

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa
ul. Politechniki Robotniczej

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
K O M I T E T B U D O W Y M A S Z Y N

ARCHIWUM BUDOWY MASZYN

KWARTALNIK

TOM IV · ZESZYT 2

W A R S Z A W A 1 9 5 7
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

Warszawa

Rozkład temperatury w tarczy opisany jest równaniem różniczkowym

$$(2) \quad \nabla^2 T + \frac{W}{hk} = 0.$$

gdzie:

W — intensywność źródła ciepłego,

k — współczynnik przewodnictwa cieplnego,

h — grubość tarczy.

Zależności (1) i (2) zastąpić możemy jednym równaniem

$$(3) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = - \frac{(1 + \nu) \alpha W}{hk}.$$

Warunki brzegowe zagadnienia kształtują się na brzegu prostoliniowym w sposób następujący:

Na brzegu tarczy temperatura ma wartość stałą; nie umniejszając ogólności rozwiązania przyjmujemy przy tym, że wartość ta jest równa zeru ($T = 0$). Warunek ten pociąga za sobą zależność $\nabla^2 \Phi = 0$ wzdłuż brzegu tarczy. Naprężenia wywołane polem temperatury związane są z funkcją Φ zależnościami¹⁾

$$(4) \quad \bar{\sigma}_x = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_y = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \text{ i } \quad \bar{\tau}_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Drugi warunek brzegowy powinien określić znikanie naprężeń normalnych lub stycznych na brzegach tarczy. Przyjmując, że $\Phi = 0$ na brzegu tarczy, doprowadzimy do zniknięcia naprężeń normalnych wzdłuż linii brzegowej. W celu zniesienia naprężeń tnących na brzegu tarczy należy do naprężeń (4) dodać, odpowiednio, naprężenia

$$(5) \quad \bar{\bar{\sigma}}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{ i } \quad \bar{\bar{\tau}}_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Funkcja F powinna przy tym spełnić równanie różniczkowe

$$(6) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0.$$

Przy rozwiązywaniu równania (5) zakładamy, że na brzegu tarczy znikają naprężenia normalne, zaś naprężenia tnące spełniają warunek brzegowy $\bar{\bar{\tau}}_{xy} = -\bar{\tau}_{xy}$.

Naprężenia wywołane działaniem temperatury określają wzory

$$(7) \quad \sigma_x = \bar{\sigma}_x + \bar{\bar{\sigma}}_x, \quad \sigma_y = \bar{\sigma}_y + \bar{\bar{\sigma}}_y \quad \text{ i } \quad \tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} + \bar{\bar{\tau}}_{xy}.$$

Zauważmy, że równanie różniczkowe (3) z warunkami brzegowymi $\Phi = 0$ i $\nabla^2 \Phi = 0$ wykazuje pełną analogię z równaniem różniczkowym

powierzchni ugięcia płyty na brzegach swobodnie podpartej. Mamy tu równanie

$$(8) \quad \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{Q}{N}$$

przy warunkach brzegowych $w = 0$ i $\nabla^2 w = 0$.

W równaniu (3) W oznacza intensywność źródła ciepła; należy zatem wielkość tę traktować jako taką funkcję, która poza otoczeniem punktu przyłożenia źródła ciepła ma wartość równą zero. W równaniu (8) funkcja Q powinna mieć analogiczny charakter jak W . Należy zatem uważać, że funkcja Q wyraża intensywność obciążenia zewnętrznego płyty, które poza otoczeniem punktu przyłożenia ma wartość równą zero. Możemy więc Q uważać za siłę skupioną.

W przedstawionej pracy wykorzystamy analogię między równaniami (3) i (8). Wyznaczanie funkcji Φ oprzemy na znanych wynikach teorii zginania płyt; punkt ciężkości spoczywać będzie na wyznaczeniu funkcji naprężeń F .

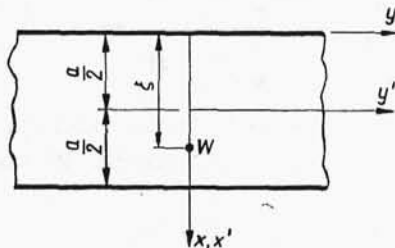
Ograniczymy się do rozpatrzenia stanu naprężenia wywołanego źródłami ciepła w pasmie i w półpasmie tarczowym oraz w tarczy prostokątnej.

2. Pasma tarczowe

Niech dane będzie pasmo tarczowe o szerokości a ze źródłem ciepła umieszczonym w punkcie $(\xi, 0)$. Pasma to zastąpimy pasmem płyty o szerokości a na brzegach swobodnie podpartej i obciążonej siłą skupioną Q w punkcie $(\xi, 0)$. Ugięcie płyty wyraża wzór²⁾

$$(9) \quad w = \frac{2Q}{a\pi N} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y d\beta}{(a_n^2 + \beta^2)^2},$$

gdzie $a_n = n\pi/a$, a N jest sztywnością płyty na zginanie.



Rys. 1.

Z analogii równań różniczkowych (3) i (8) oraz z analogicznych warunków brzegowych wynika, że

$$(10) \quad \Phi = -\frac{2K}{a\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y d\beta}{(a_n^2 + \beta^2)^2},$$

gdzie

$$K = \frac{(1 + \nu) a W}{k}.$$

Korzystając z wzorów (4) i biorąc pod uwagę, że wyrażenie (10) można przedstawić szeregiem

$$(11) \quad \Phi = -\frac{Ka^2}{2\pi^3 h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n y}}{n^3} (1 + \alpha_n y) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x \quad \text{dla } y \geq 0,$$

obliczymy kolejno

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{KG}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n y}}{n} (1 - \alpha_n y) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x, \\ (12) \quad \bar{\sigma}_y &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{KG}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n y}}{n} (1 + \alpha_n y) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x, \\ \bar{\tau}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{KGy}{ah} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n \xi \cos \alpha_n x. \end{aligned}$$

Wzory (12) są słuszne dla $y \geq 0$. Ponieważ sumy występujące we wzorach (12) są wolnozbieżne, a dla $y = 0$ i $x = \xi$ — rozbieżne, wygodnie będzie przedstawić je w postaci zamkniętej

$$(13) \quad \bar{\sigma}_x = \frac{KG}{h} \left(\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \bar{\sigma}_y = \frac{KG}{h} \left(\varphi - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \bar{\tau}_{xy} = -\frac{KG}{h} y \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

gdzie

$$(13a) \quad \varphi = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n y}}{n} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x$$

Widoczne jest, że na brzegach tarczy znikają naprężenia $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\sigma}_y$, a dla $y \rightarrow \infty$ znikają wszystkie naprężenia. W otoczeniu źródła ciepła naprężenia rosną nieograniczenie w sposób logarytmiczny.

Dla dalszych rozważań najwygodniej będzie przedstawić naprężenia $\bar{\tau}_{xy}$ w postaci wpływającej bezpośrednio z wzoru (10)

$$(14) \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{4KG}{a\pi h} \int_0^{\infty} \beta \sin \beta y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin \alpha_n \xi \cos \alpha_n x}{(a_n^2 + \beta^2)^2} d\beta.$$

Zważywszy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin a_n \xi}{(a_n^2 + \beta^2)^2} = \frac{a^3}{4} \eta_1(\xi, \beta), \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n \sin a_n \xi}{(a_n^2 + \beta^2)^2} = \frac{a^3}{4} \eta_2(\xi, \beta),$$

gdzie:

$$\eta_1(\xi, \beta) = \frac{\beta \xi \sinh \lambda \cosh \beta(a - \xi) - \lambda \sinh \beta \xi}{\lambda^2 \sinh^2 \lambda},$$

$$\eta_2(\xi, \beta) = \frac{\beta \xi \sinh \lambda \cosh \beta \xi - \lambda \cosh \lambda \sinh \beta \xi}{\lambda^2 \sinh^2 \lambda}, \quad (15a)$$

$$\lambda = \beta a,$$

otrzymamy

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{KGa^2}{\pi h} \int_0^{\infty} \beta \eta_1(\xi, \beta) \sin \beta y d\beta, \quad (16a)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{KGa^2}{\pi h} \int_0^{\infty} \beta \eta_2(\xi, \beta) \sin \beta y d\beta.$$

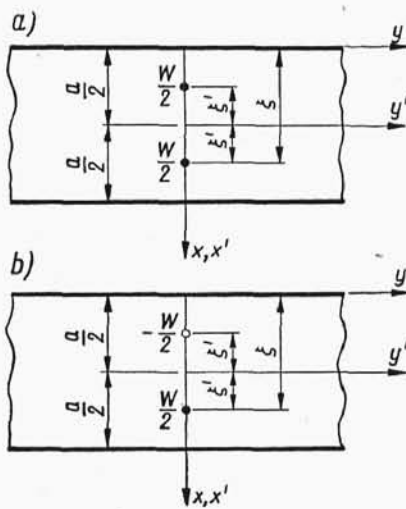
Działanie źródła ciepła znajdującego się w punkcie $(\xi, 0)$ zastąpić możemy działaniem źródeł ciepła umieszczonych symetrycznie względnie antysymetrycznie względem osi y' (rys. 2).

