

BIBLIOTEKA GŁÓWNA  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ  
Warszawa  
Pl. Jedności Robotniczej 4

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
K O M I T E T   B U D O W Y   M A S Z Y N

# ARCHIWUM BUDOWY MASZYN

KWARTALNIK

TOM IV · ZESZYT 3

W A R S Z A W A   1 9 5 7  
P A Ń S T W O W E   W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E

Warszawa

# STAN NAPRZEŻEN WYWOŁANY W PRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ DZIAŁANIEM CHWIŁOWEGO ŹRÓDŁA CIEPŁA

Zagadnienie jest traktowane w sposób quasi-statyczny, tzn. z pominięciem efektów dynamicznych wywołanych zmianami temperatury ciała. W pierwszej części pracy rozpatrzono wpływ chwilowego punkтового źródła ciepła w przestrzeni sprężystej nieograniczonej, uzyskując przy tym wyrażenie określające funkcje Greena dla rozpatrywanego zagadnienia. Na podstawie uzyskanych w ten sposób wyników rozwiązano następnie zagadnienia szczególne dotyczące chwilowego punkтового źródła ciepła w półprzestrzeni sprężystej oraz chwilowych źródeł liniowych i płaskich w przestrzeni i półprzestrzeni sprężystej.

### 1. Chwilowe źródło ciepła w nieograniczonej przestrzeni sprężystej

Niech w punkcie  $A(\xi, \eta, \zeta)$  sprężystej przestrzeni izotropowej wytworzona zostanie w chwili  $t = 0$  ilość ciepła  $Q = W \cdot c$ , gdzie  $W$  jest wydajnością źródła ciepła, a  $\varsigma$  i  $c$  oznaczają, odpowiednio, gęstość i ciepło właściwe ośrodka sprężystego. Pole temperatury opisane jest równaniem różniczkowym

$$(1) \quad \nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t},$$

gdzie:  $T(x,y,z,t)$  — temperatura w punkcie  $B(x,y,z)$  w chwili  $t$ ,  $\kappa = \lambda/\rho c_p$ ,  
 $\lambda$  — współczynnik przewodnictwa właściwego.

Pole temperatur wywołane działaniem skupionego, chwilowego źródła ciepła w punkcie  $A$  ( $\xi, \eta, \zeta$ ) określa wzór<sup>1)</sup>

$$(2) \quad T = \frac{\text{Wexp}\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right)}{8(\pi\kappa t)^{3/4}},$$

gdzie  $R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ ,

albo wyrażenie całkowite

$$(3) \quad T = \frac{W}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\kappa t (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \cos \alpha (x + \\ - \xi) \cos \beta (y - \eta) \cos \gamma (z - \zeta) d\alpha d\beta d\gamma.$$

W celu oznaczenia stanu naprężeń wygodnie będzie się posłużyć tak zwanym potencjałem termosprężystego odkształcenia  $\Phi$ . Związany jest on ze stanem przemieszczeń o składowych  $u$ ,  $v$  i  $w$  zależnościami<sup>1</sup>

$$(4) \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{ i } \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Wprowadzając związki (4) do trzech równań przemieszczeniowych teorii sprężystości sprowadzić je możemy do jednego równania<sup>2</sup>)

$$(5) \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t T,$$

gdzie:  $\nu$  — liczba Poissona,

$\alpha_t$  — współczynnik rozszerzalności liniowej.

Równanie (5) jest słuszne przy pominięciu efektów dynamicznych; w równaniach przemieszczeniowych teorii sprężystości pomijamy przyspieszenia przemieszczeń. Zagadnienie traktujemy więc jako quasi-stacyczne.

Różniczkując związek (5) względem czasu i korzystając z równania (1) otrzymamy

$$(6) \quad \nabla^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t \kappa \nabla^2 T,$$

skąd

$$(7) \quad \Phi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t \kappa \int T dt.$$

Ze związków (1) i (7) uzyskamy zależność

$$(8) \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Składowe stanu naprężeń związane są z potencjałem termosprężystego odprężenia zależnościami<sup>2</sup>)

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -2G \left( \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = 2G \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \\ \bar{\sigma}_{yy} &= -2G \left( \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 2G \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz} &= -2G \left( \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 2G \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \\ \bar{\sigma}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \bar{\sigma}_{xz} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \quad \bar{\sigma}_{yz} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}, \end{aligned}$$

gdzie  $G$  oznacza moduł odkształcenia postaciowego.

W celu wyznaczenia składowych stanu naprężeń wyznaczamy całkę szczególną równania (5) i wstawiamy ją do związków (9). Na ogół całka ta nie spełnia wszelkich warunków brzegowych. W takim przypadku dodamy do stanu naprężeń  $\bar{\sigma}$  tak dobrany stan naprężeń  $\bar{\bar{\sigma}}$ , aby wszelkie warunki brzegowe były spełnione. Naprężenie ostateczne uzyskamy tworząc sumy odpowiednich składowych stanów  $\bar{\sigma}$  oraz  $\bar{\bar{\sigma}}$ .

Widoczne jest, że zgodnie z wzorami (2) i (7) całka szczególna równania (5) przyjmie postać

$$(10) \quad \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{W\kappa}{8\pi^{3/2}} \int_0^t (\kappa t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right) dt$$

albo

$$(11) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{W}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa t(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \times \\ &\times \cos \alpha (x - \xi) \cos \beta (y - \eta) \cos \gamma (z - \zeta) d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned}$$

Całkę (10) przy podstawieniu  $u = \frac{R^2}{4\kappa t}$  doprowadzimy do postaci

$$(12) \quad \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{W}{4\pi^{3/2}R} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

Ponieważ

$$\int_u^\infty u^{-1/2} \exp(-u) du = \sqrt{\pi} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{u}) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \sqrt{u},$$

zatem

$$(13) \quad \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{W}{4\pi} R^{-1} \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{\kappa t}}.$$

Wstawiając całkę szczególną  $\Phi$  do związków (9) oraz wprowadzając oznaczenie

$$N = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{GW}{2\pi}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} = -\frac{N}{R^3} & \left\{ \left[ \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{\kappa t}} + \frac{R}{\sqrt{\pi \kappa t}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right) \right] \left( 1 + \right. \right. \\ (14a) \quad & \left. \left. - \frac{3(x-\xi)^2}{R^2} \right) + \frac{R \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right)}{2\sqrt{\pi} (\kappa t)^{1/2}} [R^2 - (x-\xi)^2] \right\} \end{aligned}$$

i dwa analogicznie zbudowane wzory dla  $\bar{\sigma}_{yy}$  i  $\bar{\sigma}_{zz}$   
oraz

