

POLSKA AKADEMIA NAUK  
KOMITET INŻYNIERII LĄDOWEJ

# ARCHIWUM INŻYNIERII LĄDOWEJ

TOM I

ZESZYT 1-2

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

WARSZAWA

1955

## STATECZNOŚĆ RUSZTÓW WZMOCNIONYCH PŁYTĄ

Witold Nowacki i Artur Kacner (Warszawa)

Praca przedstawiona na zebraniu naukowym  
Zakładu Mechaniki, Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w dniu 8 listopada 1954 r.

W wielu konstrukcjach inżynierskich, lądowych i wodnych, w konstrukcjach lotniczych i okrętowych występują układy prętowe połączone z płytą, w których pręty przenoszą siły podłużne. W praktyce konstrukcyjnej albo nie uwzględnia się w ogóle współdziałania prętów z płytą, lub też przyjmuje się tzw. »szerokość współdziałającą« będącą pewną wielokrotnością grubości płyty, często dość dowolnie określaną.

Zadaniem niniejszej pracy jest podanie ścisłego rozwiązania stateczności układu prętów wzmocnionej płytą w oparciu o teorię płyt.

Rozwiązania, niżej podane, dotyczą układów, w których oś zginania płyty pokrywa się z osią zginania prętów; dzieje się to wówczas, gdy pręty umieszczone są symetrycznie w stosunku do płaszczyzny środkowej płyty.

Zakładamy, że między żebrami a płytą nie wystąpią siły tnące. Założenie to, postulujące przesuwanie się prętów rusztu po płycie bez tarcia, nie jest oczywiście zgodne z rzeczywistością. Jak wykazały rozważania E. Chwalli [1], nieuwzględnienie sił tnących daje nieco niższe wartości sił krytycznych. Jest ponadto rzeczą widoczną, że ze zwiększeniem ilości prętów ściskanych dokładność wyznaczenia sił krytycznych podanym tu sposobem wzrasta. Dodajmy wreszcie, że schemat tu przyjęty jest typowy dla wszelkich znanych rozwiązań w zakresie stateczności płyt wzmocnionych żebrami (poza rozwiązaniem E. Chwalli dotyczącym szczególnego przypadku wyboczenia płyty wzmocnionej żebrami).

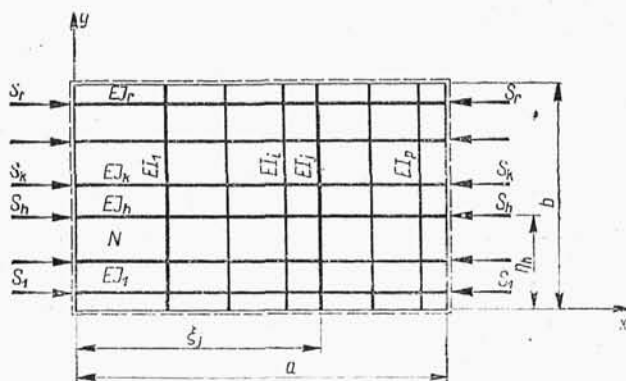
Dalej pomijając będziemy wpływ sztywności na skręcanie prętów. Rozważania Fr. Bleicha [2] i innych autorów wykazały, że wpływ ten jest nieznaczny. Niemniej jednak podano, w końcowej części pracy, drogę prowadzącą do uwzględnienia tego wpływu.

Wreszcie zakładamy, że kontakt zebra z płytą odbywa się wzdłuż linii prostych; sprowadzamy zatem kontakt powierzchniowy do kontaktu linowego.

Podane tu rozwiązania słuszne są dla obszaru sprężystego płyty i żeber. W naszych rozważaniach ograniczymy się najpierw do płyt prostokątnych na obwodzie swobodnie podpartych; możliwość rozszerzenia podanej tu metody rozwiązań na inne przypadki podparcia omówimy w ostatnich rozdziałach.

### 1. Ogólne związki

Niech dany będzie ruszt składający się z  $r$  prętów podłużnych o sztywności zginania  $EJ_k (k=1, 2, \dots, r)$  oraz z  $p$  prętów poprzecznych o sztywności zginania  $EI_i (i=1, 2, \dots, p)$ . Ruszt ten wzmocniony jest płytą



Rys. 1

prostokątną o sztywności na zginanie  $N$  i bokach  $a, b$ . Pręty podłużne ściśnięte są siłami skupionymi  $S_k (k=1, 2, \dots, r)$  (rys. 1).

Gdy siła  $S$  jest większa od krytycznej, ruszt i płyta wyginają się. Między rusztem a płytą powstają siły wzajemnego oddziaływania prostopadłe do płaszczyzny środkowej płyty. Oznac-

zamy je przez  $t^{(k)}(x)$  dla kierunku równoległego do osi  $X$ , przez  $q^{(j)}(y)$  dla kierunku równoległego do osi  $Y$ . Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty przyjmie w tym przypadku postać, [3],

$$(1.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{2}{a} \sum_{j=1}^p q_m^{(j)} \sin a_n \xi_j + \right. \\ \left. + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^r t_n^{(h)} \sin \beta_m \eta_h \right) \sin a_n x \sin \beta_m y \\ \left( a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b} \right).$$

Prawa strona powyższego równania jest rozwinięciem w podwójny szereg trygonometryczny sił wzajemnego oddziaływania rusztu i płyty wzdłuż prostych  $x = \xi_j (j=1, 2, \dots, p)$  oraz  $y = \eta_h (h=1, 2, \dots, r)$ . Wielkości  $q_m^{(j)}, t_n^{(h)}$  są współczynnikami Fouriera rozwinięcia funkcji  $q^{(j)}(y), t^{(h)}(x)$ . Rzędne powierzchni ugięcia płyty oznaczono tu przez  $w$ .

Ugięcie prętów określają następujące równania różniczkowe:

$$(1.2) \quad \begin{cases} EJ_k \frac{d^4 \bar{w}_k}{dx^4} + S_k \frac{d^2 \bar{w}_k}{dx^2} = -t^{(k)}(x) & (k = 1, 2, \dots, r), \\ EI_i \frac{d^4 \bar{w}_i}{dy^4} = -q^{(i)}(y) & (i = 1, 2, \dots, p). \end{cases}$$

Przyjmując rozwiązanie równania (1.1) w postaci

$$(1.3) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

spełniającej warunki swobodnego podparcia płyty wzdłuż obwodu, znajdziemy

$$(1.4) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{a} \sum_{j=1}^{j=p} q_m^{(j)} \sin a_n \xi_j + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^{h=r} t_n^{(h)} \sin \beta_m \eta_h}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$D_{n,m} = N(a_n^2 + \beta_m^2)^2.$$

Rozwijając z kolei  $t^{(k)}(x)$  oraz  $q^{(i)}(y)$  w pojedyncze szeregi trygonometryczne oraz przyjmując (przy założeniu swobodnego podparcia prętów) rozwiązania równań (1.2) w postaci

$$\bar{w}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n x, \quad \bar{w}_i(y) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \beta_m y$$

otrzymamy

$$(1.5) \quad \bar{w}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(k)} \sin a_n x}{EJ_k a_n^4 - S_k a_n^2} \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

$$(1.6) \quad \bar{w}_i(y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m^{(i)} \sin \beta_m y}{EI_i \beta_m^4} \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Z warunku wspólnego ugięcia żeber i płyty wzdłuż prostych

$$x = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad \text{oraz} \quad y = \eta_k \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

tj. z warunków

$$(1.7) \quad w(\xi_i, y) = \bar{w}_i(y) \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

$$(1.8) \quad w(x, \eta_k) = \bar{w}_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

otrzymamy następujący układ równań:

$$(1.9.1) \quad \frac{2}{a} \sum_{j=1}^{j=p} q_m^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi_j \sin a_n \xi_i}{D_{n,m}} + \\ + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^{h=r} \sin \beta_m \eta_h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(h)} \sin a_n \xi_i}{D_{n,m}} + \frac{q_m^{(i)}}{EI_i \beta_m^4} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

$$(1.9.2) \quad \frac{2}{a} \sum_{j=1}^{j=p} \sin a_n \xi_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m^{(j)} \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \\ + \frac{2}{b} \sum_{h=1}^{h=r} t_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_h \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + EJ_k a_n^4 - S_k a_n^2 = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

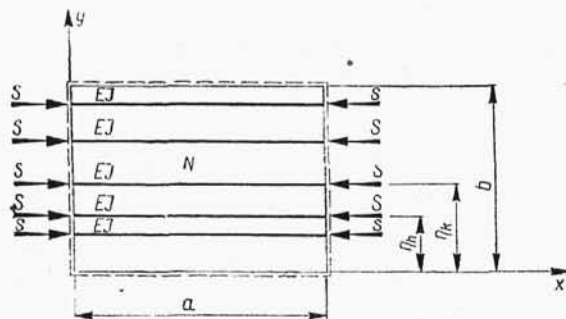
Otrzymaliśmy dwa układy równań liniowych jednorodnych. Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań, jaki powstanie po wyrugowaniu z (1.9.1) i (1.9.2) jednego rodzaju zmiennych:  $q_m$  lub  $t_n$ , stanowi kryterium stateczności ustroju. Najmniejszy pierwiastek równania będącego rozwinięciem wyznacznika daje najmniejszą wartość siły krytycznej.

Układy równań (1.9.1)-(1.9.2) pozwalają rozwiązać cały szereg przypadków szczególnych. Niektórymi z nich zajmiemy się, ze względu na ich znaczenie techniczne, bardziej szczegółowo.

## 2. Układ równoległych prętów ściskanych, wzmocnionych płytą

Układ ten jest typowy dla szeregu konstrukcji. W przypadku takiego układu odpadają równania (1.9.1), równania zaś (1.9.2) upraszczają się do postaci

$$(2.1) \quad \frac{2}{b} \sum_{h=1}^{h=r} t_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_h \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + EJ_k a_n^4 - S_k a_n^2 = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$



Rys. 2

Rozważmy najpierw przypadek najprostszy, układu, złożonego z prętów o jednakowych właściwościach geometrycznych i sprężystych, obciążonych jednakowymi siłami skupionymi  $S$  (rys. 2).

Zatem

$$(2.2) \quad \frac{2}{b} \sum_{h=1}^{h=r} t_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_h \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \frac{t_n^{(k)}}{E J \alpha_n^4 - S \alpha_n^2} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\varrho = \frac{a}{b}, \quad \chi = \frac{E J}{N b}, \quad s = \frac{S b}{N \pi^2}.$$

Możemy teraz napisać równanie (2.2) w postaci

$$(2.3.1) \quad \sum_{h=1}^{h=r} t_n^{(h)} \delta_{hk} + t_n^{(k)} R = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

gdzie

$$(2.3.2) \quad \delta_{hk} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_h \sin \beta_m \eta_k}{\left( \frac{n^2}{\varrho^2} + m^2 \right)^2},$$

$$(2.3.3) \quad R = \frac{0,5}{\frac{n^2}{\varrho^2} \left( \chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s \right)}.$$

Warunkiem wyboczenia jest przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (2.3.1)

$$(2.4) \quad A = \begin{vmatrix} (\delta_{11} + R) & \delta_{12} & \dots & \delta_{1k} & \dots & \delta_{1r} \\ \delta_{21} & (\delta_{22} + R) & \dots & \delta_{2k} & \dots & \delta_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \dots & \delta_{rk} & \dots & (\delta_{rr} + R) \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwinięcie powyższego wyznacznika prowadzi do wielomianu  $r$ -tego stopnia

$$(2.5) \quad R^r + C_1 R^{r-1} + \dots + C_k R^{r-k} + \dots + C_{r-1} R + C_r = 0,$$

gdzie

$$C_1 = \sum_{h=1}^{h=r} \delta_{hh}, \quad C_r = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1r} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \dots & \delta_{rr} \end{vmatrix},$$

zaś

$$C_k = \sum \Delta_k \quad (k = 2, \dots, r-1).$$

Tutaj  $\Delta_k$  jest minorem głównym rzędu  $k$ , utworzonym z wyznacznika  $C_r$ .

Najmniejszy pierwiastek wielomianu (2.5) służy do wyznaczenia najmniejszej sprawdzonej siły krytycznej

$$(2.6) \quad s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} - \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{0,5}{R}.$$

Dla stałej konfiguracji prętów oraz przy stałym stosunku  $n/\varrho$  ( $n$  - ilość półfal) nie zmienia się ani wartość  $R$ , ani też siła krytyczna  $s$ , co widoczne jest z budowy wyrażeń (2.3.2), (2.3.3) oraz związków (2.5) i (2.6).

Na tej samej drodze można wyznaczyć siłę krytyczną dla ustroju, w którym poszczególne pręty posiadają różne sztywności i ściskane są siłami różnej wielkości.

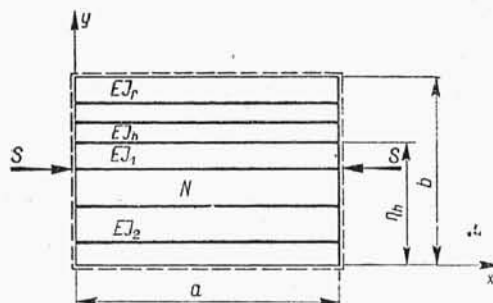
Przy  $s_h = c_h s$ ,  $J_h = d_h J$  otrzymamy następującą postać układu równań:

$$(2.7) \quad \sum_{h=1}^{h=r} t_n^{(h)} + t_n^{(k)} R_k = 0,$$

gdzie

$$(2.8) \quad R_k = \frac{0,5}{c_k \frac{n^2}{\varrho^2} \left( \frac{d_k}{c_k} \chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s \right)},$$

współczynniki zaś  $\delta_{hk}$  określone są nadal związkiem (2.3.2).



Rys. 3

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (2.7) prowadzi do rozwiązania bardziej, niż w poprzednim przypadku, złożonego równania sekularnego.

Wreszcie wyznaczenie siły krytycznej dla ustroju przedstawionego na rys. 3, w którym tylko jeden pręt jest ściskany, pozostałe zaś (o różnych sztywnościach) spełniają podobnie jak płyta rolę elemen-

tów wzmacniających, prowadzi do nader uproszczonego układu równań.