Dla symetrycznie ułożonych względem osi y' źródeł ciepła o intensywności $W/2$ (rys. 2a) otrzymamy w układzie współrzędnych x', y' wzór

$$\bar{\tau}_{xy'}^{(s)} = \frac{KGa^2}{2\pi h} \int_0^{\infty} \beta \left[\eta_1\left(\beta, \frac{a}{2} + \xi'\right) + \eta_2\left(\beta, \frac{a}{2} - \xi'\right) \right] \sin \beta y' d\beta$$

albo

$$\bar{\tau}_{xy'}^{(s)} = \frac{KGa^2}{8\pi h} \int_0^{\infty} \beta \varrho^{(s)}(\mu, \xi') \sin \beta y' d\beta, \quad (16b)$$



Rys. 2.

gdzie:

$$\varrho^{(s)}(\mu, \xi') = \frac{\mu \sinh \mu \cosh \beta \xi' - \beta \xi' \cosh \mu \sinh \beta \xi'}{\mu^2 \cosh^2 \mu},$$

$$\mu = \frac{\beta a}{2}.$$

Dla antysymetrycznie względem osi y' umieszczonych źródeł ciepła o intensywności $W/2$ (rys. 2b) otrzymamy

$$\bar{\tau}_{x'y'}^{(a)} = \frac{KGa^2}{2\pi h} \int_0^\infty \beta \left[\eta_2\left(\beta, \frac{a}{2} + \xi'\right) - \eta_2\left(\beta, \frac{a}{2} - \xi'\right) \right] \sin \beta y' d\beta$$

albo

$$(16c) \quad \bar{\tau}_{x'y'}^{(a)} = \frac{KGa^2}{8\pi h} \int_0^\infty \beta \varrho^{(a)}(\mu, \xi') \sin \beta y' d\beta,$$

gdzie

$$\varrho^{(a)}(\mu, \xi) = \frac{\beta \xi' \sinh \mu \cosh \beta \xi' - \mu \cosh \mu \sinh \beta \xi'}{\mu^2 \sinh^2 \mu}.$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek symetrycznego układu źródeł ciepła. W celu zniesienia naprężeń tnących $\bar{\tau}_{x'y'}^{(s)}$ na prostych $x' = \pm a/2$ należy dobrać taki stan naprężeń $\bar{\sigma}_x^{(s)}$, $\bar{\sigma}_y^{(s)}$ i $\bar{\tau}_{x'y'}^{(s)}$, który by spełniał równanie różniczkowe

$$(17) \quad \nabla^2 \nabla^2 F^{(s)} = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(18) \quad \bar{\sigma}_x^{(s)} = \frac{\partial^2 F^{(s)}}{\partial y'^2} = 0, \quad \bar{\tau}_{x'y'}^{(s)} = -\frac{\partial^2 F^{(s)}}{\partial x' \partial y'} = -\bar{\tau}_{x'y'}^{(s)}$$

$$\text{dla } x' = \pm \frac{a}{2}.$$

Ze względu na symetrię źródeł ciepła w stosunku do osi y' wystarczy ograniczyć się do warunków brzegowych na brzegu $x' = a/2$.

Funkcję $F^{(s)}$ przyjmujemy w postaci

$$(19) \quad F^{(s)} = \frac{1}{h} \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2} (A^{(s)} \cosh \beta x' + B^{(s)} \beta x' \sinh \beta x') \cos \beta y' d\beta.$$

Z warunków brzegowych (18) otrzymamy

$$\begin{aligned} A^{(s)} \cosh \mu + B^{(s)} \mu \sinh \mu &= 0, \\ (A^{(s)} + B^{(s)}) \sinh \mu + B^{(s)} \mu \cosh \mu &= -\frac{KGa^2}{8\pi} \beta \varrho^{(s)}(\mu, \xi'), \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} A^{(s)} &= \frac{KGa}{4\pi} \frac{\mu^2 \varrho^{(s)}(\mu, \xi') \sinh \mu}{\cosh \mu \sinh \mu + \mu}, \\ B^{(s)} &= -A^{(s)} \frac{\cosh \mu}{\mu \sinh \mu}. \end{aligned}$$

Wyznaczamy naprężenia z wzorów (5)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x^{(s)} &= -\frac{KGa}{4\pi h} \int_0^\infty \varrho^{(s)}(\mu, \xi') \times \\ &\times \mu \frac{\mu \sinh \mu \cosh \beta x' - \beta x' \sinh \beta x' \cosh \mu}{\cosh \mu \sinh \mu + \mu} \cos \beta y' d\beta, \\ \bar{\sigma}_y^{(s)} &= \frac{KGa}{4\pi h} \int_0^\infty \varrho^{(s)}(\mu, \xi') \times \\ (20) \quad &\times \mu \frac{(\mu \sinh \mu - 2 \cosh \mu) \cosh \beta x' - \beta x' \sinh \beta x' \cosh \mu}{\cosh \mu \sinh \mu + \mu} \cos \beta y' d\beta, \\ \bar{\tau}_{xy}^{(s)} &= -\frac{KGa}{4\pi h} \int_0^\infty \varrho^{(s)}(\mu, \xi') \times \\ &\times \mu \frac{(\mu \sinh \mu - \cosh \mu) \sinh \beta x' - \beta x' \cosh \beta x' \cosh \mu}{\cosh \mu \sinh \mu + \mu} \sin \beta y' d\beta. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy przypadek źródeł ciepła o intensywności $W/2$ umieszczonych w sposób antysymetryczny w stosunku do osi y' . W celu zniesienia naprężeń tnących na prostych $x' = a/2$ dobieramy naprężenia $\bar{\sigma}_x^{(a)}$, $\bar{\sigma}_y^{(a)}$ i $\bar{\tau}_{xy}^{(a)}$, w ten sposób, aby spełniły równanie różniczkowe

$$(21) \quad \nabla^2 \nabla^2 F^{(a)} = 0$$

wraz z warunkami brzegowymi:

$$(22) \quad \bar{\sigma}_x^{(a)} = \frac{\partial^2 F^{(a)}}{\partial y'^2} = 0, \quad \bar{\tau}_{xy}^{(a)} = -\frac{\partial^2 F^{(a)}}{\partial x' \partial y'} = -\bar{\tau}_{x'y'},$$

dla $x = \pm a$.

Funkcję $F^{(a)}$ przyjmujemy w postaci

$$(23) \quad F^{(a)} = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2} (A^{(a)} \sinh \beta x' + B^{(a)} \beta x' \cosh \beta x') \cos \beta y' d\beta.$$

Z warunków (22) otrzymamy układ dwóch równań

$$A^{(a)} \sinh \mu + B^{(a)} \mu \cosh \mu = 0,$$

$$(A^{(a)} + B^{(a)}) \cosh \mu + B^{(a)} \mu \sinh \mu = - \frac{KGa^2 \beta \varrho^{(a)}(\mu, \xi')}{8\pi},$$

skąd

$$A^{(a)} = \frac{KGa}{4\pi} \frac{\varrho^{(a)}(\mu, \xi') \mu^2 \cosh \mu}{\cosh \mu \sinh \mu - \mu},$$

$$B^{(a)} = -A^{(a)} \frac{\sinh \mu}{\mu \cosh \mu}.$$

Z wzorów (5) wyznaczmy naprężenia

$$\bar{\sigma}_x^{(a)} = \frac{KGa}{4\pi h} \int_0^{\infty} \varrho^{(a)}(\mu, \xi') \times$$

$$\times \mu \frac{\mu \cosh \mu \sin \beta x' - \beta x' \cosh \beta x' \sinh \mu}{\cosh \mu \sinh \mu - \mu} \cos \beta y' d\beta,$$

$$\bar{\sigma}_y^{(a)} = - \frac{KGa}{4\pi h} \int_0^{\infty} \varrho^{(a)}(\mu, \xi') \times$$