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} = \frac{3N}{R^5} (x-\xi)(y-\eta) & \left[ \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{\kappa t}} + \right. \\ (14b) \quad & \left. + \frac{R}{\sqrt{\pi \kappa t}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right) \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{R^2}{\kappa t} \right) \right] \end{aligned}$$

i dwa analogiczne wyrażenia dla  $\bar{\sigma}_{xz}$  i  $\bar{\sigma}_{yz}$ ,

Widoczne jest, że naprężenia normalne i styczne znikają w nieskończoności dla dowolnej chwili  $t$ . Nie znikają one jednak dla  $t = \infty$  przy skończonych wartościach  $x$ ,  $y$  i  $z$  i w tych warunkach mamy

$$(15a) \quad \bar{\sigma}_{xx, \infty} = -\frac{N}{R^3} \left( 1 - \frac{3(x-\xi)^2}{R^2} \right)$$

i dwa analogicznie zbudowane wzory dla  $\bar{\sigma}_{yy, \infty}$  i  $\bar{\sigma}_{zz, \infty}$   
oraz

$$(15b) \quad \bar{\sigma}_{xy, \infty} = \frac{3N}{R^5} (x-\xi)(y-\eta)$$

i dwa analogiczne równania dla  $\bar{\sigma}_{xz, \infty}$  i  $\bar{\sigma}_{yz, \infty}$ .

Jeżeli ostatnie naprężenia odejmiemy od naprężeń przedstawionych wzorami (14a) i (14b), to uzyskamy składowe naprężenia spełniające wszelkie warunki brzegowe, a mianowicie

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = -\frac{N}{R^3} & \left\{ \left( 1 - \frac{3(x-\xi)^2}{R^2} \right) \left[ \frac{R}{\sqrt{\kappa t}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right) + \right. \right. \\ (16a) \quad & \left. \left. - \operatorname{erf} \frac{R}{2\sqrt{\kappa t}} \right] + \frac{R \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right)}{2\sqrt{\pi} (\kappa t)^{1/2}} [R^2 - (x-\xi)^2] \right\} \end{aligned}$$

i dwa analogicznie zbudowane wzory dla  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{zz}$ .  
oraz

$$(16b) \quad \sigma_{xy} = \frac{3N}{R^5} (x - \xi)(y - \eta) \left[ \frac{R}{\sqrt{\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right) \left(1 + \frac{R^2}{6\kappa t}\right) - \operatorname{erf} \frac{R}{2\sqrt{\kappa t}} \right]$$

i dwa analogiczne równania dla  $\sigma_{xz}$  i  $\sigma_{yz}$ .

Szczególnie prosto przedstawiają się wzory na składowe stanu naprężeń we współrzędnych biegunowych przy kulistej symetrii odkształcenia. Umieszczając źródło ciepła w początku układu współrzędnych mamy wówczas

$$(17) \quad \Phi = \frac{2N}{G} R^{-1} \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{\kappa t}},$$

$$\text{gdzie} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Składowe stanu naprężeń wyrażają się wzorami

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{RR} &= 2G \left( \varepsilon_{RR} + \frac{\nu}{1-2\nu} \Theta - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_i T \right), \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \bar{\sigma}_{\vartheta\vartheta} = 2G \left( \varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} \Theta - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_i T \right), \\ \bar{\sigma}_{R\varphi} &= 0, \quad \bar{\sigma}_{\varphi\vartheta} = 0, \quad \bar{\sigma}_{R\vartheta} = 0. \end{aligned}$$