Jeśli oznaczmy jak wyżej

$$J_h = d_h J, \quad R = \frac{0,5}{\frac{n^2}{\varrho^2} \left( \chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s \right)}$$





Oznaczając przez:

$S_{12}^{kr}$  wartość siły krytycznej przy

$$E J_3 = 0, \quad S_3 = 0, \quad \frac{E J_1}{b N} = \frac{E J_2}{b N} = \chi = 15, \quad S_1 = S_2 = S,$$

$S_{13}^{kr}$  wartość siły krytycznej przy

$$E J_2 = 0, \quad S_2 = 0, \quad \frac{E J_1}{b N} = \frac{E J_3}{b N} = \chi = 15, \quad S_1 = S_3 = S,$$

$S_{23}^{kr}$  wartość siły krytycznej przy

$$E J_1 = 0, \quad S_1 = 0, \quad \frac{E J_2}{b N} = \frac{E J_3}{b N} = \chi = 15, \quad S_2 = S_3 = S,$$

$S_{123}^{kr}$  wartość siły krytycznej przy

$$\frac{E J_1}{b N} = \frac{E J_2}{b N} = \frac{E J_3}{b N} = \chi = 15, \quad S_1 = S_2 = S_3 = S,$$

otrzymano kolejno ze związku (2.5) wartości  $R_{12}, R_{13}, R_{23}, R_{123}$  [por. związek (2.3.3)] i ze wzoru (2.6)  $s_{12}, s_{13}, s_{23}, s_{123}$  dla

$$\frac{n}{\varrho} = 2, 1, \frac{1}{3}.$$

Tak więc przy  $\frac{n}{\varrho} = 1$  do wyznaczenia  $R_{13}$  służy równanie typu (2.5)

$$R_{13}^2 + C_1 R_{13} + C_2 = 0,$$

w którym

$$C_1 = \delta_{11} + \delta_{33} = 0,0917 + 0,1718 = 0,2635,$$

$$C_2 = 0,0917 \cdot 0,1718 - 0,0544^2 = 0,0128,$$

skąd

$$R_{13} = -0,1994,$$

$$s_{13} = 15 + \frac{0,5}{0,1994} = 17,51.$$

Przy

$$\frac{n}{\varrho} = \frac{1}{3}$$

uzyskuje się  $R_{123}$  jako najmniejszy pierwiastek równania

$$R_{123}^3 + C_1 R_{123}^2 + C_2 R_{123} + C_3 = 0,$$

gdzie

$$C_1 = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 0,2221 + 0,7618 + 0,4721 = 1,4560,$$

$$C_2 = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2 + \delta_{11} \delta_{33} - \delta_{13}^2 + \delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23}^2 = 0,1946,$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = 0,0042,$$

skąd

$$R_{123} = -1,309,$$

$$s_{123} = 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^2 \cdot \frac{0,5}{1,309} =$$

$$= 1,67 + 3,44 = 5,11.$$

Tablica 2

	$\frac{n}{\varrho} = 2$	$\frac{n}{\varrho} = 1$	$\frac{n}{\varrho} = \frac{1}{3}$
$R_{12}$	-0,0587	-0,3114	-0,9481
$R_{13}$	-0,0413	-0,1994	-0,6002
$R_{23}$	-0,0594	-0,3556	-1,1427
$R_{123}$	-0,0677	-0,4060	-1,3090

Wartości  $R_{12}$ ,  $R_{13}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{123}$  oraz  $s_{12}$ ,  $s_{13}$ ,  $s_{23}$ ,  $s_{123}$  zestawiono w tablicach 2 i 3.

Tablica 3

	$\frac{n}{\varrho} = 2$	$\frac{n}{\varrho} = 1$	$\frac{n}{\varrho} = \frac{1}{3}$
$s_{12}$	60,00 + 2,13 = 62,13	15,00 + 1,61 = 16,61	1,67 + 4,74 = 6,41
$s_{13}$	60,00 + 3,03 = 63,03	15,00 + 2,51 = 17,51	1,67 + 7,50 = 9,17
$s_{23}$	60,00 + 2,10 = 62,10	15,00 + 1,41 = 16,41	1,67 + 3,94 = 5,61
$s_{123}$	60,00 + 1,85 = 61,85	15,00 + 1,23 = 16,23	1,67 + 3,44 = 5,11

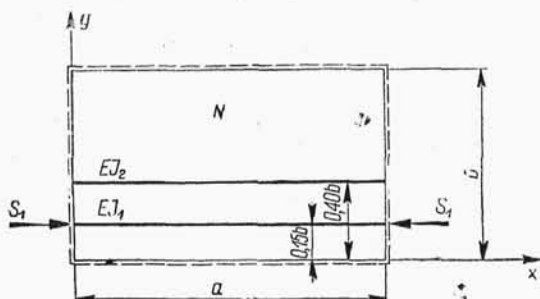
W tablicy 3 w wartościach  $s$  wydzielono dwa człony. Pierwszy z nich:  $\chi \frac{n^2}{\varrho^2}$  wyraża wpływ sztywności własnej prętów ściskanych, drugi:  $\frac{\varrho^2}{n^2} \cdot \frac{0,5}{R}$  pochodzi od wzmacniającego działania płyty. Jak wynika z przytoczonych w tabl. 3 wartości, wpływ wzmacniającego działania płyty jest nieznaczny w ustrojach krótkich i wynosi

przy  $\varrho = \frac{1}{2}$  najwyżej  $\frac{3,03}{63,03} \cdot 100 = 4,8\%$ ,

przy  $\varrho = 1$  jest  $\frac{2,51}{17,51} \cdot 100 = 14,3\%$ ,

przy ustrojach zaś długich:  $\varrho = 3$ , dochodzi do  $\frac{7,50}{9,17} \cdot 100 = 81,8\%$ .

Ponadto wpływ płyty na wielkość siły krytycznej wydatnie wzrasta z oddaleniem prętów ściskanych od osi ustroju  $\eta = b/2$ , a więc  $s_{12} > s_{13} > s_{23}$ .



Rys. 5

Na podstawie związków (2.9) - (2.10) wyznaczono następnie wartość siły krytycznej dla przypadku  $EJ_3 = 0, S_3 = 0$ ,  $\frac{EJ_1}{bN} = \frac{EJ_2}{bN} = \chi = 15$ ,  $S_2 = 0$ ,  $S_1 = S$  (por. rys. 5). Nieściskany pręt 2 spełnia w tym wypadku rolę elementu wzmacniającego.

Przy  $n/\varrho = 2$  jest wg (2.9)

$$Q_2 = \frac{0,5}{15} \cdot \frac{1}{2^4} = 0,0021.$$

Warunek wyboczenia zgodnie z (2.10) przybiera postać

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} + R) & \delta_{12} \\ \delta_{12} & (\delta_{22} + Q_2) \end{vmatrix} = 0,$$

skąd

$$R = -\delta_{11} + \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22} + Q_2} = -0,0274 + \frac{0,0193^2}{0,0468 + 0,0021} = -0,0198,$$

$$s = 60,00 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{0,5}{0,0198} = 66,31.$$

Jeśli sztywność pręta wzmacniającego dąży do zera:  $\chi_2 \rightarrow 0$ , to  $Q_2 \rightarrow \infty$  i  $R \rightarrow -\delta_{11} = -0,0274$ .

Wtedy

$$s = 60,00 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{0,5}{0,0274} = 64,56.$$

Dla ustroju długiego ( $\varrho = 3$ ) otrzymano, przy założeniu, że pręt 2 jest nieobciążony i wzmacnia ustrój, w którym tylko pręt 1 jest ściskany,

$$Q_2 = \frac{0,5}{15} \cdot 3^4 = 2,7000, \quad R = -0,2221 + \frac{0,3678}{0,7618 + 2700} = -0,1158,$$

$$s = 1,67 + 3^2 \cdot \frac{0,5}{0,1158} = 40,52.$$

Przy  $\chi_2 \rightarrow 0$  byłoby w tym przypadku

$$p = 1,67 + 3^2 \cdot \frac{0,5}{0,2221} = 21,92.$$

Podobnie zatem jak się rzecz ma ze wzmacniającym działaniem płyty, wpływ nieściskanych, wzmacniających prętów jest znacznie bardziej wydajny w ustrojach długich.

Szczególnie prosto przedstawia się przypadek jednego tylko ściskanego pręta wzmocnionego płytą. Z równania (2.3.1) mamy

$$(2.11) \quad t_n^{(1)} (\delta_{11} + R) = 0,$$

Ponieważ w razie siły  $S$  większej niż krytyczna płyta wygnie się, czyli  $t_n^{(1)} \neq 0$ , przeto jako warunek wyboczenia pozostaje

$$(2.12) \quad \delta_{11} + R = 0$$

albo

$$(2.13) \quad S_{kr} = \frac{N \pi^2}{b} s = -\frac{N \pi^2}{b} \left[ \chi \frac{n^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{n^2} \frac{1}{2 \sum_{m=1,2,3 \dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{\left( \frac{n^2}{\rho^2} + m^2 \right)^2}} \right].$$

Ze wzoru (2.13) można, przy zachowaniu stałej sztywności płyty  $N$  i szerokości  $b$ , wyczerpać wszystkie możliwe przypadki zmienności  $S_{kr}$ , badając zmienność  $s$  jako funkcji parametrów  $\chi$ ,  $\rho$  i  $\eta$ .

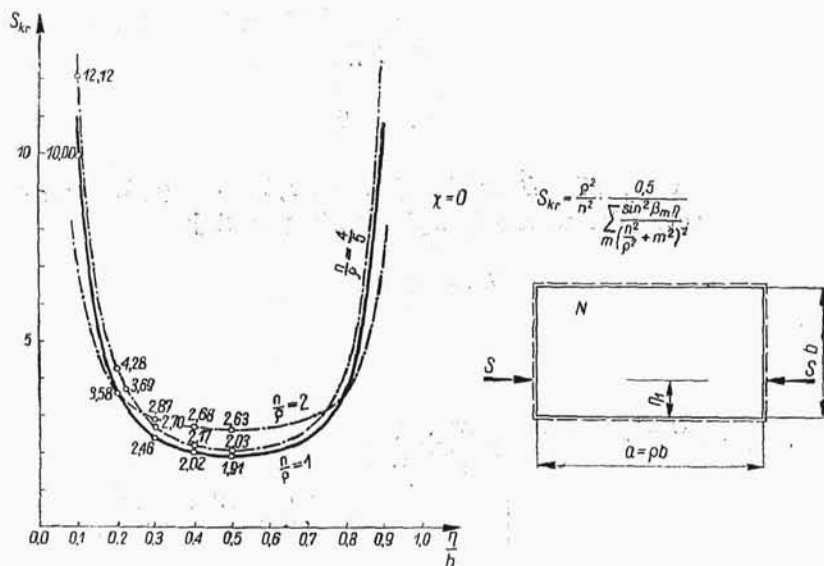
Zauważmy, że występująca we wzorze (2.13) suma zależy wyłącznie od współrzędnej  $\eta$ , określającej położenie żebra ściskanego, i od parametru  $n/\rho$ . Widoczne też jest, że gdy  $\chi$  oraz  $n/\rho$  są stałe, funkcja  $s(\eta)$  osiąga wartość najmniejszą przy maksimum sumy

$$\sum_m^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{\left( \frac{n^2}{\rho^2} + m^2 \right)^2}.$$

Różniczkując sumę względem  $\eta$  stwierdzimy, że maksimum tej sumy występuje dla  $\eta = b/2$ . Stąd wniosek, że wzmacniające działanie płyty będzie najmniejsze, w przypadku gdy zebro znajdować się będzie w osi

symetrii płyty ( $\eta = b/2$ ). Na rys. 6 przedstawiono wartość siły krytycznej jako funkcję parametrów  $\eta$  i  $n/\varrho$ . Założono tu  $\chi = 0$ , a więc przypadek wyboczenia płyty ściskanej siłą skupioną.

Rozważmy dalej przypadek  $\eta = b/2$  i badajmy zależność  $s$  od parametru  $\chi$  i  $n/\varrho$ . Łatwo zauważyć (rys. 7), że ze wzrostem  $\chi$  wzrasta siła krytyczna oraz że wierzchołki krzywych wieńcowych oddalają się od siebie i przesuwają się w prawo. Ponadto, dla stałego  $n/\varrho$  oraz stałej wartości  $\chi$ ,



Rys. 6

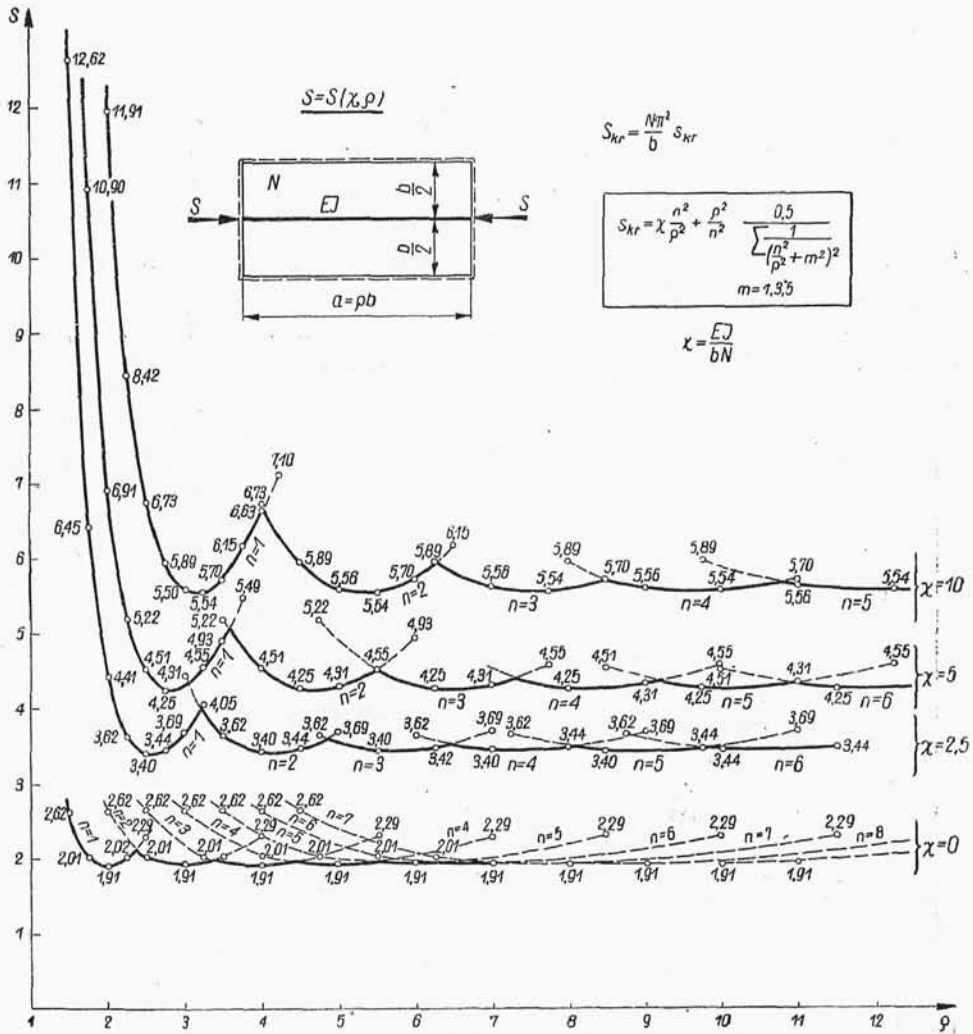
wartość siły krytycznej  $s$ , jak już uprzednio wspomniano, nie zmienia się. Różnice pomiędzy rzędnymi krzywych  $s(\chi, \varrho)$  maleją szybko ze wzrostem  $\varrho$  (przy  $\chi = \text{const.}$ ). Tak więc dla  $\chi = 10$  przy  $\varrho > 6$  przyjęcie  $s = 5,54$  obarczone jest błędem  $\sim 4,5\%$ ; przy  $\chi = 0$  można już począwszy od  $\varrho > 2$  przyjąć z dostateczną dla celów praktycznych dokładnością  $s = 1,91$ .