(24)

$$\times \mu \frac{(\mu \cosh \mu - 2 \sinh \mu) \sinh \beta x' - \beta x' \cosh \beta x' \sinh \mu}{\cosh \mu \sinh \mu - \mu} \cos \beta y' d\beta,$$

$$\bar{\tau}_{xy}^{(a)} = - \frac{KGa}{4\pi h} \int_0^{\infty} \varrho^{(a)}(\mu, \xi') \times$$

$$\times \mu \frac{(\mu \cosh \mu - \sinh \mu) \cosh \beta x' - \beta x' \sinh \beta x' \sinh \mu}{\cosh \mu \sinh \mu - \mu} \sin \beta y' d\beta.$$

Zauważmy, że dla symetrycznie umieszczonych źródeł ciepła o intensywności $W/2$ znikają naprężenia $\bar{\tau}_{xy}^{(s)}$, na prostych $y' = 0$ oraz $x' = 0$; otrzymamy symetryczny względem osi x' i y' rozkład naprężeń normalnych, a antysymetryczny względem tych osi rozkład naprężeń tnących. Przeciwnie, dla antysymetrycznie umieszczonych źródeł ciepła

o intensywności $W/2$ otrzymamy antysymetryczny rozkład naprężeń normalnych względem osi y' , a symetryczny rozkład naprężeń tnących względem tejże osi.

Dla źródła ciepła W umieszczonego w początku układu współrzędnych x' i y' znikają naprężenia $\bar{\sigma}_{x'}^{(a)}$, $\bar{\sigma}_y^{(a)}$ i $\bar{\tau}_{x'y'}^{(a)}$.

Dla źródła ciepła W umieszczonego w sposób niesymetryczny naprężenia cieplne wyrazimy wzorami

$$(25) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_x^{(s)} + \bar{\sigma}_x^{(a)}, & \sigma_y &= \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_y^{(s)} + \bar{\sigma}_y^{(a)}, \\ \tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xy}^{(s)} + \bar{\tau}_{xy}^{(a)}. \end{aligned}$$

Podane rozwiązanie dla przypadku źródła ciepła znajdującego się w punkcie $(\xi, 0)$ posłużyć może do wyznaczenia naprężeń wywołanych źródłem ciepła rozłożonym w sposób dowolny na odcinku $\xi_2 - \xi_1$ osi x . Jeśli przez $\bar{w}(\xi)$ oznaczyć intensywność tego źródła ciepła na jednostkę długości, to funkcja cieplnego potencjału przemieszczeń przyjmie postać

$$(26) \quad \Phi = -\frac{2C}{a\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n x \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y d\beta}{(a_n^2 + \beta^2)^2},$$

gdzie:

$$C = \frac{(1+\nu)a}{k}, \quad a_n = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \bar{w}(\xi) \sin a_n \xi d\xi.$$

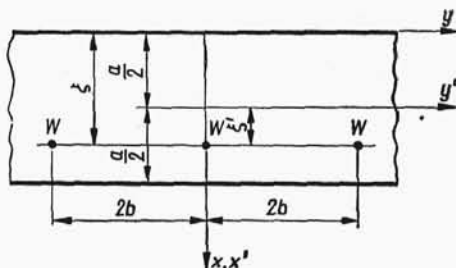
W przypadku źródła ciepła o intensywności $w(\xi, \eta)$, odniesionej do jednostki powierzchni tarczy, rozmieszczonego na obszarze Ω tarczy, przedstawimy funkcję Φ w postaci

$$(27) \quad \begin{aligned} \Phi &= -\frac{2C}{a\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n x \int_0^{\infty} \frac{1}{(a_n^2 + \beta^2)^2} \times \\ &\times \int_{\Omega} w(\xi, \eta) \sin a_n \xi \cos \beta (y - \eta) d\xi d\eta d\beta. \end{aligned}$$

Analogicznie, jeśli przez $\sigma(x, y; \xi, \eta) = \sigma(x, y; \xi, \eta) + \bar{\sigma}(x, y; \xi, \eta)$ oznaczyć naprężenie wywołane w punkcie (x, y) działaniem źródła ciepła skupionego $W = 1$ umieszczonego w punkcie (ξ, η) , to naprężenie $\sigma^*(x, y)$ wywołane działaniem źródła ciepła o intensywności $w(\xi, \eta)$ rozłożonym na obszarze Ω wyrazimy całką

$$(28) \quad \sigma^*(x, y) = \iint_{\Omega} w(\xi, \eta) \sigma(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Rozpatrzmy jeszcze tarczę nieograniczoną, w której rozmieszczone są źródła ciepła o jednakowej intensywności W (rys. 3) w sposób okresowy (w jednakowych odstępach $2b$).



Rys. 3.

Rozwiązanie równania (3) najwygodniej będzie podać w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego. Wyrazimy prawą stronę tego równania w postaci

$$(29) \quad \frac{K}{h} = \frac{(1+\nu) a W}{h k} = \frac{2K}{ab h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x + \\ + \frac{4K}{ab h} \sum_{n,m} \sin a_n \xi \sin a_n x \cos \beta_m y,$$

gdzie:

$$a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b},$$

a funkcję Φ szeregiem

$$(30) \quad \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin a_n x + \sum_{n,m} B_{nm} \sin a_n x \cos \beta_m y.$$

Szeregi te spełniają wszelkie warunki brzegowe wzdłuż prostych $x=0$, $x=a$ oraz $y=\pm b$. Wstawiając (29) i (30) do równania (3) otrzymamy

$$(31) \quad \Phi = -\frac{2K}{ab h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin a_n x}{a_n^4} - \frac{4K}{ab h} \sum_{n,m} \frac{\sin a_n \xi \sin a_n x \cos \beta_m y}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2}.$$

Funkcję tę przedstawić można również w postaci pojedynczego szeregu trygonometrycznego

$$(32) \quad \Phi = -\frac{K a^2}{2 h \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n \xi \sin a_n x}{n^3} [e^{-a_n y} (1 + a_n y) + R_n(y)],$$

gdzie:

$$R_n(y) = \frac{1}{e^{\delta_n} \sinh \delta_n} \left[(\cosh \alpha_n y - \alpha_n y \sinh \alpha_n y) + \frac{\delta_n e^{\delta_n}}{\sinh \delta_n} \cosh \alpha_n y \right],$$

$$\delta_n = \alpha_n b.$$

Naprężenia $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$ wyznaczamy z wzorów (4)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{KG}{h} \left(\varphi - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \Theta - y \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{\partial \Theta_n}{\partial \delta_n} \right), \\ (33) \quad \bar{\sigma}_x &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{KG}{h} \left(\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \Theta + y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{\partial \Theta_n}{\partial \delta_n} \right), \\ \bar{\tau}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{KG}{h} \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \right. \\ (33) \quad &\left. + \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi \cos \alpha_n x}{\sinh^2 \delta_n} \sinh \alpha_n y \right). \end{aligned}$$

Tutaj funkcja φ jest identyczna z funkcją wyrażoną wzorem (13a), a funkcja Θ dana jest szybkobieżnym szeregiem

$$(34) \quad \Theta = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x \cosh \alpha_n y}{n e^{\delta_n} \sinh \delta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n.$$

Widoczne jest, że nieciągłość typu logarytmicznego mieści się w funkcji φ , funkcja Θ zaś nie ma żadnych osobliwości. Dla $b \rightarrow \infty$ i $\Theta \rightarrow 0$ wzory (33) również przechodzą do postaci (13).

Do dalszych rozważań będzie dogodnie wyznaczyć $\bar{\tau}_{xy}$ bezpośrednio z wzoru (31). Otrzymamy stąd

$$(35) \quad \bar{\tau}_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{8KG}{abh} \sum_{n,m} \frac{a_n \beta_m \cos \alpha_n x \sin \alpha_n \xi \sin \beta_m y}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}.$$

Korzystając ze związków (15) znajdziemy

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy} &= \frac{2KGa^2}{bh} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \eta_1(\beta_m, \xi') \sin \beta_m y, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{2KGa^2}{bh} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \eta_2(\beta_m, \xi') \sin \beta_m y, \end{aligned}$$

gdzie funkcje η_1 i η_2 bierzemy z wzorów (15a) wstawiając do nich zamiast β i $\lambda = \beta a$ odpowiednio β_m i $\lambda_m = \beta_m a$.