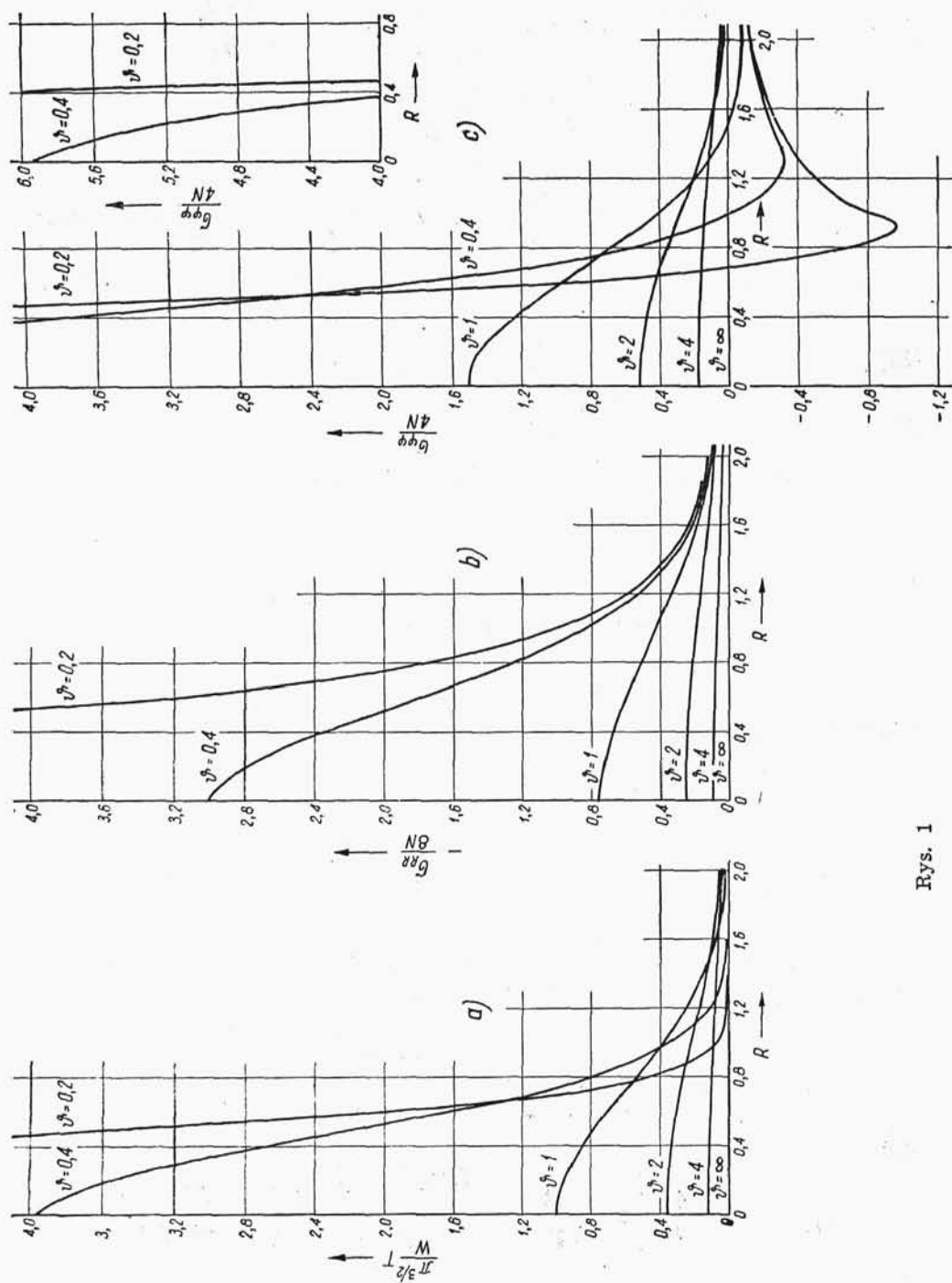
We wzorach tych

$$(19) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{RR} &= \frac{du_R}{dR}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_R}{R}, \quad u_R = \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \\ \Theta &= \varepsilon_{RR} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{du_R}{dR} + 2 \frac{u_R}{R}, \end{aligned}$$

gdzie  $u_R$  jest przemieszczeniem w kierunku promienia  $R$ .

Zważywszy ponadto, że dla  $t = \infty$  naprężenia powinny być równe zeru, otrzymamy równania (18) w postaci

$$(20) \quad \begin{aligned} \sigma_{RR} &= -\frac{8N}{R^3} \left( \operatorname{erf} \frac{R}{2\sqrt{\kappa t}} - \frac{R \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right)}{\sqrt{\pi\kappa t}} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{4N}{R^3} \left[ \operatorname{erf} \frac{R}{2\sqrt{\kappa t}} - \frac{R \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right)}{\sqrt{\pi\kappa t}} \left(1 + \frac{R^2}{2\kappa t}\right) \right], \\ \sigma_{R\varphi} &= \sigma_{R\vartheta} = \sigma_{\varphi\vartheta} = 0. \end{aligned}$$



Rys. 1

Na rysunku 1a, b i c przedstawione są wykresy funkcji  $T$ ,  $\sigma_{RR}$  i  $\sigma_{\varphi\varphi}$  w zależności od promienia  $R$  dla kilku parametrów  $\vartheta = 4\kappa t$ .

Jeżeli we wzorach (16a) i (16b) założyć  $W = 1$ , to będą one przedstawiały funkcje Greena naszego zagadnienia. Znajomość tych funkcji umożliwia rozwiązanie zagadnienia ogólniejszego, mianowicie wyznaczenie składowych  $\sigma_{ij}^*$  stanu naprężeń wywołanych w dowolnym punkcie  $B(x, y, z)$  działaniem chwilowych źródeł ciepła w  $(\xi, \eta, \zeta)$  rozłożonych w obszarze skończonym  $\Gamma$  przestrzeni sprężystej.

Stosując zasadę superpozycji otrzymamy składowe  $\sigma_{ij}^*$  ze związków

$$(21) \quad \sigma_{ij}^*(x, y, z, t) = \int \int \int_{(\Gamma)} w(\xi, \eta, \zeta) \sigma_{ij}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; t) d\xi d\eta d\zeta.$$

## 2. Chwilowe źródło ciepła w półprzestrzeni sprężystej

Niech w punkcie  $A(0, 0, \zeta)$  półprzestrzeni sprężystej działa chwilowe źródło ciepła o wydajności  $W$ . Wyznaczyć należy składowe stanu naprężeń przy założeniu wolnego od naprężeń brzegu  $z = 0$ , który stanowi płaszczyznę ograniczającą półprzestrzeń. Ponadto żądamy, aby dla  $z = 0$  było  $T = 0$ . Warunki brzegowe naszego zagadnienia mają zatem postać

$$(22) \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0 \quad \text{ i } \quad T = 0 \quad \text{ dla } z = 0,$$

Pierwszy i ostatni warunek będzie spełniony, jeśli w nieograniczonej przestrzeni sprężystej umieścimy w punkcie  $A(0, 0, \zeta)$  dodatnie, a w punkcie  $A'(0, 0, -\zeta)$  ujemne źródło ciepła.

Dla takiego układu źródeł, antysymetrycznie umieszczonych względem płaszczyzny  $z = 0$ , korzystając z wzoru (13) otrzymamy

$$(23) \quad \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{W}{4\pi} \left( R_1^{-1} \operatorname{erfc} \frac{R_1}{2\sqrt{\kappa t}} - R_2^{-1} \operatorname{erfc} \frac{R_2}{2\sqrt{\kappa t}} \right),$$

gdzie  $R_{1,2}^2 = x^2 + y^2 + (z \pm \zeta)^2$ .

Dla dalszych rozważań dogodnie będzie przedstawić funkcję (23) przy pomocy całki Fouriera

$$(24) \quad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{W}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa t(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}{a^2 + \beta^2 + \gamma^2} \times \\ \times \cos ax \cos \beta y [\cos \gamma(z - \zeta) - \cos \gamma(z + \zeta)] da d\beta d\gamma.$$

Składowe stanu naprężeń wywołane działaniem dwóch źródeł antysymetrycznie umieszczonych względem płaszczyzny  $z = 0$  łatwo wyznaczymy przy pomocy wzorów (16a) i (16b). I tak, przykładowo,



$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{xx} = & -\frac{N}{R_1^3} \left\{ \left( 1 - \frac{3x^2}{R_1^2} \right) \left[ \frac{R_1}{\sqrt{\kappa t}} \exp \left( -\frac{R_1^2}{4\kappa t} \right) - \operatorname{erf} \frac{R_1}{2\sqrt{\kappa t}} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{R_1 \exp \left( -\frac{R_1^2}{4\kappa t} \right)}{2\sqrt{\pi} (\kappa t)^{1/2}} (R_1^2 - x^2) \right\} + \frac{N}{R_2^3} \left\{ \left( 1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) \times \right. \\
 & \left. \times \left[ \frac{R_2}{\sqrt{\kappa t}} \exp \left( -\frac{R_2^2}{4\kappa t} \right) - \operatorname{erf} \frac{R_2}{2\sqrt{\kappa t}} \right] + \frac{R_2 \exp \left( -\frac{R_2^2}{4\kappa t} \right)}{2\sqrt{\pi} (\kappa t)^{1/2}} (R_2^2 - x^2) \right\},
 \end{aligned}
 \quad (25a)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{xy} = & 3Nxy \left\{ \frac{1}{R_1^3} \left[ \frac{R_1}{\sqrt{\pi \kappa t}} \exp \left( -\frac{R_1^2}{4\kappa t} \right) \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{R_1^2}{\kappa t} \right) - \operatorname{erf} \frac{R_1}{2\sqrt{\kappa t}} \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{R_2^3} \left[ \frac{R_2}{\sqrt{\pi \kappa t}} \exp \left( -\frac{R_2^2}{4\kappa t} \right) \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{R_2^2}{\kappa t} \right) - \operatorname{erf} \frac{R_2}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \quad (25b)$$