Drugi człon związku wypisanego w ramce na rys. 7

$$\frac{\varrho^2}{n^2} \frac{0,5}{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2}}$$

wyraża wzmacniające działanie płyty. Równocześnie przy  $\chi = 0$  człon ten

przedstawia całkowitą wartość sprowadzonej siły krytycznej dla płyty bez żebra, ściskanej siłą skupioną działającą w osi  $\eta = b/2$ .



Rys. 7

Jest rzeczą ciekawą, że przy pewnych wartościach  $\rho$  wzmacniające działanie płyty w ustroju z żebrem ( $\chi \neq 0$ ) jest większe od siły krytycznej dla samej płyty ( $\chi = 0$ ). Na rys. 8 powtórzono fragment wykresu z rys. 7.

Dla  $\varrho > \varrho_{1,2}$  (rys. 8) wartość wzmacniającego działania płyty, ujęta klamrą zwróconą w lewo, wynosi

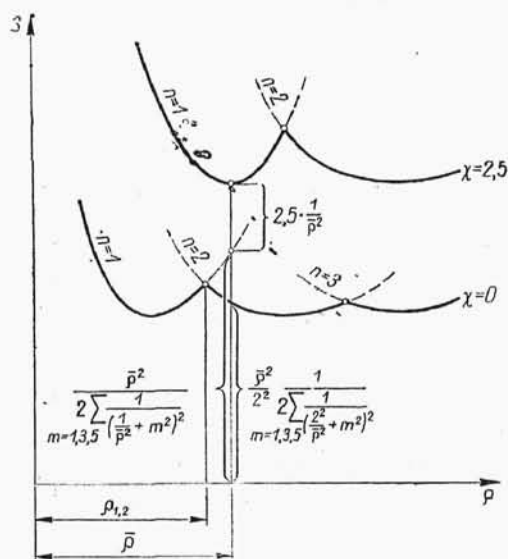
$$\frac{\bar{\varrho}^2}{2 \sum_{m=1,3,5 \dots} \frac{1}{\left(\frac{1}{\bar{\varrho}^2} + m^2\right)^2}}$$

i jest większa niż wartość

$$\frac{\bar{\varrho}^2}{2^3} \frac{1}{2 \sum_{m=1,3,5 \dots} \frac{1}{\left(\frac{2^2}{\bar{\varrho}^2} + m^2\right)^2}}$$

(na rys. 8 zaznaczona klamrą zwróconą w prawo) równa spowodowanej sile, krytycznej dla płyty bez zębra.

Zauważmy jeszcze, że sumę występującą w związku (2.13) dla  $\eta = b/2$  możemy przedstawić wyrażeniem zamkniętym <sup>1)</sup>



Rys. 8

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,5 \dots} \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2} &= \\ &= \frac{\pi}{8} \frac{\varrho^3}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{\varrho} - \frac{n\pi}{\varrho}}{\cosh \frac{n\pi}{\varrho} + 1} \end{aligned}$$

Tak więc

$$(2.14) \quad S_{kr} = \frac{EJ n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{4 N n \pi}{a} \frac{\cosh \frac{n\pi b}{a} + 1}{\sinh \frac{n\pi b}{a} - \frac{n\pi b}{a}}$$

Dla  $b \rightarrow \infty$ , tj. dla pręta ściskanego, wzmocnionego pasmem płytowym nieskończenie długim, jest

$$(2.15) \quad S_{kr} = \frac{EJ \pi^2}{a^2} + \frac{4 N \pi}{a}$$

Dla  $EJ = 0$ , a więc w przypadku pasma płytowego, ściskanego siłą skupioną, uzyskujemy znane rozwiązanie A. Sommerfelda [4].

<sup>1)</sup> Por. niżej (4.7).

Bardzo ważną klasę układów stanowią te, w których pręty ściskane rozmieszczone są symetrycznie względem osi  $y = b/2$ . Ponieważ najmniejsza wartość siły krytycznej wystąpi przy symetrycznej względem  $y = b/2$  postaci wygięcia płyty (jedna półfala w kierunku osi  $Y$ ), zatem

$$t_n^{(1)} = t_n^{(r)}, t_n^{(2)} = t_n^{(r-1)} \quad \text{itd.}$$

Rząd wyznacznika (2.4) zmaleje do  $r/2$  przy parzystej ilości prętów; przy nieparzystej ilości prętów otrzymamy wyznacznik rzędu  $(r+1)/2$ . Współczynniki  $\delta_{hk}$  przybiorą postać

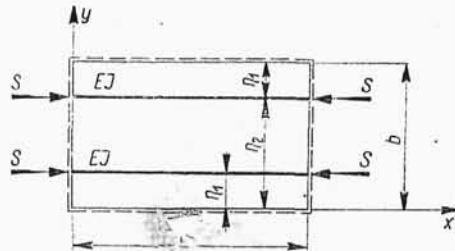
$$(2.16) \quad \delta_{hk} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_h \sin \beta_m \eta_k}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2}.$$

Sumowanie odbywa się tu podług ciągu liczb nieparzystych.

Bardzo prosto przedstawia się przypadek wyboczenia dwu prętów wzmocnionych płytą, przy symetrycznym rozmieszczeniu prętów względem osi  $y = b/2$  (rys. 9).

Zważywszy, że  $t_n^{(1)} = t_n^{(2)}$ , znajdziemy

$$(2.17) \quad t_n^{(1)} [\delta_{11} + \delta_{12} + R] = 0.$$



Rys. 9

Uwzględniając dalej, że

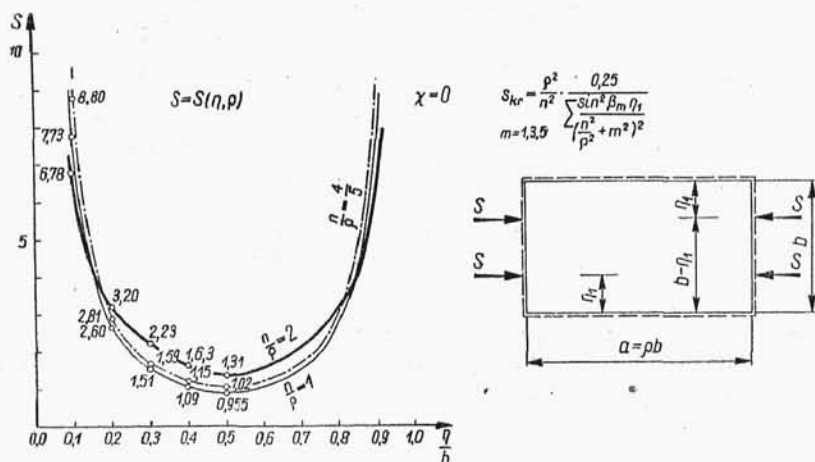
$$\delta_{11} + \delta_{12} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_1 (\sin \beta_m \eta_1 + \sin \beta_m \eta_2)}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2} = 2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta_1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2},$$

otrzymamy

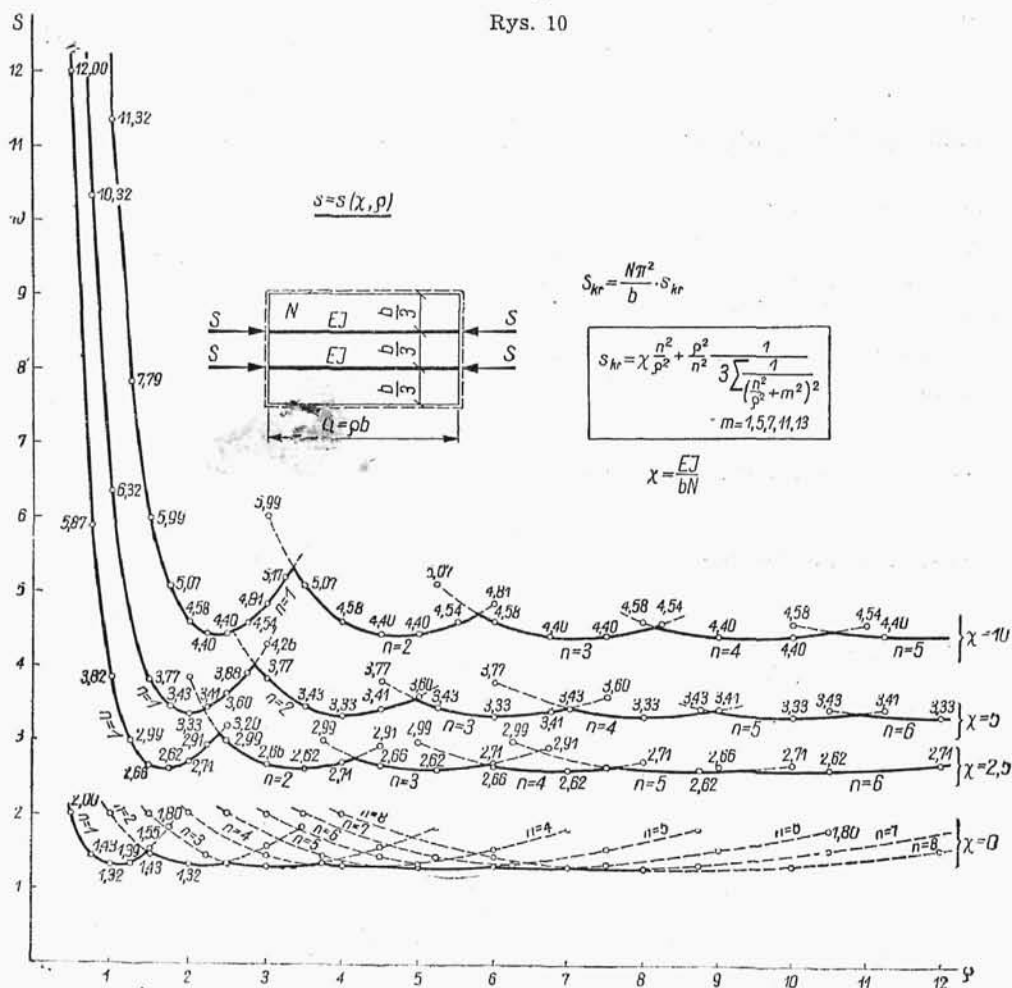
$$(2.18) \quad s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} - \frac{0,25}{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta_1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2}}.$$

Na rys. 10 naniesiono zależność  $s = s(n/\varrho, \eta_1)$  przy  $\chi = 0$ .





Rys. 10



Rys. 11

Najmniejszą wartość  $s$  otrzymamy dla  $\eta_1 = b/2$ , a więc w przypadku gdy obydwa żebra znajdują się w osi symetrii płyty stężającej. Najmniejsze rzędne krzywych na rys. 10 są oczywiście dwukrotnie mniejsze od odpowiednich rzędnych z rys. 6.

Wreszcie przy  $\eta_1 = b/3$  przedstawiono na rys. 11 zależność

$$(2.19) \quad s = s\left(\chi, \frac{n}{\varrho}\right) = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{0,25}{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{3}}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2}}.$$

Ponieważ dla  $m = 1, 5, 7, 11, 13, \dots$

$$\sin^2 \frac{m\pi}{3} = 0,75,$$

zaś dla  $m = 3, 9, 15, 21, \dots$

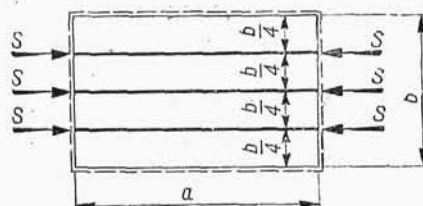
$$\sin^2 \frac{m\pi}{3} = 0,$$

otrzymamy

$$(2.20) \quad s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{1}{3 \sum_{m=1,5,7,11,13,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2}}.$$

Z sumy wypadają człony o indeksach  $3 \cdot (2k - 1)$ , gdzie  $k = 1, 2, 3, \dots$

Dla układu, jak na rys. 12, z trzema jednakowymi prętami, rozmieszczonymi w odstępach równych  $b/4$ , otrzymujemy po prostych przekształceniach



Rys. 12

$$(2.21) \quad s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{1}{4 \sum_m^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2}},$$

gdzie  $m$  przyjmuje następujące wartości:  $m = 1, 7, 9, 15, 17, 23, 25, \dots$

Dla czterech prętów w odstępach  $b/5$  siłę krytyczną otrzymamy ze wzoru

$$(2.22) \quad s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{1}{5 \sum_m \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2}},$$

gdzie  $m = 1, 9, 11, 19, 21, 29, 31, \dots$

Wreszcie dla  $r$  jednakowych prętów, rozłożonych w równych odstępach  $b/(r+1)$ , znajdziemy

$$(2.23) \quad s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{1}{(r+1) \sum_m \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2}},$$

gdzie  $m = k(r+1) - r \frac{1+(-1)^{k-1}}{2}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4 \dots$

Wyżej rozpatrzono uproszczenia występujące w układach symetrycznych względem osi  $y = b/2$  i regularnych, tj. z prętami jednakowej sztywności, rozmieszczonymi w jednakowych odstępach i ściskanyymi jednakowymi siłami.

Również i dla prętów jednakowych i w sposób jednakowy obciążonych, ale niesymetrycznie, nie w równych odstępach rozmieszczonych względem osi  $y = b/2$ , uzyskać można znaczne uproszczenia rozwiązania, stosując sposób przybliżony. Polega on na ograniczeniu się do pierwszego członu sumy  $\delta_{hk}$  [związek (2.3.2)]. Przyjmujemy mianowicie, że

$$(2.24) \quad \delta_{hk} \approx \frac{\sin \beta_1 \eta_h \sin \beta_1 \eta_k}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^2}.$$

Takie przyjęcie pozwala pominąć rozwiązanie równania sekularnego.

