

oraz

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -E a_t \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{J_1(a_n r)}{a_n r} - \frac{J_1(a_n a)}{a_n a} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -E a_t \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} + \frac{J_1(a_n a)}{a_n a} \right]. \end{aligned}$$

Dla $r = a$ jest $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0$.

Wreszcie w przypadku $f(r) = V_0 = \text{const}$ na kole o promieniu b jest

$$(1.27) \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = -E a_t V_0 \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < r < b \\ 0 & \text{dla } b < r < a. \end{cases}$$

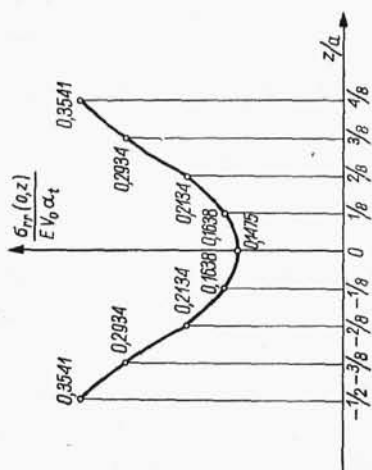
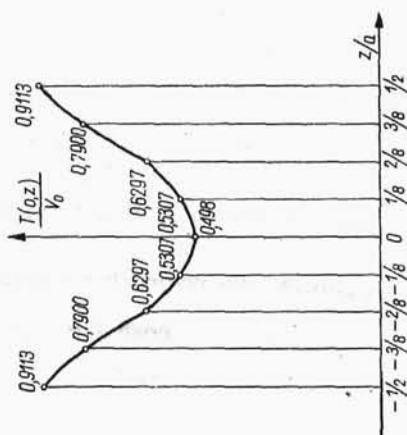
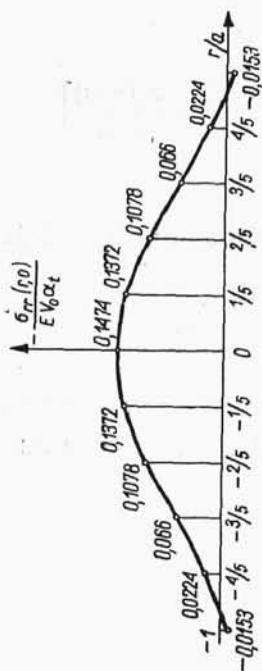
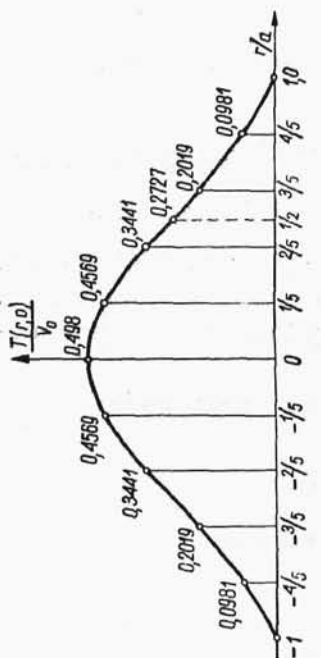
Rozważmy wreszcie przypadek, w którym $a \rightarrow \infty$, a więc kiedy płyta gruba o wysokości $2h$ rozciąga się nieograniczenie w kierunku promienia r .

Wykonując transformację całkową Hankela na równaniu (1.1) i przyjmując warunek brzegowy (1.2) w postaci

$$(1.28) \quad T(r, \pm h) = \begin{cases} f(r) & \text{dla } 0 < r < b \\ 0 & \text{dla } b < r \end{cases}$$

oraz

$$T(a, z) = 0,$$



Rys. 2

Rys. 1

gdzie

$$T(r, \pm h) = \int_0^{\infty} A(a) J_0(ar) da$$

otrzymamy

$$(1.29) \quad T(r, z) = \int_0^{\infty} A(a) \frac{\cosh az}{\cosh ah} J_0(ar) da.$$