Funkcja  $\Phi$  nie spełnia tu wszystkich warunków brzegowych. W płaszczyźnie  $z = 0$  nie znikają naprężenia  $\bar{\sigma}_{xx}$  i  $\bar{\sigma}_{yz}$ . W celu zniesienia tych naprężeń należy rozwiązać dodatkowe zadanie. Należy w półprzestrzeni sprężystej (przy  $T = 0$ ) wyznaczyć stan naprężeń  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$  wywołany działaniem naprężeń tnących  $-\bar{\sigma}_{xx}$  i  $-\bar{\sigma}_{yz}$  przyłożonych w płaszczyźnie  $z = 0$ . W zadaniu tym mają być spełnione warunki

$$(26) \quad \bar{\sigma}_{xz} + \bar{\bar{\sigma}}_{xz} = 0, \quad \bar{\sigma}_{yz} + \bar{\bar{\sigma}}_{yz} = 0 \quad \text{ i } \quad \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = 0 \quad \text{ dla } z = 0.$$

Naprężenia  $\sigma_{ij}$  wywołane działaniem źródła ciepła w punkcie  $A(0, 0, \zeta)$  półprzestrzeni sprężystej uzyskamy przez superpozycję naprężeń  $\bar{\sigma}_{ij}$  i  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ .

W celu wyznaczenia składowych stanu naprężeń  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$  w półprzestrzeni sprężystej posłużymy się funkcją przemieszczeniową B. G. Galerkina<sup>3)</sup>. Sprowadza ona układ trzech równań różniczkowych przemieszczeniowych do jednego równania biharmonicznego

$$(27) \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

przy czym składowe stanu naprężeń  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$  wyrażone są zależnościami

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{\sigma}}_{xx} = & \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \quad \bar{\bar{\sigma}}_{yy} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right), \\
 \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = & \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right],
 \end{aligned}
 \quad (28)$$

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi \right),$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi \right).$$

Funkcję przemieszczeniową przyjmiemy w postaci całki Fouriera

$$(29) \quad \varphi = \int_0^\infty \int_0^\infty Z(\alpha, \beta, z) \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta,$$

gdzie  $Z = (A + B\delta z) e^{-\delta z}, \quad \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$

a  $A$  i  $B$  są funkcjami parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ .

Trzeci warunek brzegowy (26) prowadzi [co łatwo sprawdzić wstawiając (29) do  $\bar{\sigma}_{zz}$  z wzoru (28)] do związku

$$(30) \quad (2 - \nu) Z'(0) \delta^2 - (1 - \nu) Z'''(0) = 0.$$

Ponieważ  $Z'(0) = (B - A)\delta$  i  $Z'''(0) = (3B - A)\delta^3$ , zatem

$$(31) \quad B = -\frac{A}{1 - 2\nu}.$$

Dwa pierwsze warunki brzegowe (26) przedstawić można w postaci

$$(32) \quad \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2G \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi \right]_{z=0} = 0.$$

Widoczne jest, że sprowadzają się one do jednego warunku

$$(33) \quad \left[ 2G \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi \right]_{z=0} = 0.$$

Wyrażając funkcję  $\Phi$  wzorem (24) i funkcję  $\varphi$  wzorem (29) uzyskamy

$$(34) \quad -\frac{4W(1+\nu)}{\pi^3(1-\nu)} a_t e^{-\kappa t \delta^2} \int_0^\infty \frac{\gamma e^{-\kappa t \gamma^2}}{\gamma^2 + \delta^2} \sin \gamma \zeta d\gamma +$$

$$-(1-\nu) Z(0) \delta^2 - \nu Z''(0) = 0.$$

Ponieważ  $Z(0) = A$  i  $Z''(0) = -(2B - A)\delta^2$ , zatem z równań (34) i (31) otrzymamy

$$(35) \quad A = -\frac{4W(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi^3(1-\nu)\delta^2} a_t e^{-\kappa t \delta^2} \int_0^\infty \frac{\gamma \exp(-\kappa t \gamma^2)}{\gamma^2 + \delta^2} \times$$

$$\times \sin \gamma \zeta d\gamma,$$

$$B = -A(1 - 2\nu).$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \frac{\gamma \exp(-\kappa t \gamma^2)}{\gamma^2 + \delta^2} \sin \gamma \zeta d\gamma = \\
 (36) \quad & = \frac{\pi}{4} \exp(\kappa t \delta^2) \left[ \exp(-\delta \zeta) \operatorname{erfc} \left( \delta \sqrt{\kappa t} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \right. \\
 & \quad \left. - \exp(\delta \zeta) \operatorname{erfc} \left( \delta \sqrt{\kappa t} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right],
 \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned}
 \varphi = & - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha_t W}{\pi^2(1-\nu)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\delta^2} \left( 1 - \frac{1}{1-2\nu} \delta z \right) \times \\
 (37) \quad & \times \left\{ \exp[-\delta(z+\zeta)] \operatorname{erfc} \left( \delta \sqrt{\kappa t} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \right. \\
 & \left. - \exp[-\delta(z-\zeta)] \operatorname{erfc} \left( \delta \sqrt{\kappa t} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right\} \cos \alpha x \cos \beta y da d\beta.
 \end{aligned}$$

Znajomość funkcji  $\varphi$  daje już możliwość wyznaczenia składowych stanu naprężenia  $\bar{\sigma}_{ij}$  z wzorów (28). Ponieważ ani funkcja  $\varphi$ , ani jej trzecie pochodne nie dają się wyrazić w postaci zamkniętej, wyznaczenia składowych stanu naprężeń  $\bar{\sigma}_{ij}$  można dokonać tylko żmudnym sposobem numerycznym.

Rozważmy przypadek działania chwilowego źródła ciepła w punkcie  $A(0, 0, \zeta)$  w przypadku, gdy w płaszczyźnie  $z = 0$  składowe przemieszczeń  $u = 0$ ,  $v = 0$  i  $w = 0$ .