Postępując analogicznie jak w przypadku pasma tarczowego z jednym źródłem ciepła, rozważać będziemy przypadek działania dwóch

źródeł ciepła o intensywności $W/2$, działających raz w sposób symetryczny, zaś raz w sposób antysymetryczny w stosunku do osi y' . Stąd otrzymamy dla źródeł ciepła o intensywności $W/2$ ułożonych względem osi y' :

symetrycznie

$$(36) \quad \bar{\tau}_{x'y'}^{(s)} = -\frac{KGa^2}{4bh} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') \sin \beta_m y',$$

antysymetrycznie

$$(37) \quad \bar{\tau}_{x'y'}^{(a)} = \frac{KGa^3}{4bh} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \varrho^{(a)}(\mu_m, \xi') \sin \beta_m y',$$

gdzie $\varrho^{(s)}$ i $\varrho^{(a)}$ bierzemy z wzorów (16b) i (16c), zaś

$$\mu_m = \frac{\beta_m a}{2}.$$

Dla symetrycznego układu źródeł ciepła względem osi y' przyjmujemy

$$(38) \quad F^{(s)} = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m^2} (A_m^{(s)} \cosh \beta_m x' + B_m^{(s)} \beta_m x' \sinh \beta_m x') \cos \beta_m y',$$

gdzie:

$$A_m^{(s)} = -\frac{KGa}{2b} \frac{\mu_m^2 \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') \sinh \mu_m}{\cosh \mu_m \sinh \mu_m + \mu_m}, \quad B_m^{(s)} = -A_m^{(s)} \frac{\operatorname{ctgh} \mu_m}{\mu_m}.$$

Naprężenia dodatkowe wyliczymy z wzorów

$$(39) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_x^{(s)} &= -\frac{KGa}{2bh} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') \mu_m \times \\ &\times \frac{\mu_m \sinh \mu_m \cosh \beta_m x' - \beta_m x' \cosh \beta_m x' \sinh \mu_m}{\cosh \mu_m \sinh \mu_m + \mu_m} \cos \beta_m y', \\ \bar{\sigma}_y^{(s)} &= \frac{KGa}{2bh} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') \mu_m \times \\ &\times \frac{(\mu_m \sinh \mu_m - 2 \cosh \mu_m) \beta_m \cosh \beta_m x' - \beta_m x' \sinh \beta_m x' \cosh \mu_m}{\cosh \mu_m \sinh \mu_m + \mu_m} \cos \beta_m y', \\ \bar{\tau}_{xy}^{(s)} &= \frac{KGa}{2bh} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') \mu_m \times \\ &\times \frac{(\mu_m \sinh \mu_m - \cosh \mu_m) \sinh \beta_m x' - \beta_m x' \cosh \beta_m x' \cosh \mu_m}{\cosh \mu_m \sinh \mu_m + \mu_m} \sin \beta_m y'. \end{aligned}$$

W przypadku działania źródeł ciepła o intensywności $W/2$ umieszczonych w sposób antysymetryczny w stosunku do osi y' przyjmiemy dla wyznaczenia naprężeń $\bar{\sigma}_x^{(a)}$, $\bar{\sigma}_y^{(a)}$ i $\bar{\tau}_{xy}^{(a)}$ następującą funkcję Airy'ego

$$(40) \quad F^{(a)} = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m^2} (A_m^{(a)} \sinh \beta_m x' + B_m^{(a)} \beta_m x' \cosh \beta_m x') \cos \beta_m y',$$

przy czym:

$$A_m^{(a)} = -\frac{KG}{2b} \frac{\mu_m^2 \varrho^{(a)}(\mu_m, \xi')}{\cosh \mu_m \sinh \mu_m - \mu_m},$$

$$B_m^{(a)} = -A_m^{(a)} \frac{\operatorname{tgh} \mu_m}{\mu_m}.$$

Naprężenia wyznaczmy z wzorów (5), a mianowicie

$$(41) \quad \bar{\sigma}_{x'}^{(a)} = \frac{KGa}{2bh} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^{(a)}(\mu_m, \xi') \mu_m \times$$

$$\times \frac{\mu_m \cosh \mu_m \sinh \beta_m x' - \beta_m x' \cosh \beta_m x' \sinh \mu_m}{\cosh \mu_m \sinh \mu_m - \mu_m} \cos \beta_m y',$$

$$\bar{\sigma}_{y'}^{(a)} = -\frac{KGa}{2bh} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^{(a)}(\mu_m, \xi') \mu_m \times$$

$$(41) \quad \times \frac{(\mu_m \cosh \mu_m - 2 \sinh \mu_m) \sinh \beta_m x' - \beta_m x' \cosh \beta_m x' \sinh \mu_m}{\cosh \mu_m \sinh \mu_m - \mu_m} \cos \beta_m y',$$

$$\bar{\tau}_{x'y'}^{(a)} = -\frac{KGa}{2bh} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^{(a)}(\mu_m, \xi') \mu_m \times$$

$$\times \frac{(\mu_m \cosh \mu_m - \sinh \mu_m) \cosh \beta_m x' - \beta_m x' \sinh \beta_m x' \sinh \mu_m}{\cosh \mu_m \sinh \mu_m - \mu_m} \sin \beta_m y'.$$

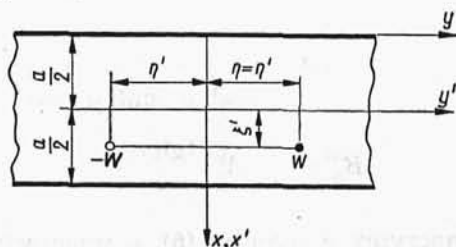
Dla źródeł ciepła W rozłożonych w sposób okresowy na pasmie tarczowym (rys. 3) naprężenie cieplne otrzymamy na podstawie superpozycji

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_x^{(s)} + \bar{\sigma}_x^{(a)} \text{ itd.}$$

Zauważmy, że dla $b \rightarrow \infty$ wzory (39) i (41) przechodzą we wzory (20) i (24). Podane tu rozwiązania dla przypadku źródeł ciepła W rozmieszczonych w jednakowych odstępach $2b$ traktować można jako funkcję Greena. Może ona posłużyć do wyznaczenia naprężeń wywołanych źródłami ciepła liniowymi lub powierzchniowymi rozmieszczonymi w obrębie tarczy w sposób periodyczny.

3. Półpasmo tarczowe

Przypadek półpasma tarczowego traktować można jako przypadek pasma nieograniczonego, w którym działa źródło ciepła w punkcie (ξ, η) i odpływ ciepła w punkcie $(\xi, -\eta)$. W tym bowiem przypadku otrzymamy na brzegu ($y = 0$) $T = 0$.



Rys. 4.

Korzystając z wzoru (10) wyrazimy funkcję Φ związkiem

$$(42) \quad \Phi = -\frac{2K}{a\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \int_0^{\infty} \frac{\cos(y - \eta) - \cos(y + \eta)}{(a_n^2 + \beta^2)^2} d\beta$$

albo

$$(43) \quad \Phi = -\frac{4K}{a\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta \eta \sin \beta y}{(a_n^2 + \beta^2)^2} d\beta.$$

Funkcję Φ wyrazić można również pojedynczym szeregiem trygonometrycznym³⁾

$$(44) \quad \Phi = -\frac{Ka^2}{\pi^3 h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n y}}{n^3} [(1 + a_n y) \sinh a_n \eta - a_n \eta \cosh a_n \eta] \sin a_n \xi \sin a_n x.$$

Wzór ten jest słuszny dla $\eta < y < \infty$. Dla przedziału $0 < y < \eta$ należy we wzorze (42) zastąpić y przez η i na odwrót.

Na podstawie wzorów (4) obliczymy naprężenia $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$ otrzymując

$$(45) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{KG}{h} \left[\varphi_1 - \varphi_2 + (y - \eta) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - (y + \eta) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right], \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{KG}{h} \left[\varphi_1 - \varphi_2 - (y - \eta) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + (y + \eta) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right], \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{KG}{h} \left[(y - \eta) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (y + \eta) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

gdzie:

$$(46) \quad \varphi_1 = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{a}(y - \eta) - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{\cosh \frac{\pi}{a}(y - \eta) - \cos \frac{\pi}{a}(x + \xi)},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{a}(y + \eta) - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}{\cosh \frac{\pi}{a}(y + \eta) - \cos \frac{\pi}{a}(x - \xi)}.$$

Łatwo sprawdzić, że na brzegach $x = 0$ i $x = a$ mamy $\bar{\sigma}_x = 0$, a na brzegu $y = 0$ jest $\bar{\sigma}_y = 0$. Na wymienionych brzegach różnymi od zera będą jedynie naprężenia tnące $\bar{\tau}_{xy}$.