W związku (2.5) jest teraz

$$C_r = \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^{2r}} \begin{vmatrix} \sin^2 \beta_1 \eta_1 & \dots \sin \beta_1 \eta_1 \cdot \sin \beta_1 \eta_2 & \dots \sin \beta_1 \eta_1 \cdot \sin \beta_1 \eta_r \\ \sin \beta_1 \eta_2 \cdot \sin \beta_1 \eta_1 & \dots \sin^2 \beta_1 \eta_2 & \dots \sin \beta_1 \eta_2 \cdot \sin \beta_1 \eta_r \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin \beta_1 \eta_r \cdot \sin \beta_1 \eta_1 & \dots \sin \beta_1 \eta_r \cdot \sin \beta_1 \eta_2 & \dots \sin^2 \beta_1 \eta_r \end{vmatrix};$$

stąd

$$C_r = \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^{2r}} \sin \beta_1 \eta_1 \cdot \sin \beta_1 \eta_2 \cdot \dots \sin \beta_1 \eta_r \begin{vmatrix} \sin \beta_1 \eta_1 & \dots \sin \beta_1 \eta_1 & \dots \sin \beta_1 \eta_1 \\ \sin \beta_1 \eta_2 & \dots \sin \beta_1 \eta_2 & \dots \sin \beta_1 \eta_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin \beta_1 \eta_r & \dots \sin \beta_1 \eta_r & \dots \sin \beta_1 \eta_r \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Z powyższego wynika, że także każdy główny minor — rzędu wyższego niż pierwszy — z wyznacznika  $C_r$  jest równy zeru, tj.  $\Delta_k = 0$ . Równanie (2.5) redukuje się do

$$R^r + C_1 R^{r-1} = 0,$$

skąd

$$R = -C_1 = -\frac{\sum_{h=1}^{h=r} \sin^2 \beta_1 \eta_h}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^2}.$$

Zatem

$$(2.25) \quad s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\left(\frac{n}{\varrho} + \frac{\varrho}{n}\right)^2}{2 \sum_{h=1}^{h=r} \sin^2 \beta_1 \eta_h}.$$

Dla układu regularnego o  $r$  prętach w równych odstępach  $b/(r+1)$  jest

$$\sin^2 \beta_1 \eta_h = \sin^2 \frac{h\pi}{r+1},$$

$$R = -\frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^2} \sum_{h=1}^{h=r} \sin^2 \frac{h\pi}{r+1} = -\frac{r+1}{2 \left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^2}$$

oraz <sup>2)</sup>

$$(2.26) \quad s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\left(\frac{n}{\varrho} + \frac{\varrho}{n}\right)^2}{r+1}.$$

Przystępując do zbadania przydatności wzorów przybliżonych (2.25) i (2.26), tj. stopnia dokładności uzyskiwanej przy użyciu ich do wyznaczenia wartości siły krytycznej, zauważyć należy, że różnią się one od wzoru dokładnego (2.6)

$$s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{0,5}{(-R)}$$

tylko drugimi członami.

Niech  $s_{pl}$  oznacza tę część siły krytycznej, która pochodzi od wzmacniającego działania płyty i wyrażona jest przez drugie człony wzorów

<sup>2)</sup> Analogiczny wzór otrzymuje się z modelu płyty ortotropowej. Patrz niżej związek (5.7).

(2.6), (2.25), (2.26). O przydatności wzorów przybliżonych decydować będzie porównanie wartości ścisłej

$$(2.27) \quad s_{pt} = \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{0,5}{(-R)}$$

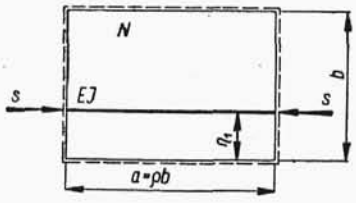
z przybliżonymi:

$$(2.28) \quad \bar{s}_{pt} = \frac{\left(\frac{n}{\varrho} + \frac{\varrho}{n}\right)^2}{2 \sum_{h=1}^{h=r} \sin^2 \beta_1 \eta_h},$$

$$(2.29) \quad \bar{\bar{s}}_{pt} = \frac{\left(\frac{n}{\varrho} + \frac{\varrho}{n}\right)^2}{r+1}.$$

W tablicy 4 zestawiono wartości  $s_{pt}$  obliczone przy pomocy wzoru ścisłego (2.27) i przybliżonego (2.28) dla układu z jednym prętem ściskany przy różnych wartościach  $\eta_1$  i  $n/\varrho$ . W wierszach oznaczonych  $\Delta \%$  podano różnicę pomiędzy obu wartościami  $s$ , zaokrągloną do całkowitych procentów (por. rys. 6).

Tablica 4

	$\frac{n}{\varrho}$	Wzór	$\eta_1 = 0,3b$	$\eta_1 = 0,4b$	$\eta_1 = 0,5b$
	2	(2.27) (2.28) $\Delta \%$			2,63 3,13 +19%
	1	(2.27) (2.28) $\Delta \%$		2,02 2,21 +9%	1,91 2,00 +5%
	$\frac{4}{5}$	(2.27) (2.28) $\Delta \%$		2,17 2,33 +7%	2,03 2,10 +3%
	$\frac{1}{3}$	(2.27) (2.28) $\Delta \%$	7,64 8,48 +11%	5,91 6,14 +4%	5,46 5,55 +2%

Jak wynika z tabl. 4, dla ustroju z jednym prętem ściskany wzór (2.28) przydatny jest tylko przy  $n/\varrho \leq 1$  i  $\eta_1 = 0,5b$  [w tym przypadku wzór (2.28) jest identyczny z wzorem (2.29)].

Jedynie przy długich układach ( $\varrho = a/b = 3$ ,  $n = 1$ ,  $n/\varrho = 1/3$ ), również przy  $\eta_1 = 0,4b$  uzyskuje się przy użyciu wzoru (2.28) wystarczającą dokładność. Ogólnie stwierdzić można, że dokładność maleje przy malejącym  $n/\varrho$  i zwiększającym się oddaleniu pręta ściskanego od osi symetrii ustroju:  $\eta = b/2$ .

Analogiczne zestawienie wartości  $s_{pt}$  dla układu z dwoma prętami ściskanymi, symetrycznie rozmieszczonymi względem osi  $\eta = b/2$ , zawiera tabl. 5.

Tablica 5

$\frac{n}{\varrho}$	Wzór	$\eta_1 = 0,3b$	$\eta_1 = 0,4b$	$\eta_1 = 0,5b$
2	(2.27)	2,23	1,63	1,31
	(2.28)	2,39	1,73	1,56
	$\Delta \%$	+7,2%	+6,1%	+19,1%
1	(2.27)	1,51	1,09	0,95
	(2.28)	1,53	1,11	1,00
	$\Delta \%$	+1,3%	+1,8%	+5,3%
$\frac{4}{5}$	(2.27)	1,59	1,15	1,02
	(2.28)	1,61	1,17	1,05
	$\Delta \%$	+1,3%	+1,7%	+2,9%
$\frac{1}{3}$	(2.27)	4,22	3,06	2,73
	(2.28)	4,24	3,07	2,78
	$\Delta \%$	+0,5%	+0,3%	+1,8%

W tym przypadku zakres stosowalności wzoru przybliżonego przy  $n/\varrho \leq 1$  jest już znacznie większy i rozciąga się na układy, w których pręty ściskane znajdują się we wzajemnej odległości nie przekraczającej  $\sim 0,5b$ .

Dla ustrojów niesymetrycznych z dwoma i trzema prętami ściskanymi uzyskano wyżej ściśle rozwiązania przytoczone w tabl. 3. W tabl. 6 zesta-

Tablica 6

$\frac{n}{\varrho}$	Wzór	$s_{12}^{pt}$	$s_{13}^{pt}$	$s_{23}^{pt}$	$s_{123}^{pt}$
2	(2.27)			2,10	1,85
	(2.28)			2,22	1,94
	$\Delta \%$			+5,7%	+4,9%
1	(2.27)	1,61	2,51	1,41	1,23
	(2.28)	1,80	2,84	1,43	1,24
	$\Delta \%$	+11,8%	+13,2%	+1,4%	+0,8%
$\frac{1}{3}$	(2.27)	4,74	7,50	3,94	3,44
	(2.28)	5,00	7,87	3,95	3,45
	$\Delta \%$	+5,2%	+4,9%	+0,3%	+0,3%

wiono drugie człony wartości  $s_{12}, \dots, s_{123}$ , będące wyrazem wzmacniającego działania płyty i oznaczone jako  $s_{12}^{pl}, s_{13}^{pl}, s_{23}^{pl}, s_{123}^{pl}$ . Przy każdej z tych wartości podano odpowiednią wartość  $s_{pl}$  obliczoną z wzoru (2.28) oraz różnicę pomiędzy wartością ścisłą a przybliżoną (w procentach,  $\Delta\%$ ).

Dla układu z trzema prętami ściskany, z których pręt 1 znajduje się w bardzo małej odległości od krawędzi płyty [co, jak wiadomo z poprzednich wniosków, wpływa wybitnie niekorzystnie na dokładność wyznaczenia wartości  $s_{pl}$  z wzoru (2.28)], uzyskano wystarczającą dokładność nawet przy  $n/\varrho = 2$ . Przy  $n/\varrho \leq 1$  różnice pomiędzy wartością ścisłą a przybliżoną  $s_{123}^{pl}$  utrzymują się poniżej 1%.

Odnosnie układów z dwoma prętami ściskany, wysnuć można wnioski analogiczne do tych, jakie wynikają z tablicy 5: przy  $n/\varrho \leq 1$  dobrą dokładność uzyskuje się z wzoru (2.28), jeśli wzajemna odległość prętów ściskanych nie przekracza  $\sim 0,5b$  (por. wartości  $s_{13}^{pl}$ ). [Pręty powinny być przy tym rozmieszczone tak, aby każdy z nich znajdował się w innej połowie układu. W przeciwnym przypadku dokładność rozwiązania uzyskiwanego z wzoru (2.28) maleje].

Dla ustrojów z prętami, rozmieszczonymi w równych odstępach  $b/(r+1)$ , sprawa dokładności wzoru (2.29), przy pomocy którego wyznacza się część siły krytycznej pochodzącą od wzmacniającego działania płyty, może być rozstrzygnięta w prosty sposób.

Jeśli oznaczyć przez  $s_{pl}$  drugi człon we wzorze ścisłym (2.23), to dla układu z  $r$  prętami można napisać

$$(2.30) \quad s_{pl}^{(r)} = \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{1}{(r+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + m^2\right)^2}}$$

$$[m = (r+1)k - r - \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} ; k = 1, 2, 3, 4, \dots].$$

Różnica między przybliżoną wartością  $\bar{s}_{pl}$  wg wzoru (2.29) a ścisłą  $s_{pl}^{(r)}$  wg wzoru (2.30), wyrażona w procentach od  $s_{pl}^{(r)}$ , da się teraz przedstawić w postaci

$$(2.31) \quad \Delta\% = \frac{\bar{s}_{pl} - s_{pl}^{(r)}}{s_{pl}^{(r)}} 100 = \left[ \left( \frac{n^2}{\varrho^2} + 1 \right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left( \frac{n^2}{\varrho^2} + m^2 \right)^2} - 1 \right] 100$$

$$[m = (r+1)k - r - \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} ; k = 1, 2, 3, 4, \dots].$$

W tablicy 7 zestawiono wartości  $\Delta\%$  obliczone wg wzoru (2.31).

Tablica 7.  $\Delta\% = \frac{\bar{s}_{pl} - s_{pl}^{(r)}}{s_{pl}^{(r)}} 100$

$\frac{n}{\varrho}$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$
2	16,50%	4,00%	1,25%	0,25%
1	4,80%	0,76%	0,20%	0,04%
$\frac{1}{3}$	1,76%	0,25%	0,08%	0,03%

Wnioski wynikające z tabl. 7. są oczywiste i nie wymagają dodatkowych sformułowań.

Wspólną cechą wzorów przybliżonych (2.25) i (2.26), jak wynika z tablic 4-7, jest to, że dają one wartość siły krytycznej zawsze większą od obliczonej wzorami ścisłymi.

Przy pomocy przybliżonych związków (2.25) i (2.26) można otrzymywać wykresy zmienności funkcji  $s = s(\chi, n/\varrho)$ , przy stałej konfiguracji prętów, w sposób nader prosty. Oznaczmy w związku (2.25) mianownik drugiego członu przez  $U$ , tj. przyjmijmy

$$(2.32) \quad U = 2 \sum_{h=1}^{h=r} \sin^2 \beta_1 \eta_h$$

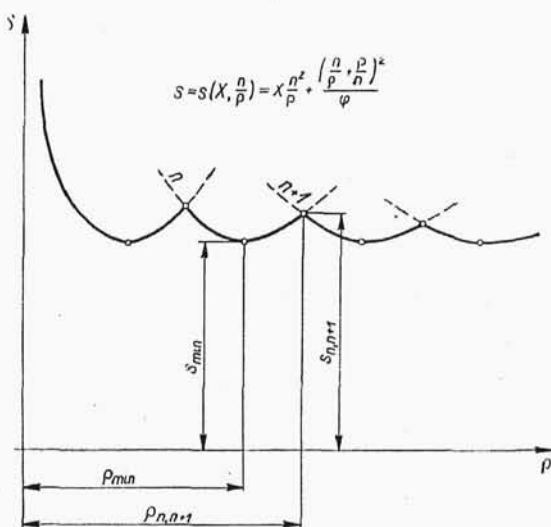
oraz

$$(2.33) \quad V = \sqrt[4]{UX+1}.$$

Łatwo wykazać, że przy powyższych oznaczeniach współrzędne minimów funkcji  $s = s(\chi, n/\varrho)$  określone są wzorami

$$(2.34) \quad \varrho_{min} = V, 2V, \dots, nV, \dots,$$

$$(2.35) \quad s_{min} = \frac{2}{U} (V^2 + 1),$$



Rys. 13

współrzędne zaś wierzchołków (punktów przecięcia sąsiednich gałęzi krzywej wieńcowej) — wzorami

$$(2.36) \quad \varrho_{n,n+1} = V\sqrt{2}, \quad V\sqrt{6}, \dots, \quad V\sqrt{n(n+1)}, \dots,$$

$$(2.37) \quad s_{n,n+1} = s_{min} + \frac{1}{n(n+1)} \frac{V^2}{U}$$

(por. rys. 13).