Postępując podobnie jak w przypadku poprzednim i przyjmując funkcję  $\Phi$  według wzoru (23) łatwo sprawdzimy, że w płaszczyźnie  $z = 0$

$$(38) \quad \bar{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{ i } \quad \bar{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{z=0} = 0.$$

Różnymi od zera są przemieszczenia  $\bar{w}$ . Do stanu naprężeń  $\bar{\sigma}_{ij}$  [składowe tego stanu wyrażone są wzorami (25a) i (25b)] należy dodać stan  $\bar{\sigma}_{ij}$ . Stan ten wyznaczamy w półprzestrzeni sprężystej (przy  $T = 0$ ), która poddana jest w płaszczyźnie  $z = 0$  działaniu przemieszczenia  $-\bar{w}$ . Dla tego dodatkowego zadania warunki brzegowe kształtują się następująco:

$$(39) \quad \bar{u} \Big|_{z=0} = 0, \quad \bar{v} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{ i } \quad \left( \bar{w} + \bar{\bar{w}} \right) \Big|_{z=0} = 0.$$

Ponieważ składowe stanu przemieszczeń związane są z funkcją  $\varphi$  zależnościami

$$(40) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, & \bar{v} &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \\ \bar{w} &= \frac{1+\nu}{E} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1-2\nu) \nabla^2 \varphi \right], \end{aligned}$$

gdzie  $E$  oznacza moduł sprężystości, zatem zadanie nasze sprowadza się do rozwiązania różniczkowego (27) z warunkami brzegowymi

$$(41) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left\{ \frac{1+\nu}{E} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1-2\nu) \nabla^2 \varphi \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\}_{z=0} = 0.$$

Funkcję  $\varphi$  przyjmujemy w postaci (29). Z warunków brzegowych (41) wyznaczamy wielkości  $A$  i  $B$ , a z wzorów (25a) i (25b) otrzymujemy składowe stanu naprężenia  $\bar{\sigma}_{ij}$ .

Ostateczne funkcje naprężeń określa związek  $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ .

Żadnych trudności nie następuje również przypadek, w którym płaszczyzna  $z=0$  jest wolna od naprężeń tnących, a przemieszczenia  $w$  są dla  $z=0$  równe zeru. Przy wyznaczeniu stanu naprężeń  $\bar{\sigma}_{ij}$  należy dla funkcji  $\varphi$  przyjąć w tym przypadku warunki brzegowe

$$(42) \quad \begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi + 2G \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1-2\nu) \nabla^2 \varphi \right]_{z=0} &= 0. \end{aligned}$$

Funkcje  $\Phi$  i  $\varphi$  wyrażone są tutaj, odpowiednio, wzorami (23) i (29).

Jeśli we wszystkich tych rozpatrywanych przypadkach przenieść źródło ciepła z punktu  $A(0, 0, \zeta)$  do punktu  $\bar{A}(\xi, \eta, \zeta)$ , to we wszystkich wzorach tego rozdziału należy w miejsce  $x$  i  $y$  wstawić  $x - \xi$  i  $y - \eta$ . Jeśli ponadto przyjąć  $W = 1$ , to składowe stanu naprężenia  $\sigma_{ij}$  będą funkcjami Greena naszego zagadnienia. Droga całkowania, zgodnie z wzorem (15), otrzymać można przy ich pomocy składowe stanu naprężeń  $\sigma_{ij}$  wywołane działaniem źródeł ciepła rozmieszczonych w obszarze skończonym  $\Gamma$  półprzestrzeni sprężystej.

### 3. Chwilowe liniowe źródła ciepła w nieograniczonej przestrzeni sprężystej

Niech chwilowe źródło ciepła będzie w sposób równomierny rozłożone wzdłuż prostej równoległej do osi  $z$  i przechodzącej przez punkt  $C(\xi, \eta, 0)$ . W tym przypadku tak pole temperatury, jak i składowe stanu naprężeń, będą niezależne od zmiennej  $z$ . Mamy tu do czynienia z zagadnieniem płaskiego stanu odkształcenia.

Pole temperatury oraz potencjał termosprężystego odkształcenia otrzymamy ze wzorów (2) i (10) wykonując całkowanie wzdłuż osi  $z$  od  $-\infty$  do  $+\infty$ , a mianowicie

$$(43a) \quad T = \frac{w}{8 (\pi \kappa t)^{1/2}} e^{-\frac{r^2}{4 \kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4 \kappa t}} dz = \frac{w}{4 \pi \kappa t} e^{-\frac{r^2}{4 \kappa t}}$$

oraz

$$(44a) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{(1+\nu) w \kappa a_t}{(1-\nu) 8 \pi^{3/2}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4 \kappa t}}}{(\kappa t)^{3/2}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4 \kappa t}} dx \right) dt = \\ &= \frac{(1+\nu) a_t w}{(1-\nu) 4 \pi} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4 \kappa t}}}{\kappa t} dt, \end{aligned}$$

gdzie:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

a  $w$  oznacza wydajność źródła na jednostkę długości.

Zauważymy, że funkcje  $\Phi$  i  $T$  dadzą się przedstawić całkami Fouriera w postaci

$$(43b) \quad T = \frac{w}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\kappa t (a^2 + \beta^2)} \cos a(x - \xi) \cos \beta(y - \eta) da d\beta,$$

$$(44b) \quad \Phi = -\frac{(1+\nu) a_t w}{(1-\nu) \pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa t (a^2 + \beta^2)}}{a^2 + \beta^2} \cos a(x - \xi) \cos \beta(y - \eta) da d\beta.$$

Wprowadzając oznaczenia  $\vartheta = 4 \kappa t$  i  $u = r^2/\vartheta$  doprowadzimy wzór (44a) do postaci

$$(45) \quad \Phi = \frac{(1+\nu) a_t w \kappa}{(1-\nu) 4\pi} f(u),$$

gdzie

$$f(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Korzystając z wzorów (9) i zważywszy, że wszystkie pochodne względem  $z$  są równe zero, otrzymamy

$$(46) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, & \bar{\sigma}_{yy} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, & \bar{\sigma}_{zz} &= -2G \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right), \\ \bar{\sigma}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, & \bar{\sigma}_{xz} &= 0, & \bar{\sigma}_{yz} &= 0. \end{aligned}$$

Wstawiając do tych wzorów funkcję  $\Phi$  z wzoru (45) znajdziemy

$$(47) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{4A}{r^2} e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} \left[ 1 - 2(y-\eta)^2 \left( \frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{r^2} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{4A}{r^2} e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} \left[ 1 - 2(x-\xi)^2 \left( \frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{r^2} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_{zz} &= -\frac{8Ae^{-\frac{r^2}{\vartheta}}}{\vartheta} = -2G \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t T, \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{8A}{r^2} (x-\xi)(y-\eta) e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} \left( \frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{r^2} \right), \\ \bar{\sigma}_{yz} &= 0, & \bar{\sigma}_{xz} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$A = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a_t w G}{4\pi}.$$