Do dalszych rozważań dogodnie będzie przedstawić naprężenia tnące $\bar{\tau}_{xy}$ wzorem

$$(47) \quad \bar{\tau}_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{8KG}{a\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n \xi \cos a_n x \int_0^{\infty} \frac{\beta \sin \beta \eta \cos \beta y}{(a_n^2 + \beta^2)^2} d\beta.$$

Zważywszy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin a_n \xi}{(a_n^2 + \beta^2)^2} = \frac{a^3}{4} \eta_1(\xi, \beta), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n \sin a_n \xi}{(a_n^2 + \beta^2)^2} = \frac{a^3}{4} \eta_2(\xi, \beta)$$

oraz

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta \sin \beta \eta}{(a_n^2 + \beta^2)^2} d\beta = \frac{\pi}{4a_n} \eta e^{-a_n \eta},$$

możemy wyrazić naprężenia $\bar{\tau}_{xy}$ na brzegach półpasma tarczowego wzorami

$$(48) \quad \bar{\tau}_{xy} = -\frac{2KGa^2}{\pi h} \int_0^{\infty} (\beta \sin \beta \eta) \eta_1(\xi, \beta) \cos \beta y d\beta,$$

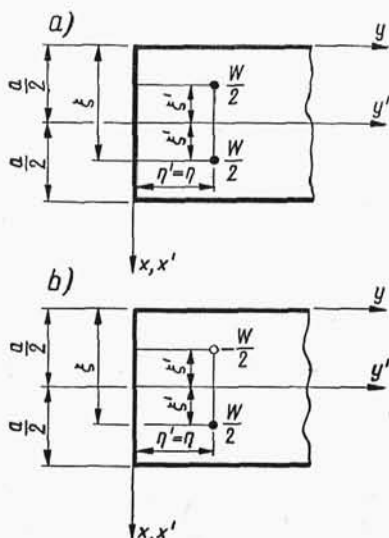
$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{2KGa^2}{\pi h} \int_0^{\infty} (\beta \sin \beta \eta) \eta_2(\xi, \beta) \cos \beta y d\beta,$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{2KG}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(a_n, \eta) \sin a_n \xi \cos a_n x,$$

gdzie

$$\vartheta(a_n, \eta) = \frac{\pi}{a} \eta e^{-a_n \eta}.$$

W celu wyznaczenia naprężeń dodatkowych wygodnie będzie i w tym przypadku zastąpić działanie źródła ciepła o intensywności W w punkcie (ξ, η) działaniem dwóch źródeł o intensywności $W/2$ umieszczonych raz symetrycznie, a raz antysymetrycznie w stosunku do osi y' .



Rys. 5.

Rozpatrzmy najpierw działanie źródeł ciepła $W/2$ symetrycznie ułożonych względem osi y' . W układzie współrzędnych x', y' (rys. 5a) otrzymamy

$$\bar{\tau}_{x'y'}^{(s)} = \frac{KGa^2}{4\pi h} \int_0^\infty (\beta \sin \beta \eta') \varrho^{(s)}(\mu, \xi') \cos \beta y' d\beta, \quad (49)$$

$$\bar{\tau}_{x'y'}^{(s)} = \frac{2KG}{\pi h} \sum_{n=1}^\infty \vartheta(a_n, \eta') \cos a_n \xi' \sin a_n x'.$$

Przynależne temu stanowi naprężenia $\bar{\sigma}_x^{(s)}$, $\bar{\sigma}_{y'}^{(s)}$ i $\bar{\tau}_{xy'}^{(s)}$, otrzymamy z rozwiązania równania różniczkowego Airy'ego

$$(50) \quad \nabla^2 \nabla^2 F^{(s)} = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned}
 (51) \quad & \bar{\sigma}_x^{(s)} = \frac{\partial^2 F^{(s)}}{\partial y'^2} = 0 \quad \text{dla } x' = a/2, \\
 & \bar{\sigma}_{y'}^{(s)} = \frac{\partial^2 F^{(s)}}{\partial x'^2} = 0 \quad \text{dla } y' = 0, \\
 & \bar{\tau}_{xy'}^{(s)} = -\frac{\partial^2 F^{(s)}}{\partial x' \partial y'} = -\bar{\tau}_{x'y'}^{(s)} \quad \text{dla } x' = a/2 \text{ i } y' = 0.
 \end{aligned}$$

Tym warunkom zadość uczynimy przyjmując funkcję $F^{(s)}$ w postaci

$$\begin{aligned}
 (52) \quad F^{(s)} = & \frac{1}{h} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (A_n^{(s)} + B_n^{(s)} \alpha_n y') e^{-\alpha_n y'} \cos \alpha_n x' + \\
 & + \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2} (A^{(s)} \cosh \beta x' + B^{(s)} \beta x' \sinh \beta x') \sin \beta y' d\beta.
 \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (51) prowadzą do związków

$$(53a) \quad A_n^{(s)} = 0,$$

$$(53b) \quad A^{(s)} \cosh \mu + B^{(s)} \mu \sinh \mu = 0, \quad \text{gdzie } \mu = \frac{\beta a}{2},$$

$$\begin{aligned}
 (53c) \quad & \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n^{(s)} \sin \alpha_n x' - \int_0^{\infty} [(A^{(s)} + B^{(s)}) \sinh \beta x' + \\
 & + B^{(s)} \beta x' \cosh \beta x'] d\beta = -\frac{2KG}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(\alpha_n, \eta') \cos \alpha_n \xi' \sin \alpha_n x', \\
 (53d) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(s)} e^{-\alpha_n y'} (1 - \alpha_n y') \sin \frac{n\pi}{2} - \int_0^{\infty} [(A^{(s)} + \\
 & + B^{(s)}) \sinh \mu + B^{(s)} \mu \cosh \mu] \cos \beta y' d\beta = \\
 & = -\frac{KGa^2}{4\pi} \int_0^{\infty} (\beta \sin \beta \eta') \varrho^{(s)}(\mu, \xi') \cos \beta y' d\beta.
 \end{aligned}$$

Jeśli wykorzystać związki (53a, b) oraz wstawić do równań (53c, d) zależności

$$\sinh \beta x' = \sum_{n=1}^{\infty} E_{n\beta} \sin \alpha_n x', \quad \beta x' \cosh \beta x' = \sum_{n=1}^{\infty} E_{n\beta} \sin \alpha_n x',$$

$$(1 - a_n y') e^{-a_n y'} = \int_0^{\infty} C_{n\beta} \cos \beta y' d\beta,$$

to otrzymamy układ dwóch równań

$$(54) \quad B_n^{(s)} - \int_0^{\infty} A^{(s)} [r(\mu) E_{n\beta} - g(\mu) F_{n\beta}] d\beta = -\frac{2KG}{\pi} \vartheta(a_n, \eta') \cos a_n \xi',$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(s)} C_{k\beta} \sin \frac{k\pi}{2} + A^{(s)} t(\mu) = -\frac{KGa^2}{4\pi} (\beta \sin \beta \eta') \varrho^{(s)}(\mu, \xi'),$$

gdzie:

$$r(\mu) = \frac{\mu \sinh \mu - \cosh \mu}{\mu \sinh \mu},$$

$$g(\mu) = \frac{\cosh \mu}{\mu \sinh \mu}, \quad t(\mu) = \frac{\mu + \sinh \mu \cosh \mu}{\mu \sinh \mu}.$$

Zważywszy, że

$$\begin{aligned} E_{n\beta} &= \frac{4\beta}{a} \frac{\cosh \mu \sin \frac{n\pi}{2}}{a_n^2 + \beta^2}, \\ F_{n\beta} &= \frac{4\beta}{a} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{a_n^2 + \beta^2} \left(\mu \sinh \mu + \frac{a_n^2 + \beta^2}{a_n^2 + \beta^2} \cosh \mu \right), \\ C_{n\beta} &= \frac{4}{\pi} \frac{a_n \beta^2}{(a_n^2 + \beta^2)^2}, \end{aligned}$$

możemy doprowadzić równania (54) do postaci

$$\begin{aligned} B_n^{(s)} + \frac{32n^2}{a\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{A^{(s)} \cosh^2 \mu d\mu}{\sinh \mu \left(n^2 + \frac{4\mu^2}{\pi^2} \right)} = \\ = -\frac{2KG}{a} \eta' e^{-\frac{n\pi\eta'}{a}} \cos \frac{n\pi\xi'}{a}, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{16\mu^2 a}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_k^{(s)} \frac{k \sin \frac{k\pi}{2}}{\left(k^2 + \frac{4\mu^2}{\pi^2} \right)^2} + A^{(s)} t(\mu) = \\ = -\frac{KGa}{2\pi} \left(\mu \sin \frac{2\mu\eta'}{a} \right) \varrho^{(s)}(\mu, \xi'), \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