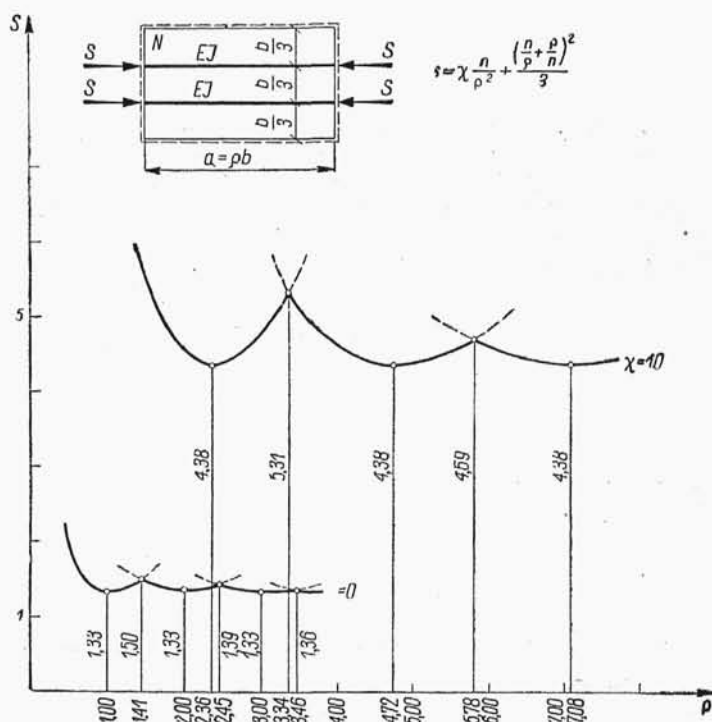
Związek (2.34) otrzymujemy przyrównując do zera pierwszą pochodną funkcji

$$s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{\left(\frac{n}{\varrho} + \frac{\varrho}{n}\right)^2}{U} \quad \text{względem} \quad z = \frac{n}{\varrho},$$

związek (2.36) — z relacji:

$$s\left(\chi, \frac{n}{\varrho}\right) - s\left(\chi, \frac{n+1}{\varrho}\right) = 0.$$

Na podstawie związków (2.34), (2.35), (2.36) i (2.37) wyznaczono współrzędne punktów charakterystycznych wykresu  $s = s(\chi, n/\varrho)$  dla układu re-



Rys. 14

gularnego z dwoma prętami (rys. 14), przyjmując  $U = r + 1 = 3$  [por. (2.26)]. Wykres  $s = s(\chi, n/\varrho)$  dla tego układu sporządzony na podstawie wzoru ścisłego (2.20) podano wyżej na rys. 11. Porównanie wartości z obu wykresów wskazuje na bardzo dobrą zgodność rozwiązania przybliżonego i ścisłego.

### 3. Ruszt wzmocniony płytą. Przypadek swobodnego podparcia płyty na obwodzie

Przyrównanie do siebie ugięć płyty i rusztu doprowadziło do układu równań (1.9). Warunkiem wyboczenia będzie przyrównanie do zera wyznacznika tego układu. W przypadku ogólnym jest to zagadnienie rachunkowo bardzo skomplikowane i dlatego ograniczymy się wyłącznie do układów regularnych o  $r$  prętach podłużnych o sztywności  $EJ - (\chi)$ , rozmieszczonych w odstępach  $b/(r+1)$ , ściskanych jednakowymi siłami  $S$ , oraz o  $p$  prętach poprzecznych o sztywności na zginanie  $EI - (\gamma)$ , rozmieszczonych w odstępach  $a/(p+1)$ .

Drogą prostych przekształceń możemy układy (1.9) doprowadzić do postaci

$$(3.1.1) \quad \sum_{j=1}^{j=r} q_m^{(j)} \delta_{ji} + \frac{0,5 q_m^{(i)}}{\gamma m^4} + \varrho \sum_{h=1}^{h=r} \sin \beta_m \eta_h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^{(h)} \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}} = 0,$$

$$(3.1.2) \quad \sum_{j=r}^{j=r} \sin \alpha_n \xi_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m^{(j)} \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \varrho \left[ \sum_{h=1}^{h=r} t_n^{(h)} \bar{\delta}_{hk} + \frac{0,5 t_n^{(k)}}{\frac{n^2}{\varrho^2} \left( \chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s \right)} \right] = 0,$$

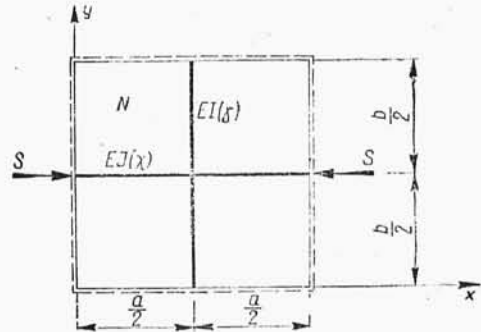
gdzie

$$\varrho = a/b, \quad \chi = \frac{EJ}{b N}, \quad \gamma = \frac{EI}{a N}, \quad s = S_{kr} \frac{b}{N \pi^2},$$

$$\delta_{ji} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_j \sin \alpha_n \xi_i}{D_{n,m}},$$

$$\bar{\delta}_{hk} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_h \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} = 0,$$

$$D_{n,m} = \left( \frac{n^2}{\varrho^2} + m^2 \right)^2.$$



Rys. 15

Rozpatrzmy przypadek najprostszy, mianowicie ruszt składający się z dwu tylko prętów, wzmocniony płytą (rys. 15). Dla układu przedstawionego na tym rysunku jest

$$q_m^{(j)} = q_m^{(i)} = q_m, \quad t_n^{(h)} = t_n^{(k)} = t_n, \quad \alpha_n \xi_j = \alpha_n \xi_i = \frac{n\pi}{2}, \quad \beta_m \eta_h = \beta_m \eta_k = \frac{m\pi}{2}.$$

Układ równań (3.1) uprości się do postaci

$$(3.2.1) \quad q_m G_m + \varrho \sin \frac{m\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n \sin \frac{n\pi}{2}}{D_{n,m}} = 0,$$

$$(3.2.2) \quad t_n H_n + \frac{1}{\varrho} \sin \frac{n\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m \sin \frac{m\pi}{2}}{D_{n,m}} = 0,$$

gdzie

$$G_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_{n,m}} + \frac{0,5}{\gamma m^4},$$

$$H_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{D_{n,m}} + \frac{0,5}{\frac{n^2}{\varrho^2} \left( \gamma \frac{n^2}{\varrho^2} - s \right)}$$

$$(n = 1, 3, 5, \dots; \quad m = 1, 3, 5, \dots).$$

Eliminując z układu (3.2) wielkość  $q_m$ , otrzymamy ostatecznie układ równań

$$(3.3) \quad t_i = \sum_{k=1}^{\infty} t_k K_{ik} = 0,$$

gdzie

$$K_{ik} = - \frac{(-1)^{i+k}}{H_i} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{G_l \cdot D_{il} \cdot D_{kl}}$$

$$(i = 1, 3, 5, \dots; \quad k = 1, 3, 5, \dots; \quad l = 1, 3, 5, \dots).$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu (3.3) jest warunkiem wyłączenia. Wyznacznik układu przyjmuje tu postać

$$(3.4) \quad \begin{vmatrix} K_{11} - 1 & K_{13} & K_{15} \\ K_{31} & K_{33} - 1 & K_{35} \\ K_{51} & K_{53} & K_{55} - 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Przyjmując pewną ilość wyrazów wyznacznika (3.4), możemy z dowolną żadaną dokładnością wyznaczyć wartość sprowadzonej siły krytycznej. Za

pierwsze przybliżenie posłużyć może np. wartość  $s$  obliczona metodą modelu płyty ortotropowej<sup>3)</sup>.

Przy najmniejszej wartości siły krytycznej rozważany ustrój wyboczy się wg powierzchni o jednej półfali w kierunku osi  $Y$ . Bardzo dobre przybliżenie uzyskamy zatem podstawiając w układach równań (3.2):  $m = 1$ , tj. nadając im postać

$$(3.5.1) \quad qG + q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n \sin \frac{n\pi}{2}}{D_n} = 0,$$

$$(3.5.2) \quad t_n H_n + q \frac{1}{q D_n} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} = 0,$$

gdzie

$$D_n = \left( \frac{n^2}{q^2} + 1 \right)^2, \quad G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_n} + \frac{1}{2\gamma}, \quad H_n = \frac{1}{D_n} + \frac{1}{R_n}, \quad R_n = 2 \frac{n^2}{q^2} \left( \chi \frac{n^2}{q^2} - s \right).$$

Podstawiając następnie  $C_n = D_n \cdot H_n = 1 + D_n/R_n$  i eliminując z układów (3.5) zmienną  $q$  otrzymamy

$$(3.6) \quad t_i = (-1)^{i+k} \frac{1}{G C_i} \sum_k \frac{t_k}{D_k} \\ (i = 1, 2, 3 \dots; \quad k = 1, 2, 3 \dots; \quad n = 2k - 1).$$

Przejdźmy teraz do warunku wyboczenia, tj. do przyrównania do zera wyznacznika układu (3.6). Przyjmijmy jako pierwsze przybliżenie

$$i = 1, \quad k = 1, \quad n = 1, \quad G = G^{(1)} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{2\gamma}.$$

Układ (3.6) zredukuje się do jednego równania

$$t_1 = t_1 \frac{1}{G^{(1)} C_1 D_1}.$$

Warunek wyboczenia przybiera zatem postać

$$(3.7.1) \quad \frac{1}{C_1 D_1} - G^{(1)} = 0.$$

Następne przybliżenie

$$i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad G^{(2)} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \frac{1}{2\gamma}$$

<sup>3)</sup> Por. niżej związek (5.7).

proceedzi do wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{G^{(2)} C_1 D_1} & \frac{1}{G^{(2)} C_1 D_2} \\ \frac{1}{G^{(2)} C_2 D_1} & 1 - \frac{1}{G^{(2)} C_2 D_2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{G^{(2)}} \left( \frac{1}{C_1 D_1} + \frac{1}{C_2 D_2} \right) = 0$$

lub

$$(3.7.2) \quad \frac{1}{C_1 D_1} + \frac{1}{C_2 D_2} - G^{(2)} = 0.$$

Przy  $i = 1, 2, 3, \dots$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  otrzymamy po prostych przekształceniach jako rozwinięcie wyznacznika

$$(3.7.3) \quad \frac{1}{C_1 D_1} + \frac{1}{C_2 D_2} + \frac{1}{C_3 D_3} - G^{(3)} = 0.$$

Dla nieskończonego układu równań zapiszemy zatem warunek wyboczenia w postaci

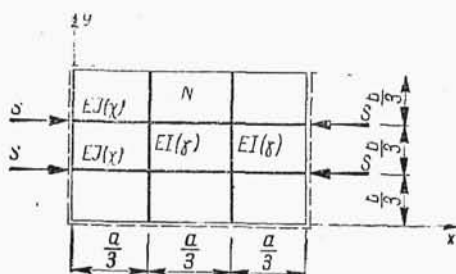
$$(3.7.4) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{C_i D_i} - G = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{C_i D_i} - \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{D_i} + \frac{1}{2\gamma} \right) = 0$$

lub

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{C_i} \right) \frac{1}{D_i} + \frac{1}{2\gamma} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{D_i + R_i} + \frac{1}{2\gamma} = 0,$$

tj. ostatecznie

$$(3.8) \quad \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\left( \frac{n^2}{\rho^2} + 1 \right)^2 + 2 \frac{n^2}{\rho^2} \left( \chi \frac{n^2}{\rho^2} - s \right)} + \frac{1}{2\gamma} = 0.$$



Rys. 16

Rozpatrzmy teraz ruszt, wzmocniony płytą, przedstawiony na rys. 16. Dla tego rusztu

$$q_m^{(1)} = q_m^{(2)} = q_m, \quad t_n^{(1)} = t_n^{(2)} = t_n,$$

$$\alpha_n \xi_1 = \frac{n\pi}{3}, \quad \alpha_n \xi_2 = \frac{2n\pi}{3},$$

$$\beta_m \eta_1 = \frac{m\pi}{3}, \quad \beta_m \eta_2 = \frac{2m\pi}{3}.$$

Przyjmując  $m=1$ , na podstawie (3.1) otrzymamy

$$(3.9.1) \quad q \left( \sum_n \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{n\pi}{3} \sin \frac{2n\pi}{3}}{D_n} + \frac{0,5}{\gamma} \right) + \\ + \varrho \left( \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \right) \sum_n \frac{t_n \sin \frac{n\pi}{3}}{D_n} = 0.$$

$$(3.9.2) \quad t_n \left[ \frac{\sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3}}{D_n} + \frac{0,5}{\frac{n^2}{\varrho^2} \left( \chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s \right)} \right] + \\ + q \cdot \frac{1}{\varrho D_n} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \left( \sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) = 0.$$

Eliminując z (3.9) zmienną  $q$  i biorąc pod uwagę, że przy  $n$  parzystym oraz  $n=3, 9, 15, \dots$  znikają sumy funkcji trygonometrycznych występujące w układach (3.9), że natomiast przy pozostałych wartościach

$$n = 3k - 2 \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} = 1, 5, 7, 11, 13, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

mamy

$$\sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} = 2 \sin \frac{n\pi}{3} = \pm \sqrt{3},$$

$$\sin^2 \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{n\pi}{3} \sin \frac{2n\pi}{3} = 2 \sin^2 \frac{n\pi}{3} = \frac{3}{2},$$

otrzymamy ponownie układ (3.6)

$$t_i = (-1)^{i+k} \frac{1}{GC_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{D_k},$$

w którym teraz

$$D_n = \frac{1}{\left( \frac{n^2}{\varrho^2} + 1 \right)^2}, \quad G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_n} + \frac{1}{3\gamma}, \quad C_n = 1 + \frac{D_n}{R_n}, \quad R_n = 3 \frac{n^2}{\varrho^2} \left( \chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s \right)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots; n = 3k - 2 \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} = 1, 5, 7, 11, 13, \dots).$$

Rozwinięcie wyznacznika układu (3.6) przybierze zatem postać:

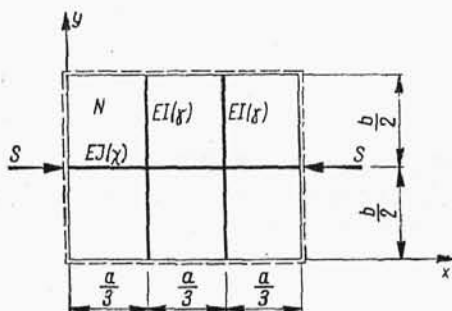
$$(3.10) \quad \sum_n \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^2 + 3 \frac{n^2}{\varrho^2} \left(\chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s\right)} + \frac{1}{3\gamma} = 0 \quad \left[ n = 3k - 2 \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} \right],$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