Wymienione składowe naprężeń znikają przy  $x \rightarrow \infty$  i  $y \rightarrow \infty$ . Nie znikają jednak dla  $t \rightarrow \infty$ . W tym ostatnim przypadku otrzymamy

$$(48) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx,\infty} &= \frac{4A}{r^2} \left( 1 - \frac{2(y-\eta)^2}{r^2} \right), & \bar{\sigma}_{yy,\infty} &= \frac{4A}{r^2} \left( 1 - \frac{2(x-\xi)^2}{r^2} \right), \\ \bar{\sigma}_{xy,\infty} &= \frac{8A}{r^4} (x-\xi)(y-\eta), & \bar{\sigma}_{zz,\infty} &= 0. \end{aligned}$$

Dodając do siebie składowe według wzorów (47) oraz składowe wyrażone wzorami (48), ale wzięte z przeciwnymi znakami, otrzymamy

ostateczne wyrażenia dla składowych stanu naprężeń spełniające wszelkie warunki brzegowe. Zatem

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -\frac{4A}{r^2} \left\{ \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} \right) \left[ 1 - \frac{2}{r^2} (y - \eta)^2 \right] + \frac{2}{\vartheta} (y - \eta)^2 e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} \right\}, \\
 \sigma_{yy} &= -\frac{4A}{r^2} \left\{ \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} \right) \left[ 1 - \frac{2}{r^2} (x - \xi)^2 \right] + \frac{2}{\vartheta} (x - \xi)^2 e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} \right\}, \\
 (49) \quad \sigma_{zz} &= -\frac{8A}{\vartheta} e^{-\frac{r^2}{\vartheta}}, \quad \sigma_{xz} = 0 \quad \sigma_{yz} = 0, \\
 \sigma_{xy} &= \frac{8A}{r^2} (x - \xi)(y - \eta) \left[ \frac{e^{-\frac{r^2}{\vartheta}}}{\vartheta} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Przejdźmy teraz z punktem  $C$  do początku układu współrzędnych. Wtedy, w przypadku źródła chwilowego równomiernie rozłożonego wzdłuż osi  $z$ , mamy do czynienia w układzie współrzędnych walcowych  $(r, \varphi, z)$  z zadaniem osiowo symetrycznym.

Przeprowadzając transformację naprężeń i układu współrzędnych mamy

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -\frac{4A}{r^2} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{4A}{r^2} \left[ \left( 1 + \frac{2r^2}{\vartheta} \right) e^{-\frac{r^2}{\vartheta}} - 1 \right], \\
 (50) \quad \sigma_{zz} &= -\frac{8A}{\vartheta} e^{-\frac{r^2}{\vartheta}}, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\varphi z} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie oczywiście

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Analogiczne wzory (różniące się jedynie znaczeniem stałej  $A$  i przy  $\sigma_{zz} = 0$ ) otrzymał E. Melan<sup>4)</sup> dla naprężeń występujących w nieograniczonej tarczy, w której działa chwilowe źródło ciepła umieszczone w początku układu współrzędnych.

#### 4. Chwilowe, liniowe źródło ciepła w półprzestrzeni sprężystej

Niech wzdłuż prostej równoległej do osi  $z$  a przechodzącej przez punkt  $C(\xi, 0, 0)$  rozmieszczone będzie źródło ciepła w sposób równomier-ny. W rozpatrywanym przypadku zarówno temperatura, jak i potencjał termosprężystego odkształcenia, będą jedynie funkcjami zmiennych  $x$

i  $y$ . Załóżmy, że w płaszczyźnie  $x = 0$  ograniczającej półprzestrzeń sprężystą ma być  $T = 0$ . Ponieważ płaszczyzna ta powinna być ponadto wolna od naprężeń, zatem warunki brzegowe przyjmą postać

$$(51) \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0 \quad \text{i} \quad T = 0 \quad \text{dla } x = 0.$$

Przedostatni warunek jest spełniony, gdyż funkcje  $T$  i  $\Phi$  są niezależne od zmiennej  $z$ , a przecież  $\sigma_{xz} = 2G\partial^2\Phi/\partial x \partial z$ . Pierwszy i ostatni warunek spełnimy, jeśli w nieograniczonej przestrzeni sprężystej umieścimy dwa źródła liniowe — jedno dodatnie, przechodzące przez punkt  $C(\xi, 0, 0)$ , i drugie ujemne, przebiegające przez punkt  $C'(-\xi, 0, 0)$ .

Wtedy, korzystając z wzorów (43a) i (43b), mamy

$$(52) \quad T = \frac{w}{\pi\vartheta} \left( e^{-\frac{r_1^2}{\vartheta}} - e^{-\frac{r_2^2}{\vartheta}} \right),$$

$$\text{gdzie} \quad r_{1,2}^2 = (x - \xi)^2 + y^2,$$

albo

$$(53) \quad T = \frac{2w}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\kappa t(\alpha^2 + \beta^2)} \sin \alpha x \sin \alpha \xi \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta.$$

Korzystając z wzorów (45) i (44) znajdziemy

$$(54) \quad \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_i w \kappa}{4\pi} \left[ f\left(\frac{r_1}{\sqrt{\vartheta}}\right) - f\left(\frac{r_2}{\sqrt{\vartheta}}\right) \right]$$

albo

$$(55) \quad \Phi = -\frac{2(1+\nu)\alpha_i w}{(1-\nu)\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa t(\alpha^2 + \beta^2)}}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \alpha \xi \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta.$$