Stosując konsekwentnie transformację całkową Hankela do wyznaczenia funkcji Φ i naprężeń $\bar{\sigma}_{ij}$ oraz $\bar{\sigma}_{ij}$, otrzymamy, że

$$(1.30) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -2G(1-\nu)\vartheta_0 \int_0^{\infty} A(a) \frac{\cosh az}{\cosh ah} \frac{J_1(ar)}{ar} da, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -2G(1-\nu)\vartheta_0 \int_0^{\infty} A(a) \frac{\cosh az}{\cosh ah} \left[J_0(ar) - \frac{J_1(ar)}{ar} \right] da, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rz} = \sigma_{r\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Są to ostateczne wyrażenia dla składowych stanu naprężenia. Spełnione są tu warunki braku naprężeń w płaszczyznach $z = \pm h$. W nieskończoności (dla $r \rightarrow \infty$) wszelkie naprężenia są równe zero. Znamienne jest tu stwierdzenie, że naprężenia σ_{zz} , σ_{rz} są równe zero w każdym punkcie płyty.

Stan przemieszczenia określony jest wzorami

$$(1.31) \quad \begin{aligned} u &= (1-\nu)\vartheta_0 \int_0^{\infty} \frac{A(a)}{a} \frac{\cosh az}{\cosh ah} J_1(ar) da, \\ w &= (1-\nu)\vartheta_0 \int_0^{\infty} \frac{A(a)}{a} \frac{\sinh az}{\sinh ah} J_0(ar) da. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy przypadek szczególny, w którym $f(r) = V_0 = \text{const}$, w obrębie koła o promieniu b , a poza tym kołem $f(r) = 0$.

Wtedy

$$(1.32) \quad \begin{aligned} T(r, \pm h) &= \begin{cases} V_0 & \text{dla } 0 < r < b, \\ 0 & \text{dla } b < r \end{cases} \\ T(r, \pm h) &= V_0 b \int_0^{\infty} J_1(ab) J_0(ar) da, \end{aligned}$$

stąd

$$A(a) = V_0 b J_1(ab).$$

W tym szczególnym przypadku składowe stanu naprężenia wyrażone są wzorami

$$(1.33) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -2 G V_0 b (1-\nu) \vartheta_0 \int_0^\infty \frac{J_1(ab) J_0(ar)}{ar} \frac{\cosh az}{\cosh ah} da, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2 G V_0 b (1-\nu) \vartheta_0 \int_0^\infty J_1(ab) \frac{\cosh az}{\cosh ah} \left(J_0(ar) - \frac{J_1(ar)}{ar} \right) da, \\ \sigma_{zz} &= 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Dla $z = h$ otrzymamy

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}|_{z=h} = -E V_0 b a_t \int_0^\infty J_1(ar) (J_0 ar) da = -E V_0 a_t \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < r < b, \\ 0 & \text{dla } b < r. \end{cases}$$

W przypadku płyty cienkiej otrzymamy

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -E a_t V_0 b \int_0^\infty \frac{J_1(ab) J_1(ar)}{ar} da = \\ &= \begin{cases} -\frac{E V_0 a_t}{2} & \text{dla } 0 < r < b, \\ -\frac{E V_0 a_t}{2} \frac{b^2}{r^2} & \text{dla } b < r. \end{cases} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -E a_t V_0 b \int_0^\infty J_1(ab) \left[J_0(ar) - \frac{J_1(ar)}{ar} \right] da = \\ &= \begin{cases} -\frac{E V_0 a_t}{2} & \text{dla } 0 < r < b, \\ \frac{E V_0 a_t}{2} \frac{b^2}{r^2} & \text{dla } b < r. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Niech dane będzie pole temperatury określone równaniem różniczkowym

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad T(r, \pm h) = \begin{cases} \pm f(r) & \text{dla } 0 < r < b, \\ 0 & \text{dla } b < r < a. \end{cases}$$

Rozwiązaniem równania (2.1) z warunkami brzegowymi (2.2) jest

$$(2.3) \quad T(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh a_n z}{\sinh a_n h} J_0(a_n r), \quad J_0(a_n a) = 0,$$

gdzie A_n jest współczynnikiem rozwinięcia funkcji $f(r)$ w szereg funkcji Bessela.

Całka szczególna równania (1.6) przy założeniu dla $z = \pm h$ oraz $r = a$ ma postać

$$(2.4) \quad \Phi(r, z) = \frac{\vartheta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0(a_n r) H_n(z)}{a_n^2 \sinh a_n h},$$

gdzie

$$H_n(z) = a_n z \cosh a_n z - a_n h \operatorname{ctgh} a_n h \sinh a_n z.$$

Postępując analogicznie jak w części pierwszej, wyznaczymy składowe stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ ze wzorów (1.8) i dodamy do nich składowe stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ określone wzorami (1.11).