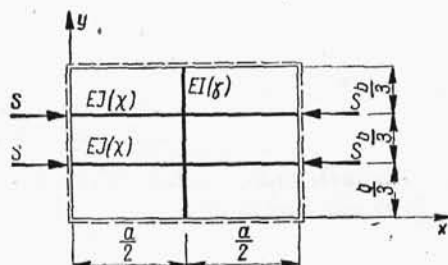
Dla układu przedstawionego na rys. 17 otrzymamy w analogiczny sposób jako warunek wyboczenia

$$(3.11) \quad \sum_n \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^2 + 2 \frac{n^2}{\varrho^2} \left(\chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s\right)} + \frac{1}{3\gamma} = 0 \quad \left[ n = 3k - 2 \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} \right],$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots),$$



Rys. 17



Rys. 18

dla układu zaś z rys. 18

$$(3.12) \quad \sum_n \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^2 + 3 \frac{n^2}{\varrho^2} \left(\chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s\right)} + \frac{1}{2\gamma} = 0 \quad (n = 2k - 1),$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

Uogólniając związki (3.8), (3.10), (3.11) i (3.12) na układ  $r$  prętów o sztywności  $EJ$ , rozmieszczanych w odstępach  $b/(r+1)$ , ściskanych jednakowymi siłami  $S$ , wzmocniony płytą o sztywności  $N$  oraz  $p$  żebrami poprzecznymi o sztywności  $EI$ , w odstępach  $a/(p+1)$ , zapiszemy dla takiego układu warunek wyboczenia w postaci

$$(3.13) \quad \sum_n \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right)^2 + (r+1) \frac{n^2}{\varrho^2} \left(\chi \frac{n^2}{\varrho^2} - s\right)} + \frac{1}{(p+1)\gamma} = 0$$

$$\left[ n = (p+1)k - p \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} ; \quad k = 1, 2, 3, \dots \right].$$

Najmniejszy pierwiastek powyższego równania nieskończonego jest najmniejszą sprawdzoną siłą krytyczną układu

$$s = S_{kr} \frac{b}{N\pi^2}.$$

Stosując do wyznaczenia siły krytycznej układu regularnego metodę modelu płyty ortotropowej z zerową sztywnością prętów rusztu na skręcanie, otrzymuje się<sup>4)</sup> na wartość siły krytycznej wyrażenie (przy  $m=1$ ):

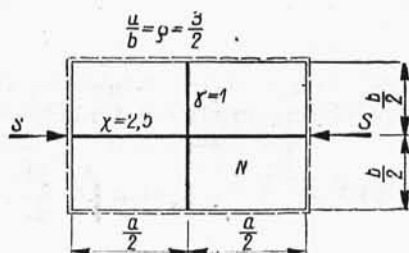
$$(3.14) \quad s = \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + \frac{p+1}{r+1} \cdot \gamma \frac{\varrho^2}{n^2} + \frac{1}{r+1} \left( \frac{n}{\varrho} + \frac{\varrho}{n} \right)^2.$$

Przyjmując w związku (3.13)  $n=1$  otrzymamy

$$(3.15) \quad s = \chi \frac{1}{\varrho^2} + \frac{p+1}{r+1} \gamma \cdot \varrho^2 + \frac{1}{r+1} \left( \frac{1}{\varrho} + \varrho \right)^2,$$

tj. związek (3.14) przy  $n=1$ .

Tok postępowania przy obliczaniu siły krytycznej ze związku (3.13) objaśnimy na przykładzie układu przedstawionego na rys. 19. Przyjmując  $\chi=2,5$ ,  $\gamma=1$ ,  $\varrho=3/2$  obliczymy jako pierwsze przybliżenie wartość  $s$  z wzoru (3.14). Podstawiając  $r=1$ ,  $p=1$  otrzymamy  $s=5,71$ . Podstawiając następnie otrzymaną wartość do związku (3.13) uzyskamy dla  $n=1, 3, 5, 7, \dots$  ciąg wartości:



Rys. 19

$$-0,500 + 0,01715 + 0,00157 + 0,00038 + 0,00013 + \dots + 0,500 = \sim 0,01923.$$

Jeśli oszacujemy sumę wyrazów powyższego ciągu, począwszy od drugiego, na:  $0,01715 + 0,00157 + 0,00038 + 0,00013 + \dots + 0,500 = \sim 0,520$ , będziemy mogli obliczyć z wystarczającą dokładnością poprawioną wartość  $s$ , przyrównując pierwszy wyraz nieskończonego szeregu ze związku (3.13) do wartości  $-0,520$ , tj. podstawiając

$$\frac{1}{\left( \frac{4}{9} + 1 \right)^2 + 2 \cdot \frac{4}{9} \left( 2,5 \cdot \frac{4}{9} - s \right)} = -0,520,$$

skąd  $s=5,63$ .

<sup>4)</sup> por. niżej (5.7).



Istotnie, podstawiając poprawioną wartość  $s$  do związku (3.13), otrzymamy <sup>5)</sup> nowy ciąg wartości:

$$-0,520 + 0,01667 + 0,00157 + 0,00038 + 0,00013 + \dots + 0,500 = \sim -0,00125.$$

Jest rzeczą oczywistą, że dokładność wzoru przybliżonego (3.14) wzrasta wraz ze zwiększeniem ilości prętów ściskanych  $r$  i żeber poprzecznych  $p$ .

Należy jeszcze ustalić granice stosowalności związków (3.13), (3.14) w zależności od ilości i sztywności żeber poprzecznych  $p$  i  $\gamma$ . W tym celu posłużymy się związkiem (3.14), który przy oznaczeniach

$$(3.16) \quad M = 1 + (r + 1) \chi,$$

$$(3.17) \quad L = 1 + (p + 1) \gamma$$

doprowadzimy do postaci

$$(3.18) \quad s = \frac{1}{r+1} \left( 2 + M \frac{n^2}{\varrho^2} + L \frac{\varrho^2}{n^2} \right).$$

Związek (3.18) pozwala w sposób szybki i prosty otrzymać wykres  $s = s(\chi, \gamma, \varrho)$  oraz współrzędne punktów charakterystycznych tego wykresu.

Różniczkując (3.18) względem  $z = n/\varrho$  otrzymamy — z relacji  $\frac{ds}{dz} = 0$  — współrzędne minimów funkcji  $s = s(\chi, \gamma, \varrho)$ :

$$(3.19) \quad \varrho_{min} = n \sqrt[4]{\frac{M}{L}}, \quad s_{min} = \frac{2}{r+1} (1 + \sqrt{ML}).$$

Dalej z równania:

$$s\left(\chi, \gamma, \frac{n}{\varrho}\right) = s\left(\chi, \gamma, \frac{n+1}{\varrho}\right)$$

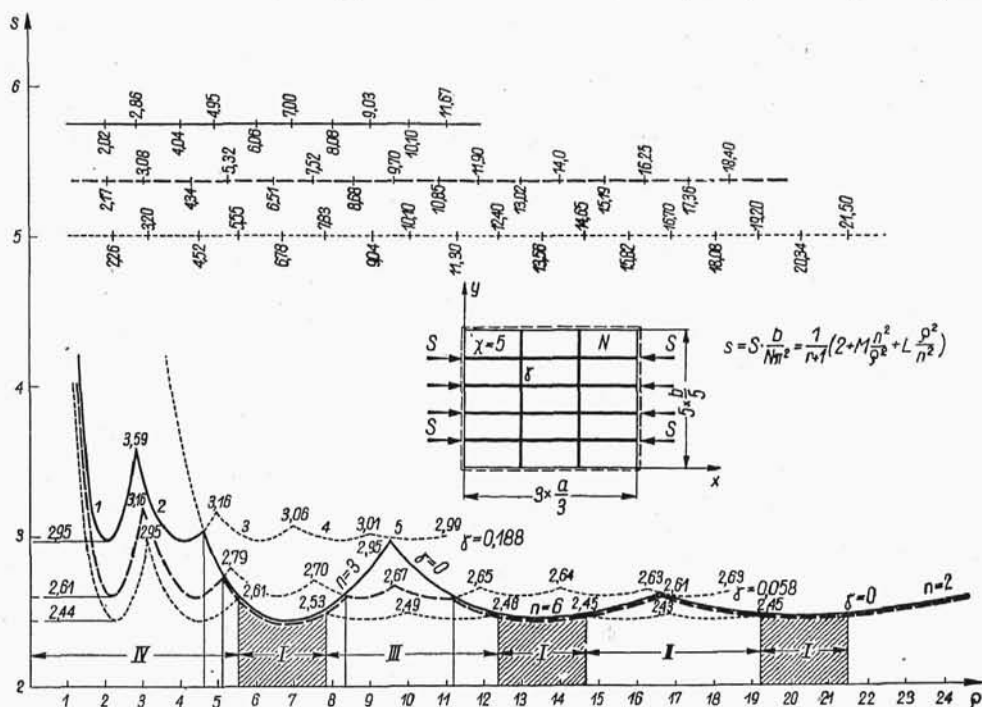
otrzymamy współrzędne punktów przecięcia sąsiednich gałęzi krzywej wieńcowej:

$$(3.20) \quad \varrho_{n, n+1} = \sqrt{n(n+1)} \cdot \sqrt[4]{\frac{M}{L}}, \quad s_{n, n+1} = s_{min} + \frac{\sqrt{ML}}{r+1} \cdot \frac{1}{n(n+1)}.$$

Na rys. 20 przedstawione są wykresy  $s = s(\chi, \gamma, \varrho)$  dla układu regularnego z czterema prętami ściskany i dwoma żebrami wzmacniającymi:  $r = 4$ ,  $p = 2$ , sporządzone na podstawie (3.18), (3.19), (3.20). Sztywność żeber ściskanych  $\chi = 5$ , sztywność zaś żeber poprzecznych przybiera kolejno wartości:  $\gamma = 0$  - dolna krzywa wieńcowa,  $\gamma = 0,058$  - krzywa środkowa i  $\gamma = 0,188$  -

<sup>5)</sup> Przytoczone obliczenie wykonano przy użyciu suwaka logarytmicznego dł. 25 cm

-górna krzywa wieńcowa. Krzywa środkowa i górna tracą swoją ważność, jako wykresy najmniejszych wartości sprowadzonej siły krytycznej — w obszarach, w których (rys. 20) zaznaczone są linia kropkowana. W tych



Rys. 20

obszarach wartości najmniejszej siły krytycznej odczytać należy z gałęzi dolnej krzywej wieńcowej odpowiadających ilości półfal powierzchni wyboczenia w kierunku osi X:

$$n = (p+1) = 3, \quad 2(p+1) = 6, \quad 3(p+1) = 9 \text{ itd.}$$

Istotnie, dla rozpatrywanego układu zawsze są możliwe postacie wyboczenia wg powierzchni, o ilości półfal w kierunku osi X równej wielokrotności  $(p+1)$ : 3, 6, 9, 12 ..., z liniami węzłowymi wzdłuż żeber poprzecznych, tj. dla układu regularnego czterech prętów podłużnych wzmocnionego jedynie płytą ( $\gamma=0$ ).

Z rys. 20 można zatem wyciągnąć następujące wnioski.

(a) Dla każdej wartości  $\rho$  ustalić można pewną graniczną wartość sztywności żeber poprzecznych  $\gamma_{\text{dost.}}$  — tzw. sztywność dostateczną mającą tę własność, że dalsze jej zwiększanie nie pociąga za sobą wzrostu wartości siły krytycznej układu.

(b) W obszarach I jest  $\gamma_{\text{dost.}}^{(I)} = 0$ ; sztywność żeber poprzecznych nie wpływa tu na wzrost sił krytycznych.

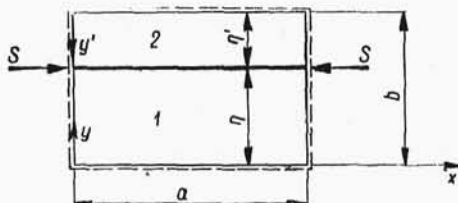
(c) W obszarze II można w drodze zwiększania  $\gamma$  uzyskać wzrost sił krytycznych; tutaj  $\gamma_{\text{dost.}}^{(II)} = 0,054$ ; przy  $\gamma \geq 0,054$  wzrostu sił krytycznych w obszarze II uzyskać już nie można, natomiast następuje jeszcze wzrost sił krytycznych w części obszarów III i IV.

(d) W obszarze III można spowodować wzrost wartości sił krytycznych, zwiększając sztywność żeber poprzecznych aż do  $\gamma_{\text{dost.}}^{(III)} = 0,181$ ; przy  $\gamma > 0,181$  następuje wzrost sił krytycznych już tylko w części obszaru IV.

Granice poszczególnych obszarów i wartości  $\gamma_{\text{dost.}}$  określić można w prosty sposób przy pomocy związków (3.18)–(3.20).

#### 4. Ruszt wzmocniony płytą. Przypadek całkowitego utwierdzenia przeciwległych brzegów płyty

Dotychczas rozpatrywaliśmy zagadnienia stateczności rusztu wzmocnionego płytą przy użyciu podwójnych szeregów trygonometrycznych. Wykażemy poniżej, że zagadnienie to można rozwiązać przy użyciu pojedynczych szeregów trygonometrycznych.



Rys. 21

Sposób ten pozwoli również na rozwiązanie tych przypadków, w których tylko dwa przeciwległe brzegi są swobodnie podparte, pozostałe zaś mogą być utwierdzone całkowicie lub swobodnie.

Rozważmy przypadek najprostsz, pręt ściskany siłą  $P$ , wzmocniony płytą prostokątną (rys. 21). Oddziaływanie płyty na zebro  $t(x)$  wywołuje (por. [3]) następujące ugięcie płyty na obwodzie swym swobodnie podpartej:

$$(4.1) \quad w_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (E_n \sinh \alpha_n y + F_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \sin \alpha_n x$$

$$(0 < y < \eta),$$

$$(4.2) \quad w_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (E'_n \sinh \alpha_n y' + F'_n \alpha_n y' \cosh \alpha_n y') \sin \alpha_n x$$

$$(0 < y' < \eta').$$

Tutaj

$$(4.3) \quad E_n = \bar{E}_n t_n, \quad F_n = \bar{F}_n t_n,$$

$$E_n = \frac{1}{2 N a_n \sinh a_n b} \left( a_n \eta \cosh a_n \eta' + \sinh a_n \eta' - a_n b \frac{\sinh a_n \eta}{\sinh a_n b} \right),$$

$$\bar{F}_n = - \frac{\sinh a_n \eta'}{2 N a_n \sinh a_n b}.$$

Zmieniając we wzorach (4.3)  $\eta$  na  $\eta'$  i odwrotnie otrzymamy odpowiednie wyrażenia na  $\bar{E}_n', \bar{F}_n'$ .