Składowe stanu naprężeń wywołane działaniem pary źródeł wyznaczmy korzystając z wzorów (49)

$$(56) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} = & -4A \left\{ \frac{1}{r_1^2} \left[ \left(1 - \frac{2y^2}{r_1^2}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_1^2}{\vartheta}}\right) + \frac{2y^2}{\vartheta} e^{-\frac{r_1^2}{\vartheta}} \right] + \right. \\ & \left. - \frac{1}{r_2^2} \left[ \left(1 - \frac{2y^2}{r_2^2}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_2^2}{\vartheta}}\right) + \frac{2y^2}{\vartheta} e^{-\frac{r_2^2}{\vartheta}} \right] \right\}, \\ \bar{\sigma}_{yy} = & -4A \left\{ \frac{1}{r_1^2} \left[ \left(1 - \frac{2x^2}{r_1^2}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_1^2}{\vartheta}}\right) + \frac{2x^2}{\vartheta} e^{-\frac{r_1^2}{\vartheta}} \right] + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (56) \quad & -\frac{1}{r_2^2} \left[ \left( 1 - \frac{2x^2}{r_2^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{r_2^2}{\vartheta}} \right) + \frac{2x^2}{\vartheta} e^{-\frac{r_2^2}{\vartheta}} \right], \\
 \bar{\sigma}_{xy} = & 8Ay(x - \xi) \left\{ \frac{1}{r_1^2} \left[ \frac{e^{-\frac{r_1^2}{\vartheta}}}{\vartheta} - \frac{1}{r_1^2} \left( 1 - e^{-\frac{r_1^2}{\vartheta}} \right) \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{r_2^2} \left[ \frac{e^{-\frac{r_2^2}{\vartheta}}}{\vartheta} - \frac{1}{r_2^2} \left( 1 - e^{-\frac{r_2^2}{\vartheta}} \right) \right] \right\}, \\
 \bar{\sigma}_{zz} = & -\frac{8A}{\vartheta} \left( e^{-\frac{r_1^2}{\vartheta}} - e^{-\frac{r_2^2}{\vartheta}} \right), \quad \bar{\sigma}_{xz} = 0, \quad \bar{\sigma}_{yz} = 0.
 \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że dla  $x = 0$  składowe naprężeń  $\bar{\sigma}_{xx} = 0$ ,  $\bar{\sigma}_{yy} = 0$ ,  $\bar{\sigma}_{zz} = 0$  i  $\bar{\sigma}_{xy} \neq 0$ .

Dla dalszych rozważań będzie wygodnie przedstawić naprężenia przy pomocy całki Fouriera

$$\begin{aligned}
 (57) \quad \bar{\sigma}_{xy}|_{x=0} = & 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0} = \frac{4wGa_t(1+\nu)}{\pi^2(1-\nu)} \times \\
 & \times \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t(\alpha^2 + \beta^2)}}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \alpha \xi \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta.
 \end{aligned}$$

W celu zniesienia naprężeń  $\bar{\sigma}_{xy}$  w płaszczyźnie  $x = 0$  należy do stanu  $\bar{\sigma}_{ij}$  dodać naprężenia  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ , które powstaną w półprzestrzeni sprężystej pod działaniem naprężeń stycznych  $-\sigma_{xy}|_{x=0}$  przyłożonych w płaszczyźnie  $x = 0$  ograniczającej półprzestrzeń.

Składowe stanu naprężeń  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$  wyznaczmy w sposób najprostszy korzystając z funkcji Airy'ego. Rozwiązać zatem należy równanie różniczkowe

$$(58) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0,$$

z warunkami brzegowymi

$$(59) \quad \bar{\sigma}_{xy} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{x=0} = 0.$$

Funkcję  $F$  przyjmijmy w postaci całki Fouriera

$$(60) \quad F = \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2} (A + B\beta x) e^{-\beta x} \cos \beta y \, d\beta.$$

Z drugiego warunku (59) wynika, że  $A = 0$ . Z pierwszego warunku brzegowego (59) otrzymamy

$$(61) \quad B(\beta) = -\frac{4wG(1+\nu)a_t\beta}{\pi^2(1-\nu)} \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa t(a^2+\beta^2)}}{a^2+\beta^2} \sin a\xi da.$$

Ponieważ całkę niewłaściwą (61) można wyrazić w postaci zamkniętej, zatem

$$(62) \quad F = -\frac{(1+\nu)Gwa_t}{(1-\nu)2\sqrt{\pi}} x \int_0^\infty \left[ e^{-\beta(x+\xi)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sqrt{\vartheta}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\vartheta}}\right) + \right. \\ \left. - e^{-\beta(x-\xi)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sqrt{\vartheta}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\vartheta}}\right) \right] \cos \beta y d\beta.$$

Znajomość funkcji  $F$  daje już możliwość wyznaczenia dodatkowych naprężeń

$$(63) \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \bar{\sigma}_{yz} = 0, \\ \bar{\sigma}_{xz} = 0, \quad \bar{\sigma}_{zz} = -\nu \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right).$$

Sumy naprężeń  $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}$  spełniają już wszelkie warunki brzegowe naszego zagadnienia i są jego rozwiązaniem.

### 5. Chwilowe płaskie źródło ciepła w nieograniczonej przestrzeni sprężystej

Niech w płaszczyźnie  $x = \xi$  działają rozłożone w sposób jednostajny źródła ciepła. W tym przypadku tak temperatura, jak i składowe stanu naprężeń będą funkcjami jedynie zmiennej  $x$ .

Pole temperatury przy wykorzystaniu wzoru (43a) wyrazi się równaniem

$$(64) \quad T(x, t) = \frac{w}{4\pi\kappa t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4\kappa t}} dy = \frac{w}{\sqrt{\pi\vartheta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\vartheta}}.$$

Potencjał termosprężystego odkształcenia otrzymamy w sposób analogiczny korzystając z wzoru (44a), a mianowicie

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, t) &= \frac{(1+\nu) a_t w \kappa}{(1-\nu) \pi} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\vartheta}}}{\vartheta} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\vartheta}} dy \right) dt = \\
 &= \frac{(1+\nu) a_t w}{(1-\nu) 4 \sqrt{\pi}} (x-\xi) \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}} d\eta,
 \end{aligned}
 \tag{65}$$

gdzie 
$$\eta = \frac{(x-\xi)^2}{\vartheta}.$$

Składowe stanu naprężeń  $\sigma_{ij}$  wyznaczymy z wzorów (9) pamiętając, że funkcja  $\Phi$  oraz naprężenia zależą jedynie od zmiennej  $x$ . Różnymi od zera będą jedynie naprężenia  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{zz}$ . Mamy więc

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{2(1+\nu) a_t w}{(1-\nu) \sqrt{\pi \vartheta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\vartheta}}$$

albo

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yy} = -\frac{2(1+\nu) a_t}{1-\nu} T(x, t).$$

Naprężenia te znikają dla  $x \rightarrow \infty$  oraz dla  $t \rightarrow \infty$ .