Funkcję φ Love'a przyjmujemy w postaci

$$(2.5) \quad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z) J_0(a_n r),$$

gdzie

$$P_n(z) = C_n \cosh a_n z + B_n a_n z \sinh a_n z.$$

Z warunków brzegowych dla $z = \pm h$

$$(2.6) \quad \bar{\sigma}_{rz} + \bar{\sigma}_{rz}/z=h = 0, \quad \bar{\sigma}_{sz} + \bar{\sigma}_{sz}/z=h = 0.$$

znajdziemy, że

$$(2.7) \quad \begin{aligned} C_n &= (1 - 2\nu - a_n h \operatorname{ctgh} a_n h) B_n \\ B_n &= \frac{(1 - 2\nu) \vartheta_0 A_n}{2 a_n^3 \sinh a_n h}. \end{aligned}$$

Dodając do siebie składowe stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ i $\bar{\sigma}_{ij}$ otrzymamy

$$\sigma'_{rr} = -2G(1 - \nu) \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh a_n z}{\sinh a_n h} \frac{J_1(a_n r)}{a_n r},$$

$$(2.8) \quad \sigma'_{\varphi\varphi} = -2G(1-\nu)\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh a_n z}{\sinh a_n h} \left[J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right],$$

$$\sigma'_{zz} = 0, \quad \sigma'_{rz} = 0, \quad \sigma'_{r\varphi} = 0.$$

Składowe stanu przemieszczenia określone są wzorami

$$(2.9) \quad u' = (1-\nu)\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n r)}{a_n \sinh a_n h} \sinh a_n z,$$

$$w' = (1-\nu)\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0(a_n r)}{a_n \sinh a_n h} \cosh a_n z.$$

Ze wzorów (2.8) wynika, że w sposób ścisły spełnione są warunki brzegowe w płaszczyznach $z = \pm h$. Dla $r=a$ mamy różne od zera (przy $z > 0$) naprężenie

$$(2.10) \quad \sigma'_{rr}/r=a = -2G(1-\nu)\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n a)}{a_n a} \frac{\sinh a_n z}{\sinh a_n h}.$$

Naprężenie to wywołuje moment zginający na walcu kołowym $r = a$

$$(2.11) \quad M = \int_{-h}^h \sigma'_{rr}/r=a z dz = 4G(1-\nu)\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n a)}{a a_n^3} (1 - a_n h \operatorname{ctgh} a_n h).$$

Moment ten zniweczymy, poddając płytę działaniu zgięcia kulistego momentem — M , równomiernie rozłożonym na brzegu $r = a$. W wyniku tego działania powstaną naprężenia [3], [4]

$$(2.12) \quad \sigma''_{rr} = -\frac{3}{2} \frac{Mz}{h^3} = \sigma''_{\varphi\varphi}, \quad \sigma''_{zz} = 0, \quad \sigma''_{rz} = 0, \quad \sigma''_{r\varphi} = 0,$$

oraz przemieszczenia

$$(2.13) \quad u'' = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{z r}{G} \frac{3}{4} \frac{M}{h^3}, \quad w'' = \frac{3}{4} \frac{M}{h^3} \cdot \frac{2\nu z^2 + (1-\nu)r^2}{2G(1+\nu)}.$$

Ostateczne składowe stanu naprężenia σ_{ij} otrzymamy dodając do siebie składowe stanu σ'_{ij} i σ''_{ij} . Stan σ_{ij} charakteryzuje się tym, że naprężenia σ_{rz} i σ_{zz} są równe zero dla dowolnego punktu płyty.

Rozpatrzmy przypadek szczególny, w którym $f(r) = V_0 = \text{const.}$ na powierzchni koła o promieniu b .