Wyeeliminujemy z tego układu funkcję $A(\mu)$. Otrzymamy wówczas nieskończony układ równań

$$\begin{aligned}
 B_n^{(s)} - \frac{512}{\pi^6} n^2 \sin \frac{n\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(s)} k \sin \frac{k\pi}{2} \times \\
 \times \int_0^{\infty} \frac{\mu^3 \cosh^2 \mu d\mu}{\left(n^2 + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\right)^2 \left(k^2 + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\right)^2 (\sinh \mu \cosh \mu + \mu)} = \\
 (56) \\
 = \frac{16n^2}{\pi^3} - GK \sin \frac{n\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\mu^2 \cosh^2 \mu \left(\sin \frac{2\mu\eta'}{a}\right) \varrho^{(s)}(\mu, \xi') d\mu}{\left(n^2 + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\right)^2 (\mu + \sinh \mu \cosh \mu)} + \\
 - \frac{KG}{\pi} \left(\frac{\pi\eta'}{a}\right) e^{-\frac{n\pi\eta'}{a}} \cos \frac{n\pi\xi'}{a}, \quad n = 1, 3, 5, \dots
 \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu całek niewłaściwych w sposób numeryczny otrzymamy układ równań zawierający nieznane współczynniki B_n . Z drugiego równania układu (55) wyznaczmy parametr $A(\mu)$. W ten sposób wszelkie wartości występujące w funkcji $F^{(s)}$ są określone. Naprężenie wyznaczmy z wzorów:

$$(57) \quad \bar{\sigma}_x^{(s)} = \frac{\partial^2 F^{(s)}}{\partial y'^2}, \quad \bar{\sigma}_y^{(s)} = \frac{\partial^2 F^{(s)}}{\partial x'^2}, \quad \bar{\tau}_{xy}^{(s)} = -\frac{\partial^2 F^{(s)}}{\partial x' \partial y'}.$$

Rozpatrzmy teraz działanie dwóch źródeł ciepła o intensywności $W/2$ umieszczonych antysymetrycznie w stosunku do osi y' (rys. 5b). W układzie współrzędnych x', y' otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (58) \quad \bar{\tau}_{xy'}^{(a)} = -\frac{KGa}{4\pi h} \int_0^{\infty} (\beta \sin \beta\eta') \varrho^{(a)}(\mu, \xi') \cos \beta y' d\beta, \\
 \bar{\tau}_{x'y'}^{(a)} = -\frac{2KG}{\pi h} \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} \vartheta(a_n, \xi') \sin a_n \xi' \cos a_n x'.
 \end{aligned}$$

Przynależne do tego stanu naprężenia $\bar{\sigma}_x^{(a)}, \bar{\sigma}_y^{(a)}$ i $\bar{\tau}_{x'y'}^{(a)}$ wyznaczmy rozwiązując równanie różniczkowe

$$(59) \quad \nabla^2 \nabla^2 F^{(a)} = 0$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{x'}^{(a)} &= \frac{\partial^2 F^{(a)}}{\partial y'^2} = 0 \quad \text{dla } x' = a/2, \\
 \bar{\sigma}_{y'}^{(a)} &= \frac{\partial^2 F^{(a)}}{\partial x'^2} = 0 \quad \text{dla } y' = 0, \\
 \bar{\tau}_{x'y'}^{(a)} &= -\frac{\partial^2 F^{(a)}}{\partial x' \partial y'} = -\bar{\tau}_{x'y'}^{(a)} \quad \text{dla } x' = a/2 \text{ i } y' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{60}$$

Funkcję Airy'ego przyjmujemy w postaci

$$\begin{aligned}
 F^{(a)} &= \frac{1}{h} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (A_n^{(a)} + B_n^{(a)} \alpha_n y') e^{-\alpha_n y'} \sin \alpha_n x' + \\
 &+ \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2} (A^{(a)} \sinh \beta x' + B^{(a)} \beta x' \cosh \beta x') \sin \beta y' d\beta.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Warunki brzegowe (51) prowadzą do układu równań

$$A_n^{(a)} = 0,$$

$$A^{(a)} \sinh \mu + B^{(a)} \mu \cosh \mu = 0,$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n^{(a)} \cos \alpha_n x' + \\
 (61c) \quad &+ \int_0^{\infty} [(A^{(a)} + B^{(a)}) \cosh \beta x' + B^{(a)} \beta x' \sinh \beta x'] d\beta = \\
 &= \frac{2KG}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \vartheta(\alpha_n, \eta') \sin \alpha_n \xi' \cos \alpha_n x', \\
 &\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n^{(a)} e^{-\alpha_n y'} (1 - \alpha_n y') \cos \frac{n\pi}{2} + \\
 (61d) \quad &+ \int_0^{\infty} [(A^{(a)} + B^{(a)}) \cosh \mu + B^{(a)} \mu \sinh \mu] \cos \beta y' d\beta = \\
 &= \frac{KGa^2}{4\pi} \int_0^{\infty} (\beta \sin \beta \eta') \varrho^{(a)}(\mu, \xi') \cos \beta y' d\beta.
 \end{aligned}$$

Wykorzystując związek (61b) oraz wyrażając szeregami funkcje

$$\cosh \beta x' = \sum_{n=1}^{\infty} G_{n\beta} \cos \alpha_n x', \quad \beta x' \sinh \beta x' = \sum_{n=1}^{\infty} H_{n\beta} \cos \alpha_n x'$$

gdzie:

$$G_{n\beta} = \frac{4}{a} \cosh \mu \frac{a_n \sin \frac{n\pi}{2}}{a_n^2 + \beta^2},$$

$$H_{n\beta} = \frac{2\beta a_n \sin \frac{n\pi}{2}}{a_n^2 + \beta^2} \left(\sinh \mu - \frac{4\beta}{a} \frac{\cosh \mu}{(a_n^2 + \beta^2)^2} \right),$$

otrzymamy układ dwóch równań

$$B_n^{(a)} - \int_0^\infty A^{(a)} [c(\mu) G_{n\beta} - d(\mu) H_{n\beta}] d\beta = \frac{2KG}{\pi} \vartheta(a_n, \eta') \sin a_n \xi',$$

$$(62) \quad \sum_{k=2,4,\dots}^\infty B_k^{(a)} \cos \frac{k\pi}{2} C_{k\beta} + A^{(a)} f(\mu) = \frac{KGa^2}{4\pi} (\beta \sin \beta \eta') \varrho^{(a)}(\mu, \xi'),$$

gdzie:

$$c(\mu) = \frac{\mu \cosh \mu - \sinh \mu}{\mu \cosh \mu}, \quad d(\mu) = \frac{\sinh \mu}{\mu \cosh \mu},$$

$$f(\mu) = \frac{\sinh \mu \cosh \mu - \mu}{\mu \cosh \mu}.$$

Ponieważ dla $n = 2, 4, \dots$ wielkości $G_{n\beta}$ i $H_{n\beta}$ są równe zeru, zatem w pierwszym równaniu grupy (62) znika całka. W drugim z tych równań dla parzystych wartości k znika suma. Układ równań (62) można więc doprowadzić do postaci

$$B_n^{(a)} = \frac{2KG}{\pi} \vartheta(a_n, \eta') \sin a_n \xi', \quad n = 2, 4, \dots,$$

$$(63) \quad \frac{16\mu^2}{\pi^3} \sum_{k=2,4,\dots}^\infty B_k^{(a)} \frac{k^2 \cos \frac{k\pi}{2}}{\left(k^2 + \frac{4\mu^2}{\pi^2}\right)^2} + A^{(a)} \frac{\sinh \mu \cosh \mu - \mu}{\mu \cosh \mu} =$$

$$= \frac{KGa}{2\pi} \left(\mu \sin \frac{2\mu\eta'}{a} \right) \varrho^{(a)}(\mu, \xi').$$

Widoczne jest, że współczynniki $B_n^{(a)}$ i $A^{(s)}$ otrzymamy tu w sposób bezpośredni.