Ugięcie żebra wywołane oddziaływaniem  $t(x)$  oraz działaniem siły  $S$  przybiera postać

$$(4.4) \quad \bar{w} = - \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{t_n \sin a_n x}{E J a_n^4 - S a_n^2}.$$

Z równości ugięcia płyty i żebra w przekroju  $y = \eta$ , tj. z warunku

$$w(x, \eta) = \bar{w}(x)$$

otrzymujemy związek

$$(4.5) \quad E_n \sinh a_n \eta + F_n a_n \eta \cosh a_n \eta + \frac{t_n}{E J a_n^2 - S} = 0,$$

skąd łatwo znajdziemy siłę krytyczną:

$$(4.6) \quad S_{kr} = E J a_n^2 + \frac{1}{\bar{E}_n \sinh a_n \eta + \bar{F}_n a_n \eta \cosh a_n \eta}.$$

Przyjmując kolejno  $n = 1, 2, \dots$  wyznaczyć możemy krzywą wieńcową dla siły krytycznej jako funkcji parametrów  $\varrho$  oraz  $\chi$ .

Podane tu rozwiązanie bez trudu rozszerzyć możemy na dowolną ilość prętów ściskanych. Otrzymamy tu układ równań identyczny z układem (2.3.1). Wynika to stąd, że przyrównanie odpowiednich wyrażeń, uzyskanych przy użyciu pojedynczych i podwójnych szeregów, daje

$$(4.7) \quad \delta_{hk} = \frac{\pi^4}{4 b^3} \frac{1}{a_n^3 \sinh a_n b} \left[ \left( a_n \eta_k \cosh a_n \eta'_k + \sinh a_n \eta'_k - \frac{a_n b}{\sinh a_n b} \sinh a_n \eta_k \right) \sinh a_n \eta_h - a_n \eta_h \sinh a_n \eta'_k \cosh a_n \eta_h \right],$$

$$(h < k).$$

Dla  $h > k$  należy we wzorze (4.7) przestawić  $\eta_h$  z  $\eta'_h$  oraz  $\eta_k$  z  $\eta'_k$ .

Jeżeli brzegi  $y = 0$ ,  $y = b$  płyty nie są swobodnie podparte, posłużyć się możemy również metodą pojedynczych szeregów trygonometrycznych. Przyjąć należy ogólniejsze, niż to uczyniono we wzorach (4.1), (4.2), wyrażenie dla ugięcia płyty.

Przyjmujemy

$$(4.8) \quad w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} (E_n \sinh a_n y + F_n a_n y \cosh a_n y + G_n \cosh a_n y + H_n a_n y \sinh a_n y) \sin a_n x$$

$$(0 < y < \eta),$$

$$(4.9) \quad w_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} (E'_n \sinh a_n y' + F'_n a_n y' \cosh a_n y' + G'_n \cosh a_n y' + H'_n a_n y' \sinh a_n y') \sin a_n x$$

$$(0 < y' < \eta').$$

Mamy tu osiem stałych całkowania. Na brzegach  $y=0$ ,  $y=b$  mamy po dwa warunki brzegowe. Wzdłuż prostej  $y=\eta$  mamy następujące warunki brzegowe

$$(4.10) \quad w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial w_2}{\partial y'}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y'^2},$$

$$-N \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_2}{\partial y'^3} \right) = t(x).$$

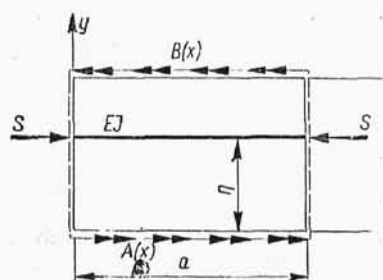
Po wyznaczeniu stałych  $E_n, F_n, G_n, H_n$  można ze związku

$$w(x, \eta) = \bar{w}(x)$$

uzyskać warunek wyboczenia płyty. Droga ta jest nader uciążliwa i korzystać z niej należy jedynie w przypadku płyty wzdłuż krawędzi  $y=0$  lub  $y=b$  swobodnie podpartej.

W przypadku płyty wzdłuż brzegów  $y=0$ ,  $y=b$  zupełnie utwierdzonych wygodniej jest posłużyć się podwójnymi szeregami trygonometrycznymi.

Rozważmy płytę prostokątną według rys. 22, na którą wzdłuż prostej  $y=\eta$  działa obciążenie normalne (oddziaływanie żebra na płytę) a na brzegach  $y=0$ ,  $y=b$  momenty  $A(x)$ ,  $B(x)$ .



Rys. 22

Ugięcie wywołane tym obciążeniem wyraża wg W. Nowackiego [5] wzór

$$(4.11) \quad w = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin a_n x \sin \beta_m y}{D_{n,m}} \{ [A_n - (-1)^m B_n] \beta_m + t_n \sin \beta_m \eta \}.$$

Tutaj  $A_n, B_n$  są współczynnikami rozwinięcia Fouriera momentów  $A(x), B(x)$ , rozłożonych na brzegach, zaś  $D_{n,m} = N(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2$ .

Żądamy teraz, aby wzdłuż prostych  $y=0, y=b$  było

$$(4.12) \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Ponadto żądamy, aby ugięcie płyty i pręta w przekroju  $y=\eta$  było jednakowe:

$$(4.13) \quad w(x, \eta) = \bar{w}(x).$$

Otrzymamy układ trzech równań jednorodnych

$$(4.14) \quad \begin{cases} A_n \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} - B_n \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_m^2}{D_{n,m}} + t_n \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} = 0, \\ -A_n \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_m^2}{D_{n,m}} + B_n \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} + \\ + t_n \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_m \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} = 0, \\ A_n \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} - B_n \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_m \sin \beta_m \eta}{D_{n,m}} + \\ + t_n \left( \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_m \eta}{D_{n,m}} + \frac{1}{EJ \alpha_n^4 - S \alpha_n^2} \right) = 0. \end{cases}$$

Przyrównanie wyznacznika układu równań (4.14) do zera jest kryterium wyboczenia układu.

Dla przypadku szczególnego, pręta ściskanego umieszczonego w połowie rozpiętości płyty, jest  $A_n = B_n$ .

Układ równań (4.14) uprości się do

$$(4.15) \quad \begin{cases} A_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} + t_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{D_{n,m}} = 0, \\ A_n \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{D_{n,m}} + t_n \left( \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{D_{n,m}} + \frac{1}{EJ \alpha_n^4 - S \alpha_n^2} \right) = 0. \end{cases}$$

Z przyrównania do zera wyznacznika powyższego układu równań mamy:

$$(4.16) \quad S_{kr} = EJ a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} \frac{\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}}}{\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{D_{n,m}} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{D_{n,m}} - \left( \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{D_{n,m}} \right)^2}.$$

Przedstawiony tu sposób łatwo daje się uogólnić na większą ilość ścisanych prętów, wzmocnionych płytą.

Jak widzieliśmy uprzednio, rozwiązanie zagadnienia wyboczenia rusztu o krzyżujących się prętach, wzmocnionego płytą dookoła swobodnie podpartą, natrafiało na duże trudności rachunkowe. Wzrosną one wielokrotnie w przypadku płyty na brzegach utwierdzonej. Przy jednakowych prętach, w jednakowych odstępach rozłożonych i jednakowych siłach ścisających — dojdziemy w sposób najprostszy do wyników stosując metodę przybliżoną, polegającą na zastąpieniu układu „ruszt-płyta” modelem płyty ortotropowej.

#### 5. Ruszt gęstożebrowy wzmocniony płytą. Metoda modelu płyty ortotropowej

Rysunek 23 przedstawia ruszt gęstożebrowy, wzmocniony płytą, z prętami podłużnymi o sztywności  $EJ$ , w równych odstępach  $b_1 = b/(r+1)$  ściszanymi jednakowymi siłami  $S$ , oraz z żebrami poprzecznymi o sztywności  $EI$ , rozmieszczonymi w odstępach  $a_1 = a/(p+1)$ . Pracę takiego rusztu prześledzić można na modelu wyidealizowanym płyty ortotropowej. Do równania różniczkowego tej płyty ortotropowej dojdziemy w następujący sposób [6].

Ustawiamy najpierw równanie różniczkowe ugięcia rusztu pracującego bez udziału płyty:

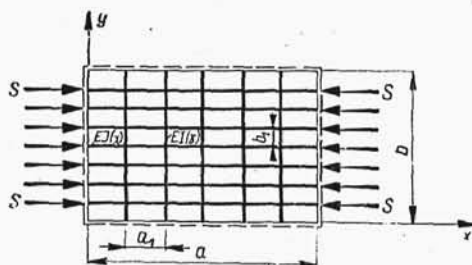
$$(5.1) \quad \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} + \frac{S}{b_1} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = \bar{r}(x, y).$$

Tutaj  $\bar{w}$  oznacza ugięcie rusztu nie wzmocnionego płytą  $\bar{r}(x, y)$  jest obciążeniem działającym na ruszt, prostopadłym do jego płaszczyzny.

Równanie różniczkowe płyty pracującej samodzielnie, bez udziału rusztu, pozostającej pod działaniem obciążenia  $r(x, y)$ , przyjmuje postać

$$(5.2) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w = r(x, y),$$

gdzie  $N$  jest sztywnością na zginanie płyty, a  $w$  jej ugięciem.



Rys. 23

Połączmy teraz płytę z rusztem w jedną całość. Żądamy zatem, aby ugięcie płyty i rusztu było jednakowe, tj. żądamy, aby  $w(x, y) = \bar{w}(x, y)$ . W wyniku połączenia rusztu z płytą oddziaływanie wzajemne płyty na ruszt i — przeciwnie — rusztu na płytę będą co do wartości bezwzględnej sobie równe, ale przeciwnie skierowane. Zakładając, że oddziaływania te są rozłożone na powierzchni płyty i rusztu w sposób ciągły, mamy dalszy warunek:  $\bar{r}(x, y) = -r(x, y)$ .

Równanie różniczkowe ugięcia rusztu, wzmocnionego płytą, otrzymamy dodając do siebie równania (5.1) i (5.2). Równanie to ma postać

$$(5.3) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{EJ}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{EI}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{S}{b_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Równanie to traktować należy jako przybliżone z tym, że dokładność jego wzrasta ze wzrostem ilości żeber rusztu.

Rozważmy kilka przypadków wybożenia rusztu wzmocnionego płytą.

(a) Niech układ nasz będzie na wszystkich swych krawędziach swobodnie podparty. Rozwiązanie równania (5.3) przyjmujemy w postaci

$$(5.4) \quad w = A_{n,m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Założenie to spełnia wszelkie warunki brzegowe zadania. Wstawione do równania (5.3) — daje następujący związek:

$$(5.5) \quad N \left( \alpha_n^2 + \beta_m^2 \right)^2 + \frac{EJ}{b_1} \alpha_n^4 + \frac{EI}{a_1} \beta_m^4 - \frac{S}{b_1} \alpha_n^2 = 0.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{EJ}{Nb} = \chi, \quad \frac{EI}{Na} = \gamma, \quad \varrho = \frac{a}{b}, \quad a_1 = \frac{a}{p+1}, \quad b_1 = \frac{b}{r+1},$$

gdzie  $r, p$  oznaczają ilość prętów ułożonych w kierunku osi  $x, y$ , doprowadzimy równanie (5.5) do postaci

$$(5.6) \quad S_{kr} = \frac{N\pi^2}{b(r+1)} \left[ (r+1) \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + (p+1) \gamma \frac{\varrho^2}{n^2} m^4 + \left( \frac{n}{\varrho} + \frac{\varrho}{n} m^2 \right)^2 \right].$$

Najmniejszą wartość krytyczną otrzymamy, jak łatwo to stwierdzić, ze związku (5.6) dla  $m = 1$ .

Zatem

$$(5.7) \quad S_{kr} = \frac{N\pi^2}{b(r+1)} \cdot \left[ (r+1) \chi \frac{n^2}{\varrho^2} + (p+1) \gamma \frac{\varrho^2}{n^2} + \left( \frac{n}{\varrho} + \frac{\varrho}{n} \right)^2 \right].$$



W przypadku kwadratowego rusztu wzmocnionego płytą otrzymamy najmniejszą wartość krytyczną przy  $n = 1$ :

$$(5.8) \quad S_{kr} = \frac{N\pi^2}{a^2} \cdot \frac{(r+1)\chi + (p+1)\gamma + 4}{r+1}.$$

Zauważmy tutaj, że w przypadku szczególnym  $N = 0$  otrzymamy z równania (5.5) wyrażenie dla siły krytycznej rusztu nie wzmocnionego płytą (por. [7])

$$(5.9) \quad S_{kr} = \frac{EJ\pi^2}{b^2} \left( \frac{n^2}{\rho^2} + k \frac{\rho^2}{n^2} \right),$$

gdzie

$$k = \frac{I}{J} \frac{b_1}{a_1}.$$

(b) Zajmijmy się rusztem, wzmocnionym płytą, utwierdzonym zupełnie wzdłuż krawędzi  $x = 0$ ,  $x = a$ . Ruszt, swobodnie podparty na wszystkich brzegach, obciążamy momentami, rozłożonymi w sposób ciągły, wzdłuż krawędzi  $x = 0$ ,  $x = a$ .

Ugięcie układu przyjmie tu postać

$$(5.10) \quad w = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[A_m - (-1)^n B_m] a_n}{D_{n,m}} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$D_{n,m} = N(a_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{EJ}{b_1} a_n^4 + \frac{EI}{a_1} \beta_m^4 - \frac{S}{b_1} a_n^2.$$

Wielkości  $A_m$ ,  $B_m$  są współczynnikami rozwinięcia Fouriera momentów utwierdzenia.

Z warunku zerowej wartości wyrażenia

$$(5.11) \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=a} = 0$$

otrzymamy dwa układy równań. Rozważyć trzeba dwa przypadki szczególne: postać symetryczną i antymetryczną względem prostej  $x = a/2$ . W pierwszym przypadku jest  $A_m = B_m$ , w drugim  $A_m = -B_m$ . Dla symetrycznej postaci wyboczenia warunek (5.11) prowadzi do związku

$$(5.12) \quad \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_n^2}{D_{n,m}} = 0.$$

Dla antymetrycznej postaci wyboczenia otrzymamy

$$(5.13) \quad \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a_n^2}{D_{n,m}} = 0.$$

W obu równaniach należy przyjąć  $m = 1$ , gdyż możliwe jest tylko wyboczenie według jednej półfali w kierunku osi  $y$ .