Wtedy

$$A_n = \frac{2bV_0}{a} \frac{J_1(a_n b)}{(a_n a) J_1^2(a_n a)}.$$

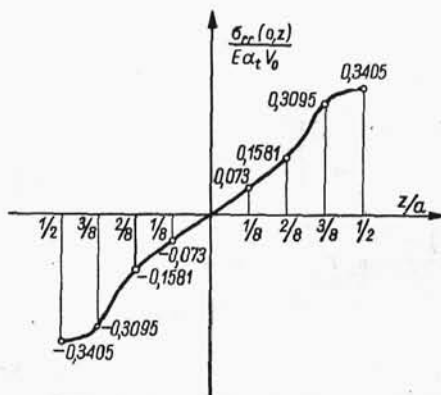
Ze wzorów (2.8) i (2.12) otrzymamy

$$(2.14) \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = -G V_0 (1 - \nu) \vartheta_0 \frac{2b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(a_n b) J_0(a_n r) \sinh a_n z}{a_n J_1^2(a_n a) \sinh a_n h} - \frac{3 Mz}{h^3}.$$

Dla $z = h$, zważywszy na wzór (1.24) otrzymamy

$$(2.15) \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = \begin{cases} -E V_0 a_i - \frac{3 Mz}{h^3} & \text{dla } 0 < r < b, \\ -\frac{3 Mz}{h^3} & \text{dla } b < r < a. \end{cases}$$

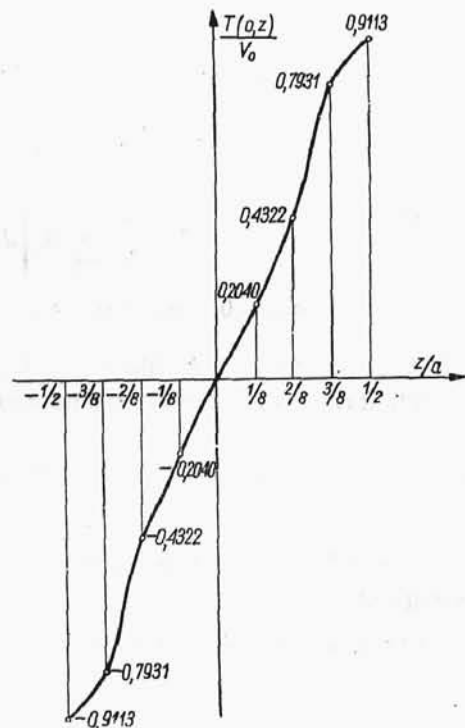
Na rysunku 3 przedstawiono wykresy naprężeń $\sigma_{rr}/r=0$ i $\sigma_{rr}/z=0$ dla płyty o wysokości $h = \frac{a}{2}$ oraz o promieniu koła ekspozycji cieplnej $b = \frac{a}{2}$.



Rys. 3.

Na rysunku 4 przedstawiono wykresy funkcji $T(0, z)$.

Podobnie jak w części pierwszej wykonamy i tu przejście od płyty grubej do płyty cienkiej. Ze zmniejszeniem wysokości płyty rozkład temperatury w kierunku osi z będzie się zbliżać do zmienności liniowej



Rys. 4.

$$(2.16) \quad T(r, z) = \frac{z}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r).$$

Podobnie w sposób liniowy w kierunku osi z zmieniać się będą naprężenia σ'_{ij}

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{rr} &= -E a_t \frac{z}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n r)}{a_n r}, \\
 \sigma'_{\varphi\varphi} &= -E a_t \frac{z}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right], \\
 \sigma'_{zz} &= 0, \quad \sigma'_{rz} = 0, \quad \sigma'_{r\varphi} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Składowe stanu naprężenia σ'_{ij} przyjmą postać

$$\begin{aligned}
 \sigma''_{rr} = \sigma''_{\varphi\varphi} &= -\frac{3 Mz}{2 h^3} = -3 E a_t \frac{z}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n a)}{a_n a}, \\
 \lim_{a_n h \rightarrow 0} \frac{1 - a_n h \operatorname{ctgh} a_n h}{(a_n h)^2} &= E a_t \frac{z}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n a)}{a_n a}, \\
 \sigma''_{zz} &= 0, \quad \sigma''_{rz} = 0, \quad \sigma''_{r\varphi} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Dodając do siebie stany naprężenia σ'_{ij} i σ''_{ij} otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -E a_t \frac{z}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{J_1(a_n r)}{a_n r} - \frac{J_1(a_n a)}{a_n a} \right], \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= -E a_t \frac{z}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} + \frac{J_1(a_n a)}{a_n a} \right], \\
 \sigma_{zz} &= 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Widocznym jest, że dla $r = a$ jest $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$. Wreszcie w przypadku $f(r) = V_0 = \text{const.}$ na powierzchni koła o promieniu $r = b$ jest

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = -E V_0 a_t \frac{z}{h} \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < r < b, \\ 0 & \text{dla } b < r < a. \end{cases}
 \tag{2.20}$$

Rozważmy wreszcie przypadek nieograniczonej warstwy sprężystej o grubości $2h$.