Naprężenia dodatkowe otrzymamy z wzorów

$$(64) \quad \bar{\sigma}_x^{(a)} = \frac{\partial^2 F^{(a)}}{\partial y'^2}, \quad \bar{\sigma}_y^{(a)} = \frac{\partial^2 F^{(a)}}{\partial x'^2}, \quad \bar{\tau}_{xy'}^{(a)} = -\frac{\partial^2 F^{(a)}}{\partial x' \partial y'}.$$

Naprężenia wywołane działaniem źródła ciepła W umieszczonego w punkcie (ξ, η) otrzymamy przez dodanie naprężeń uzyskanych z wzorów (45), (57 i (64).

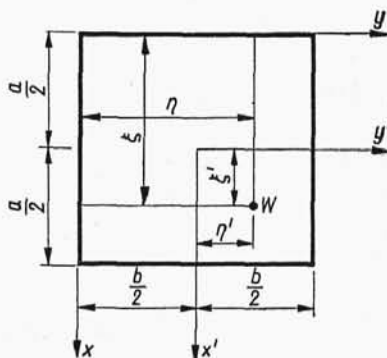
4. Tarcza prostokątna

Niech źródło ciepła o intensywności W (rys. 6) znajduje się w punkcie (ξ, η) . Korzystając ze znanego rozwiązania dla ugięcia płyty prostokątnej poddanej działaniu siły skupionej w punkcie $(\xi, \eta)^{2)}$ możemy przedstawić funkcję Φ w postaci

$$(65) \quad \Phi = -\frac{4K}{abh} \sum_{n,m} \frac{\sin \alpha_n \xi \sin \beta_m \eta}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$



Rys. 6.

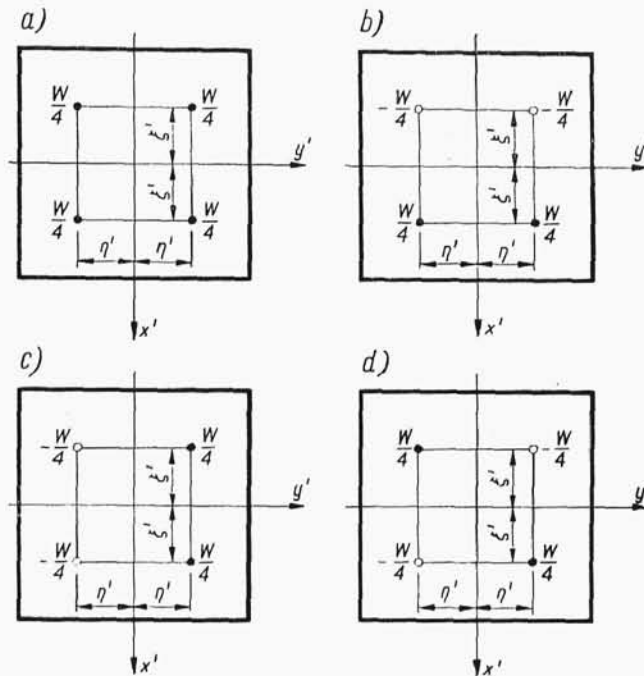
Funkcję tę przedstawić można również pojedynczym szeregiem trygonometrycznym³⁾

$$(66) \quad \begin{aligned} \Phi = & -\frac{Ka^2}{\pi^3 h} \sum_{n=1, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x \frac{\sinh \alpha_n (b - \eta)}{\sinh \alpha_n b} \{ [1 + \\ & + a_n b \operatorname{ctgh} a_n b - a_n (b - \eta) \operatorname{ctgh} a_n (b - \eta)] \sinh \alpha_n y + \\ & - a_n y \cosh \alpha_n y \} \quad \text{dla } 0 \leq y \leq \eta. \end{aligned}$$

Korzystając z wzorów (4) wyznaczymy ze związku (66) naprężenia $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$. Do dalszych rozważań wygodnie będzie przedstawić naprężenie $\bar{\tau}_{xy}$ w postaci wynikającej bezpośrednio z wzoru (65)

$$(67) \quad \bar{\tau}_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{8KG}{abh} \sum_{n,m} \frac{a_n \beta_m \sin a_n \xi \sin \beta_m \eta}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2} \cos a_n x \cos \beta_m y.$$

Łatwo stwierdzić, że na brzegu tarczy nie znikają naprężenia tnące. W celu wyznaczenia naprężeń dodatkowych $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$ zastąpimy działanie jednego źródła ciepła o intensywności W działaniem czterech źródeł o intensywności $W/4$, umieszczonych raz symetrycznie, a raz antysymetrycznie względem osi x' i y' (rys. 7a-d).



Rys. 7.

Rozpatrzmy najpierw przypadek źródeł ciepła umieszczonych symetrycznie względem osi x' i y' .

W przypadku źródła ciepła o intensywności W w punkcie (ξ, η) otrzymamy z wzoru (67)

$$(68) \quad \begin{aligned} \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{8KG}{abh} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos \beta_m y \sin \beta_m \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n \sin a_n \xi}{(a_n^2 + \beta_m^2)^2} = \\ &= -\frac{2KGa^2}{bh} \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m \cos \beta_m y \sin \beta_m \eta) \eta_2(\beta_m, \xi), \end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{2KGb^2}{ah} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin a_n \xi \cos a_n x) \eta_2(a_n, \eta),$$

gdzie η_2 bierzemy z wzoru (15a).

Dla czterech źródeł ciepła $W/4$, umieszczonych tak, jak to przedstawiono na rysunku 6a, otrzymamy w układzie współrzędnych x', y'

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{x'y'} = & -\frac{KGa^2}{2bh} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \left[\eta_2\left(\frac{a}{2} + \xi', \beta_m\right) + \right. \\ & \left. + \eta_2\left(\frac{a}{2} - \xi', \beta_m\right) \right] \left[\sin \beta_m \left(\frac{b}{2} + \eta'\right) + \sin \beta_m \left(\frac{b}{2} - \eta'\right) \right] \cos \beta_m \left(\frac{b}{2} + y'\right), \\ (69) \quad \bar{\tau}_{x'y'} = & -\frac{KGb^2}{2ah} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\eta_2\left(\frac{b}{2} + \eta', a_n\right) + \right. \\ & \left. + \eta_2\left(\frac{b}{2} - \eta', a_n\right) \right] \left[\sin a_n \left(\frac{a}{2} + \xi'\right) + \sin a_n \left(\frac{a}{2} - \xi'\right) \right] \cos a_n \left(\frac{a}{2} + x'\right). \end{aligned}$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{x'y'} = & \frac{KGa^2}{4bh} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') \cos \beta_m \eta' \sin \beta_m y', \\ (70) \quad \bar{\tau}_{x'y'} = & \frac{KGb^2}{4ah} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varrho^{(s)}(\delta_n, \eta') \cos a_n \xi' \sin a_n x', \end{aligned}$$

$$n, m = 1, 3, 5, \dots,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') &= \frac{\mu_m \sinh \mu_m \cosh \beta_m \xi' - \beta_m \xi' \cosh \mu_m \sinh \beta_m \xi'}{\mu_m^2 \cosh^2 \mu_m}, \\ \varrho^{(s)}(\delta_n, \eta') &= \frac{\delta_n \sinh \delta_n \cosh a_n \eta' - a_n \eta' \cosh \delta_n \sinh a_n \eta'}{\delta_n^2 \cosh^2 \delta_n}, \\ \mu_m &= \frac{\beta_m a}{2}; \quad \delta_n = \frac{a_n b}{2}. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia naprężeń $\bar{\sigma}_{x'}$, $\bar{\sigma}_{y'}$ i $\bar{\tau}_{x'y'}$, należy rozwiązać równanie Airy'ego

$$(71) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(72) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{x'} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0, & \bar{\tau}_{x'y'} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = -\bar{\tau}_{x'y'} \text{ dla } x' = a/2, \\ \bar{\sigma}_{y'} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = 0, & \bar{\tau}_{x'y'} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = -\bar{\tau}_{x'y'} \text{ dla } y' = b/2. \end{aligned}$$