## 6. Chwilowe płaskie źródło ciepła w półprzestrzeni sprężystej

Niech w półprzestrzeni sprężystej (ograniczonej płaszczyzną  $x=0$ ) działają w płaszczyźnie  $x=\xi$  jednostajnie rozłożone źródła ciepła. W płaszczyźnie  $x=0$  powinny być spełnione warunki brzegowe

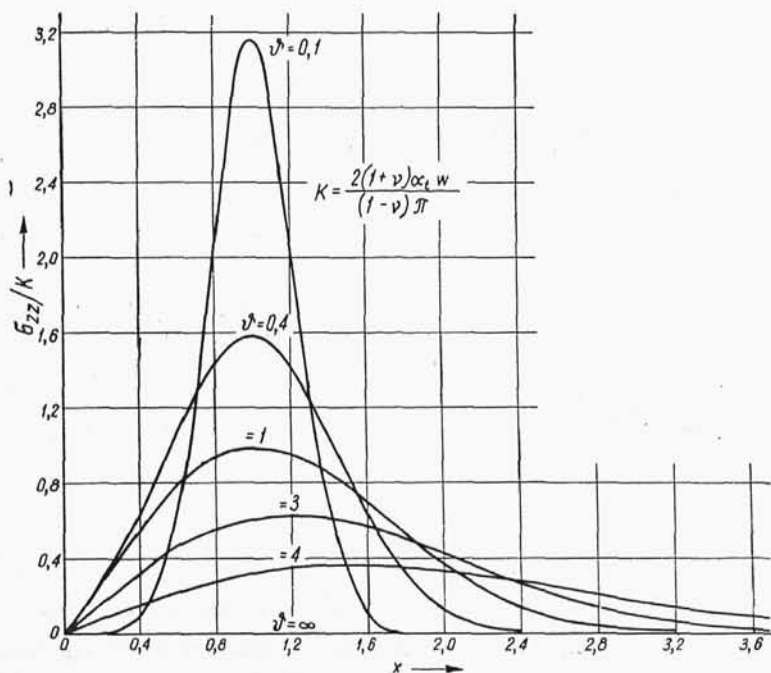
$$T=0, \quad \sigma_{xx}=0, \quad \sigma_{xy}=0 \quad \text{i} \quad \sigma_{xz}=0.$$

Te warunki brzegowe będą spełnione, jeśli w nieograniczonej przestrzeni sprężystej działać będą jednostajnie rozłożone dodatnie źródła ciepła w płaszczyźnie  $x=+\xi$  oraz ujemne w płaszczyźnie  $x=-\xi$ . Wtedy pole temperatury opisane jest związkiem

$$T(x, t) = \frac{w}{\sqrt{\pi \vartheta}} \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\vartheta}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{\vartheta}} \right),$$

a naprężenia wzorami

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} = \sigma_{yy} &= -\frac{2(1+\nu) a_t w}{(1-\nu) \sqrt{\pi \vartheta}} \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\vartheta}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{\vartheta}} \right), \\
 \sigma_{xx} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad \text{i} \quad \sigma_{xz} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{69}$$



Rys. 2

Na rysunku 2 przedstawiono wykres naprężeń  $\sigma_{zz}$  dla  $\xi = 1$  i dla kilku wartości parametru  $\nu$ .

Praca wpłynęła do redakcji w listopadzie 1956 r.

#### LITERATURA

1. H. S. Carslaw i J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, Oxford 1950.
2. E. Melan i H. Parcus: Waermespannungen stationärer Temperaturfelder. Wien 1953.
3. B. G. Galerkin: K woprosu ob issledovanii napriazhenii i dieformacii w uprugom izotropnom tiele. Dokł. Akad. Nauk SSSR, 1930.
4. E. Melan: Spannungen infolge nicht stationärer Temperaturfelder. Oster. Ing. Archiv. 1955.

## Состояние напряжений в упругом пространстве и полупространстве, вызванное действием мгновенного источника тепла

### Краткое содержание

В первой части труда рассмотрено состояние напряжений, вызванное действием точечного мгновенного источника тепла. Исходя из уравнения (5) выражающего связь между полем потенциала термоупругой деформации  $\Phi$  и полем температуры  $T$ , получено функцию  $\Phi$  в замкнутом виде (13). Зная функцию  $\Phi$  можно определить составляющие состояния напряжения  $\sigma_{ij}$ , пользуясь формулами (9).

Во второй части труда рассмотрено состояние напряжений в упругом полупространстве, вызванное действием точечного мгновенного источника тепла, расположенного в точке  $A(0,0,\xi)$ . Эта задача решена, применяя метод отражений.

Размещая в неограниченном пространстве два источника тепла антисимметрически по отношению к плоскости  $z = 0$  выполнено в этой плоскости граничные условия  $T = 0$ , а также  $\bar{\sigma}_{zz} = 0$ . К состоянию напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  прибавлено состояние напряжения  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ , так подобранное, чтобы в плоскости  $z = 0$  были соблюдены условия (26).

Состояние напряжений  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ , определено, используя функцию перемещения В. Г. Галеркина.

Суперпозиция состояний  $\bar{\sigma}_{ij}$ , а также  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$  дает результирующее состояние напряжений  $\sigma_{ij}$ , вызванное действием источника тепла, расположенного в точке  $A(0,0,\xi)$  упругого полупространства.

В заключительной части труда рассмотрены граничные случаи, а именно определено состояние напряжений, вызванное действием мгновенного линейного и мгновенного плоского источника тепла, расположенного в неограниченном пространстве и в упругом полупространстве.

## State of Stress in an Elastic Space and Half-space due to the Action of an Instantaneous Source of Heat

### Summary

The first part of the paper deals with state of the stress due to the action of a concentrated instantaneous source of heat. Starting from equation (5) binding the field of thermoelastic potential of the deformation  $\Phi$  and the temperature field  $T$ , the author obtains the

function  $\Phi$  in a closed form (13). The knowledge of the function  $\Phi$  makes it possible to determine the components of the stress distribution  $\sigma_{ij}$  from formulae (9).

The second part deals with the state of stress caused in an elastic half-space by the action of a concentrated instantaneous source of heat placed at a point  $A(0,0,\xi)$ . The problem is showed by the method of reflections. Two sources of heat are placed in an unbounded space asymmetrically with respect to a plane  $z = 0$  and the boundary conditions  $T = 0$  and  $\bar{\sigma}_{zz} = 0$  are satisfied in this plane. A stress distribution  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ , chosen so that conditions (26) are satisfied in the plane  $z = 0$ , is added to the stress distribution  $\bar{\sigma}_{ij}$ . The stress distribution  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$  is determined by means of the displacement function of B. G. Galerkin. A superposition of the distributions  $\bar{\sigma}_{ij}$  and  $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$  gives the final stress distribution  $\sigma_{ij}$  due to the action of a source of heat placed at the point  $A(0,0,\xi)$  of the elastic half-space.

Finally the boundary cases are considered, namely the state of stress due to the action of an instantaneous linear and an instantaneous plane source of heat placed in an unbounded space and in an elastic half-space are determined.