Stosując transformację całkową H a n k e l a znajdziemy, że

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} A(a) \frac{\sinh a z}{\sinh a h} J_0(a r) da.
 \tag{2.21}$$

Przyjęto tu, że

$$\int_0^a A(a) J_0(a r) da = \begin{cases} f(r) & \text{dla } 0 < r < b, \\ 0 & \text{dla } b < r. \end{cases}
 \tag{2.22}$$

Składowe stanu naprężenia przyjmą tu postać

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad \sigma_{rr} &= -E a_t \int_0^\infty A(a) \frac{\sinh az}{\sinh ah} \frac{J_1(ar)}{ar} da, \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= -E a_t \int_0^\infty A(a) \frac{\sinh az}{\sinh ah} \left[J_0(ar) - \frac{J_1(ar)}{ar} \right] da, \\
 \sigma_{zz} &= 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0.
 \end{aligned}$$

Naprężenia σ_{zz} i σ_{rz} są równe zeru w każdym punkcie płyty; dla $r \rightarrow \infty$ równe zeru są naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$.

Dla $z=h$ i przy założeniu, że $f(r)=V_0=\text{const}$ znajdziemy, że

$$(2.24) \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}|_{z=h} = -E a_t V_0 \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < r < b, \\ 0 & \text{dla } b < r. \end{cases}$$

W przypadku szczególnym nieograniczonej w kierunku promienia płyty „cienkiej” o wysokości $2h$, składowe stanu naprężenia wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}
 (2.25) \quad \sigma_{rr} &= -E a_t V_0 b \frac{z}{h} \int_0^\infty \frac{J_1(ab) J_1(ar)}{ar} da = \\
 &= \begin{cases} -\frac{E a_t V_0}{2} \frac{z}{h} & \text{dla } 0 < r < b, \\ -\frac{E a_t V_0}{2} \frac{z}{h} \frac{b^2}{r^2} & \text{dla } b < r, \end{cases} \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= -E a_t V_0 b \frac{z}{h} \int_0^\infty J_1(ab) \left[J_0(ar) - \frac{J_1(ar)}{ar} \right] da = \\
 &= \begin{cases} -\frac{E V_0 a_t}{2} \frac{z}{h} & \text{dla } 0 < r < b, \\ \frac{E V_0 a_t}{2} \frac{z}{h} \frac{b^2}{r^2} & \text{dla } b < r, \end{cases} \\
 \sigma_{zz} &= 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0.
 \end{aligned}$$

3. Rozpatrzmy wreszcie przypadek, w którym pole temperatury określone jest równaniem (1.1) z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad T(r, h) &= \begin{cases} f(r) & \text{dla } 0 < r < b, \\ 0 & \text{dla } b < r < a. \end{cases} \\
 T(r, -h) &= 0, \quad T(a, z) = 0.
 \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów (1.3) i (2.3) znajdziemy, że

$$(3.2) \quad T(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) F_n(z),$$

gdzie

$$F_n(z) = \frac{\cosh a_n z}{\cosh a_n h} + \frac{\sinh a_n z}{\sinh a_n h}.$$

Składowe stanu naprężenia σ_{ij} dane są wzorami

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma'_{rr} &= -\frac{E a_t}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(z) \frac{J_2(a_n r)}{a_n r}, \\ \sigma'_{\varphi\varphi} &= -\frac{E a_t}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(z) \left[J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right], \\ \sigma'_{zz} &= 0, \quad \sigma'_{rz} = 0, \quad \sigma'_{r\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Dalej znajdziemy, że

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u' &= (1-\nu) \frac{\vartheta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(z) \frac{J_1(a_n r)}{a_n r}, \\ w' &= (1-\nu) \frac{\vartheta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n d F_n(z)}{dz} \frac{J_0(a_n r)}{a_n^2}. \end{aligned}$$