Dla rusztu kwadratowego, wzmocnionego płytą, otrzymamy przy symetrycznej postaci wyboczenia

$$(5.14) \quad \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(r+1)\chi n^2 + (p+1)\gamma \frac{1}{n^2} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - (r+1)s} = 0.$$

Najmniejszy pierwiastek  $s$  równania (5.14) określi nam siłę krytyczną układu.

Dla rusztu kwadratowego, nie wzmocnionego płytą, otrzymamy przyjmując w związku (5.10) i dalszych  $N = 0$ , następujący warunek wyboczenia:

$$(5.15) \quad \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + k \frac{1}{n^2} - s_1} = 0,$$

gdzie

$$k = \frac{I}{J} \cdot \frac{b_1}{a_1}, \quad s_1 = \frac{S_{kr} b^2}{EJ\pi^2}.$$

Dla antymetrycznej — względem osi  $x = a/2$  — postaci wyboczenia należy we wzorach (5.14), (5.15) przeprowadzić sumowanie według liczb parzystych  $n = 2, 4, 6, \dots$

(c) Niech brzegi rusztu  $y = 0$ ,  $y = b$ , będą utwierdzone zupełnie, natomiast brzegi  $x = 0$ ,  $x = a$  swobodnie podparte. Na podstawie analogicznych jak pod (b) rozwiązań otrzymamy dla symetrycznej względem osi  $y = b/2$  postaci wyboczenia następujący warunek:

$$(5.16) \quad \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m^2}{(r+1)\chi \frac{n^2}{\varrho^2} + (p+1)\gamma \frac{\varrho^2}{n^2} m^4 + \left(\frac{n}{\varrho} + \frac{\varrho}{n} m^2\right)^2 - (r+1)s} = 0.$$

Przy wyboczeniu układu według jednej, dwu, trzech itd. półfal, wstawić należy do równania (5.16) kolejno  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ , ...

Dla rusztu nie wzmocnionego płytą warunek wyboczenia przyjmie postać

$$(5.17) \quad \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m^2}{n^2 + k \frac{m^4}{n^2} - s_1} = 0,$$

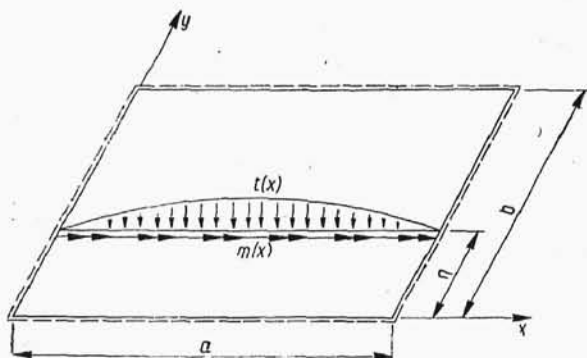
gdzie

$$k = \frac{I}{J} \frac{b_1}{a_1}, \quad s_1 = \frac{S_{kr} b^2}{EJ\pi^2}.$$

Przedstawiony tu sposób rozwiązywania zagadnień stateczności można rozszerzyć i na bardziej złożone przypadki utwierdzenia układu, kiedy dwie, trzy względnie wszystkie cztery krawędzie są zupełnie utwierdzone. Prowadzą one do dwóch układów równań o nieskończonej ilości niewiadomych. Przyrównanie wyznacznika do zera jest poszukiwanym warunkiem wyboczenia. Przypadków tych nie rozwijamy tu szerzej; omówione są one obszernie w pracy jednego z autorów niniejszej rozprawy [5] w odniesieniu do płyty nie wzmocnionej rusztem.

#### 6. Uzupełnienie. Uwzględnienie sztywności skrętnej prętów rusztu

W naszych rozważaniach nie uwzględniliśmy dotychczas wpływu sztywności skrętnej prętów na wyboczenie układu. Wpływ ten na ogół jest nieznaczny i dla prętów o przekrojach  $\Gamma$ ,  $\sqsubset$ ,  $\sqsupset$  posiadających małą sztywność skrętną, można go pominąć. Stan ten potwierdzają



Rys. 24

doświadczenia G. Erlemana [8]. Jednak dla ogólności naszych rozważań wpływ ten pokrótce omówimy.

Niech dana będzie płyta prostokątna, na którą wzdłuż prostej  $y = \eta_h$  działa obciążenie normalne  $t_n^{(h)}(x)$  i moment  $m_n^{(h)}(x)$  (rys. 24).

Ugięcie płyty przyjmuje tu postać (por. [3])

$$(6.1) \quad w = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y}{D_{n,m}} (t_n^{(h)} \sin \beta_m \eta_h + m_n^{(h)} \beta_m \cos \beta_m \eta_h),$$

gdzie

$$D_{n,m} = N (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2.$$

Ugięcie  $k$ -tego pręta, wywołane obciążeniem  $t^{(k)}(x)$  oraz siłą ściskającą  $S_k$ , przedstawia wzór

$$(6.2) \quad w_k = - \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x}{E J_k \alpha_n^4 - S_k \cdot \alpha_n^2} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Kąt skręcenia  $k$ -tego pręta opisuje równanie różniczkowe

$$(6.3) \quad G C_k \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} = - m^{(k)}(x).$$

$G C_k$  jest tu sztywnością pręta na skręcanie.

Przy założeniu swobodnego podparcia końców pręta, najwygodniej będzie przedstawić rozwiązanie równania (6.3) szeregiem trygonometrycznym

$$(6.4) \quad \bar{\varphi}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(k)} \sin \alpha_n x.$$

Zważywszy, że

$$m^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{(k)} \sin \alpha_n x,$$

otrzymamy rozwiązanie równania (6.3) w postaci

$$(6.5) \quad \bar{\varphi}_k = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n^{(k)}}{G C_k \alpha_n^2} \sin \alpha_n x \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Z warunków wspólnego ugięcia oraz kąta obrotu płyty i żebra w prostej  $y = \eta_k$ , mamy

$$(6.6) \quad \begin{cases} w(x, \eta_k) = \bar{w}_k(x), \\ \frac{\partial w(x, \eta_k)}{\partial y} = \bar{\varphi}_k(x), \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Wstawiając do powyższych związków  $w(x, \eta_k)$  ze wzoru (6.1) oraz  $\bar{w}_k, \bar{\varphi}_k$  ze wzorów (6.2), (6.5), otrzymamy układ równań

$$(6.7) \quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{h=r} t_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m \eta_h \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \sum_{h=1}^{h=r} m_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m \cos \beta_m \eta_h \sin \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \\ + \frac{t_n^{(k)} b}{2(EJ_k a_n^4 - S_{kr} a_n^2)} = 0, \\ \sum_{h=1}^{h=r} t_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m \sin \beta_m \eta_h \cdot \cos \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \\ + \sum_{h=0}^{h=r} m_n^{(h)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 \cos \beta_m \eta_h \cos \beta_m \eta_k}{D_{n,m}} + \frac{m_n^{(k)}}{GC_k a_n^2} = 0 \end{cases} \\ (k = 1, 2, \dots, r; \quad m = 1, 2, \dots, \infty).$$

Przyrównanie do zera wyznacznika układu równań (6.7) jest poszukiwanym warunkiem wyboczenia.

Przedstawiony tu sposób daje się bez trudu uogólnić na układy krzyżujących się prętów, wzmocnionych płytą.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] E. Chwalla: *Theorie der einseitig angeordneten Stegblechsteife*, Der Bauingenieur, t. 10, 1937.
- [2] F. Bleich: *Buckling Strength of Metal Structures*, Nowy Jork 1952, str. 361.
- [3] W. Nowacki: Zagadnienia statyki i dynamiki płyt wzmocnionych żebrami, Arch. Mech. Stos., t. 6, 4 (1954).
- [4] A. Sommerfeld: *I. Math. Physik.*, 1906.
- [5] W. Nowacki: *Drgania własne i wyboczenie płyty prostokątnej na obwodzie całkowicie utwierdzonej*, Arch. Mech. Stos., t. 6, 4 (1954).
- [6] W. Nowacki: *Stateczność płyt prostokątnych wzmocnionych żebrami*, Arch. Mech. Stos., t. 6, 2 (1954), str. 332.
- [7] W. Nowacki: *Z zagadnień teorii rusztów płaskich*, Arch. Mech. Stos., t. 6, 1 (1954), str. 1-4.
- [8] G. Erlmann: *Jb. schiffbautechn. Geslsh.*, 34 (1933), str. 514.

## Резюме

## УСТОЙЧИВОСТЬ РОСТВЕРКОВ УСИЛЕННЫХ ПЛАСТИНКОЙ

В работе рассматривается вопрос устойчивости прямоугольных ростверков, усиленных пластинкой в случае, когда стержни одного направления сжимаются осевыми усилиями.

При свободном опирании системы по контуру — основными зависимостями являются условия (1.9) выражающие равенство прогибов стержней ростверка и пластинки.

Как частный случай подробно обсуждается система параллельных сжатых стержней усиленных пластинкой. Для систем этого рода общие зависимости принимают вид уравнений (2.7); при стержнях одинаковой жесткости, сжимаемых различными по величине усилиями — (2.3.1); когда не все стержни системы подвержены сжатию — (2.10). Приведенные числовые примеры поясняют последовательность расчетов при определении значения критической нагрузки и являются переходом к рассмотрению  $S$  критич. как функции отдельных параметров (графики — рис. 6, 7, 8, 10, 11). Далее указаны упрощения, вступающие в симметричных системах, и дано весьма простое, точное решение для регулярных систем (2.23). Затем выведены (2.25), (2.26), являющиеся приближенными решениями, установлены пределы их применимости и степень точности (табл. 4, 5, 6, 7 и график рис. 14).

Рассуждения касающиеся ростверка усиленного пластинкой ограничиваются регулярными системами. Точное решение в случае ростверка, состоящего из одного сжатого стержня и одного перпендикулярного ребра, ведет к соотношениям (3.3), (3.4). Если принять, что поверхность изгиба системы в сечениях перпендикулярных к направлению сжатия имеет форму синусоид с одной полуволной — решение получается из бесконечного уравнения (3.13). Обсуждение области применимости уравнения (3.13) в зависимости от жесткости поперечных, не подвергаемых сжатию ребер показывает, что во многих случаях критическая нагрузка ростверка должна быть определена из формул (2.23), (2.26), т. е. как для системы параллельных сжатых стержней усиленных пластинкой (график — рис. 20). Результаты дискуссии дают также указания, касающиеся рационального подбора жесткости сжатых стержней, поперечных ребер и пластинки — преследующего цель повышения значения критической нагрузки.

При защемлении краев плиты, параллельных направлению сжатия, дано решение для системы с одним сжатым стержнем — двумя методами: при использовании тригонометрических рядов функции одной переменной (4.8), (4.9), (4.10) и — двойных тригонометрических рядов — (4.14).

Для регулярных часторебристых ростверков заземленных по краям, дано простое решение полученное при помощи модели: ростверк + пластинка = ортотропная пластинка. В случае заземления по краям системы перпендикулярным к направлению сжатия — значение критического усилия определяется из бесконечных уравнений (5.12), (5.13). Если заземлены края системы параллельные направлению сжатия, условие потери устойчивости принимает форму зависимости (5.16).

В заключительной части работы приведен метод разрешающий дополнительно учесть влияние на величину критической нагрузки жесткости при кручении — стержней, входящих в состав системы. Критерием потери устойчивости является в этом случае приравнение к нулю детерминанта системы уравнений (6.7), выражающих, кроме условий равенства прогибов стержней и пластинки, также условия равенства углов поворота стержней и пластинки.

#### Summary

#### THE STABILITY OF GRATE STRUCTURES REINFORCED WITH PLATES

The subject of this paper is the solution of the problem of stability of rectangular grates reinforced with plates and having parallel bars subjected to compressive forces.

With a free support on the periphery, basic relations are found in the form of Eqs. (1.9) expressing the conditions of identity of deflection of plate and bars.

As a particular case a system of parallel bars reinforced with a plate and subjected to compression is discussed. The general equations take, for such system, the form of Eqs. (2.7) or, for various compressive forces and equal rigidity of the bars — that of Eqs. (2.3.1). In the case when not all members are loaded it takes the form of (2.10). Numerical examples illustrate the procedure of determining the critical force and are discussed before passing to the problem of variability of critical force in function of each particular parameter (Figs. 6, 7, 8, 10, 11). Next, simplifications of the problem in the case of symmetry of the system are indicated and the exact and simple solution (2.23) for regular systems is given. Further, approximate solutions in the form of Eqs. (2.25), (2.26) are derived and the limits of their applicability evaluated as well as the degree of exactness with respect to the exact solution (Tabs. 4, 5, 6, 7 and Fig. 14).

The considerations relating to a grate reinforced with a plate are confined to regular systems. The exact solution in the case of a structure composed of one strut and one perpendicular stiffening rib leads to the

relations (3.3), (3.4). The assumption that the shape of the buckling surface in cross-sections perpendicular to the direction of compression is represented by a sinusoidal half wave permits to obtain a solution, starting from the infinite equation (3.13). A discussion of the range of applicability of Eq. (3.13) in function of rigidity of noncompressed ribs indicates that the critical force of the grate should be in many cases determined from Eqs. (2.23), (2.26), i. e. as in the case of compressed parallel struts reinforced with a plate (Fig. 20). The results of the discussion give some directions for a rational choice of rigidity of compressed members, reinforcing ribs and plate, in order to increase the critical force.

If the plate is built in at the edges parallel to the direction of compression, a solution is obtained for a system with one compressed member, by two methods, the first, using single (4.8), (4.9), (4.10), and the other, using double trigometric series (4.14).

For regular gridworks built in at the edges a simple solution is obtained from a model constituted by an orthotropic plate replacing the grate and plate system. If the edges, perpendicular to the direction of compression, are built in then the value of the critical force can be obtained from the infinite equations (5.12), (5.13). On the other hand if the edges parallel to the direction of compression are built in then the buckling condition is expressed by Eq. (5.16).

In the final part of the paper a method of evaluation of the influence of the torsional rigidity of parallel bars subjected to compression and reinforced with a plate on the critical force is indicated. The buckling condition is expressed in this case by the determinant of the system of equations (6.7) which express the conditions of identity of deflection of bars and plate, and those of identity of rotation angles of bars and plate, taken as being equal to zero.

---