Ze wzorów (3.3) widocznym jest, że płaszczyzny $z = \pm h$ są wolne od naprężeń. Dla $z = -h$ mamy ponadto $\sigma'_{rr} = \sigma'_{\varphi\varphi} = 0$. Naprężenia σ'_{zz} , σ'_{rz} są równe zeru w każdym punkcie płyty. Na brzegu $r=a$ nie znikają naprężenia $\sigma_{rr}/r=a$. Tworzą one momenty zginające M i siły osiowe N , jednostajnie rozłożone na brzegu $r=a$. Działanie tych momentów i sił osiowych skompensować można dodaniem stanu naprężenia σ''_{ij} , w którym

$$(3.5) \quad \sigma''_{rr} = \sigma''_{\varphi\varphi} = -\frac{3}{2} \frac{M z}{h^3} - \frac{N}{2 h}, \quad \sigma''_{zz} = \sigma''_{rz} = \sigma''_{r\varphi} = 0,$$

a M i N dane są związkami

$$\begin{aligned} M &= E a_t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n a)}{a a_n^3} (1 - a_n h \operatorname{ctgh} a_n h), \\ N &= E a_t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_1(a_n a)}{a a_n^3} \operatorname{tgh} a_n h. \end{aligned}$$

W stanie naprężenia $\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma'_{ij}$ spełnione są w sposób ścisły warunki brzegowe $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{rz} = 0$ w płaszczyznach $z = \pm h$ i w sposób przybliżony na brzegu $r=a$.

Stan naprężenia jest tym charakterystyczny, że w każdym punkcie płyty jest $\sigma_{zz} = 0$ oraz $\sigma_{rz} = 0$.

Literatura cytowana w tekście

- [1] E. Melan, H. Parcus: *Wärmespannungen stationärer Temperaturfelder*, Vienna 1953.
- [2] A. E. Love: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, London 1927.
- [3] A. Timpe: *Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern*, Z.A.M.M. Vol., 1924.
- [4] A. N a d a i: *Elastische Platten*, Berlin 1925.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЛСТОЙ КРУГЛОЙ ПЛИТЕ, ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Резюме

В работе рассмотрено напряженное состояние в толстой круглой плите вызванное действием стационарного, осесимметричного температурного поля. В первом разделе обсуждено напряженное состояние от температурного поля симметричного относительно плоскости $z = 0$, во втором разделе от температурного поля антисимметричного относительно $z = 0$. В полученном решении точно удовлетворены все краевые условия, в плоскостях $z = \pm h$, а на поверхности $r = a$ краевые условия удовлетворяются приближенно. Именно на краю $r = a$ напряжения σ'_{rr} создают изгибающие моменты и осевые силы. Действие этих усилий компенсируется дополнительно введенным напряженным состоянием (σ'_{ij}) — путём наложения сферического изгиба и всестороннего растяжения. Характерная особенность напряженного состояния вызванного в толстой плите действием температурного поля (при отсутствии источников тепла внутри плиты) состоит в том, что напряжения σ_{rz} и σ_{zz} равны нулю во всякой точке плиты.

THE STATE OF STRESS IN A THICK CIRCULAR PLATE DUE TO THE ACTION OF A TEMPERATURE FIELD

Summary

The state of stress in a thick circular plate caused by the action of a steady axially symmetric temperature field is considered. In the first article the state of stress due to the action of a temperature field symmetric in relation to the $z = 0$ plane is considered. The state of stress considered in the second article is that caused by a temperature field antisymmetric in relation to that plane $z = 0$.

All the boundary conditions are satisfied in the $z = \pm h$ planes in an accurate manner and along the edge $r = a$ — in an approximate manner. The stress σ'_{rr} at the edge ($r = a$) constitutes bending moments and axial forces. The action of these quantities is balanced by introducing an additional state of stress (σ'_{ij}) by superposing a spherical bending and a alldirectional tension. The state of stress in a thick plate due to a temperature field (with no heat source inside the plate) is characterized by the fact that the stresses σ_{rz} and σ_{zz} are zero at every point of the plate.

Pracę złożono w Redakcji dnia 18.V.1957 r.