Funkcję F obieramy w postaci szeregu

$$(73) \quad \begin{aligned} F &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\beta_m^2} (A_m \cosh \beta_m x' + B_m \beta_m x' \sinh \beta_m x') \cos \beta_m y' + \\ &+ \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (C_n \cosh \alpha_n y' + D_n \alpha_n y' \sinh \alpha_n y') \cos \alpha_n x'. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (72) prowadzą do układu równań

$$(74) \quad \begin{aligned} A_m \cosh \mu_m + B_m \mu_m \sinh \mu_m &= 0, \\ C_n \cosh \delta_n + D_n \delta_n \sinh \delta_n &= 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} [(A_m + B_m) \sinh \mu_m + B_m \mu_m \cosh \mu_m] \sin \beta_m y' + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n + D_n) \sinh \alpha_n y' + D_n \alpha_n y' \cosh \alpha_n y'] \sin \frac{n\pi}{2} &= \\ = -\frac{KGa^2}{4b} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') \cos \beta_m \eta' \sin \beta_m y', \\ \sum_{m=1}^{\infty} [(A_m + B_m) \sinh \beta_m x' + B_m \beta_m x' \cosh \beta_m x'] \sin \frac{m\pi}{2} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n + D_n) \sinh \delta_n + D_n \delta_n \cosh \delta_n] \sin \alpha_n x' &= \\ = -\frac{KGb^2}{4a} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varrho^{(s)}(\delta_n, \eta') \cos \alpha_n \xi' \sin \alpha_n x'. \end{aligned}$$

Wyrażając szeregami trygonometrycznymi funkcje

$$\begin{aligned} \sinh \alpha_n y' &= \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm} \sin \beta_m y', & \alpha_n y' \cosh \alpha_n y' &= \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \sin \beta_m y', \\ \sin \beta_m x' &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{nm} \sin \alpha_n x', & \beta_m x' \cosh \beta_m x' &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{nm} \sin \alpha_n x', \end{aligned}$$

gdzie:

$$E_{nm} = \frac{4\alpha_n}{b} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \cosh \delta_n}{\alpha_n^2 + \beta_m^2},$$

$$F_{nm} = \frac{4\alpha_n}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \left(\delta_n \sinh \delta_n - \frac{\alpha_n^2 - \beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \delta_n \right),$$

doprowadzimy układ (74) do układu dwóch równań

$$A_n t(\mu_m) + \frac{8}{b} \beta_m^2 \sin \frac{m\pi}{2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \frac{\alpha_n \sin \frac{n\pi}{2} \cosh^2 \delta_n}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \delta_n \sinh \delta_n} =$$

$$= \frac{KGa^2}{4b} \beta_m \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') \cos \beta_m \eta',$$

(75)

$$C_n t(\delta_n) + \frac{8}{a} \alpha_n^2 \sin \frac{n\pi}{2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} A_m \frac{\beta_m \sin \frac{m\pi}{2} \cosh \mu_m}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2) \mu_m \sinh \mu_m} =$$

$$= \frac{KGb^2}{4a} \alpha_n \varrho^{(s)}(\delta_n, \eta') \cos \alpha_n \xi',$$

$$n, m = 1, 3, 5, \dots,$$

gdzie:

$$t(\mu_m) = \frac{\mu_m + \sinh \mu_m \cosh \mu_m}{\mu_m \sinh \mu_m}, \quad t(\delta_n) = \frac{\delta_n + \sinh \delta_n \cosh \delta_n}{\delta_n \sinh \delta_n}.$$

Otrzymaliśmy tu nieskończony układ równań. Ograniczając się do członów szeregów (70) ustawimy $2r$ równań (75). Rozwiązanie ich daje współczynnik A_m i C_n , które wstawione do funkcji (73) pozwolą na przybliżone wyznaczenie wyrażań dodatkowych $\bar{\sigma}_x'$, $\bar{\sigma}_y'$ i $\bar{\tau}_{xy}'$.

W przypadku szczególnym tarczy kwadratowej oraz źródła ciepła W umieszczonego na początku układu współrzędnych otrzymamy przy $A_m = C_m$ układ równań

$$A_m \frac{\sinh m\pi + m\pi}{m\pi \sinh \frac{m\pi}{2}} + \frac{16}{\pi^2} m^2 \sin \frac{m\pi}{2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_n \sin \frac{n\pi}{2} \cosh^2 \frac{n\pi}{2}}{(n^2 + m^2)^2 \sinh^2 \frac{n\pi}{2}} =$$

$$= \frac{KG}{2} \frac{\operatorname{th} \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2}}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

(76)

Dla czterech źródeł ciepła o intensywności $W/4$, umieszczonych tak, jak to pokazano na rysunku 6b, należy rozwiązać równanie (71) wraz z warunkami brzegowymi (72), przy czym mamy

$$\bar{\tau}_{x'y'} = \frac{KGa^2}{4bh} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \beta_m \varrho^{(a)}(\mu_m, \xi') \cos \beta_m \eta' \sin \beta_m y' ; \quad (77)$$

$$\bar{\tau}_{x'y'} = \frac{KGb^2}{4ah} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \alpha_n \varrho^{(s)}(\delta_n, \eta') \sin \alpha_n \xi' \cos \alpha_n x' ,$$

gdzie

$$\varrho^{(a)}(\mu_m, \xi') = \frac{\beta_m \xi' \sinh \mu_m \cosh \beta_m \xi' - \mu_m \cosh \mu_m \sinh \beta_m \xi'}{\mu_m^2 \sinh^2 \mu_m} .$$

Funkcję Airy'ego przyjmujemy w postaci

$$F = \frac{1}{h} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\beta_m^2} (A_m \sinh \beta_m x' + B_m \beta_m x' \cosh \beta_m x') \cos \beta_m y' + \quad (78)$$

$$+ \frac{1}{h} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (C_n \cosh \alpha_n y' + D_n \alpha_n y' \sinh \alpha_n y') \sin \alpha_n x' .$$

Z warunków brzegowych (72) otrzymamy układ równań:

$$A_m s(\mu_m) + \frac{16}{b^2} \beta_m^2 \sin \frac{m\pi}{2} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{C_n \cosh^2 \delta_n \cos \frac{n\pi}{2}}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \sinh \delta_n} = \quad (79)$$

$$= + \frac{KGa^2}{4b} \beta_m \varrho^{(a)}(\mu_m, \xi') \cos \beta_m \eta' ,$$

$$C_n t(\delta_n) = - \frac{KGb^2}{4a} \alpha_n \varrho^{(s)}(\delta_n, \eta') \sin \alpha_n \xi' ,$$

$$n = 2, 4, 6, \dots , \quad m = 1, 3, 5, \dots ,$$

gdzie

$$s(\mu_m) = \frac{\sinh \mu_m \cosh \mu_m - \mu_m}{\mu_m \cosh \mu_m} .$$

Z tego układu wyznaczmy wartości A_m i C_n , a pozostałe współczynniki, B_m i D_n , ze związków:

$$B_m = - A_m \frac{\sinh \mu_m}{\mu_m \cosh \mu_m} , \quad D_n = - C_n \frac{\cosh \delta_n}{\delta_n \sinh \delta_n} .$$

Dla czterech źródeł ciepła o intensywności $W/4$, umieszczonych tak, jak to przedstawiono na rysunku 6c, przyjmujemy funkcję Airy'ego w postaci

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{h} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{1}{\beta_m^2} (A_m \cosh \beta_m x' + B_m \beta_m x' \sinh \beta_m x') \sin \beta_m y' + \\ (80) \quad & + \frac{1}{h} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{\alpha_n^2} (C_n \sinh \alpha_n y' + D_n \alpha_n y' \cosh \alpha_n y') \cos \alpha_n x'. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (72) prowadzą w tym przypadku do układu równań

$$\begin{aligned} A_m t(\mu_m) = & -\frac{KGa^2}{4b} \beta_m \varrho^{(s)}(\mu_m, \xi') \sin \beta_m \eta', \\ (81) \quad C_n s(\delta_n) + \frac{16}{a^2} \alpha_n^2 \sin \frac{n\pi}{2} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{A_m \cosh^2 \mu_m \cos \frac{m\pi}{2}}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \sinh \mu_m} = \\ & = \frac{KGb^2}{4a} \alpha_n \varrho^{(a)}(\delta_n, \eta') \cos \alpha_n \xi', \\ n = 1, 3, 5, \dots, \quad m = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

Stałe B_m i D_n wyznaczymy ze związków

$$(82) \quad B_m = -A_m \frac{\cosh \mu_m}{\mu_m \sinh \mu_m}, \quad D_n = -C_n \frac{\sinh \delta_n}{\delta_n \cosh \delta_n}.$$

Wreszcie w przypadku czterech źródeł ciepła o intensywności $W/4$ umieszczonych antysymetrycznie względem osi x' i y' (rys. 6d) należy przyjąć funkcję Airy'ego w postaci

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{h} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{1}{\beta_m^2} (A_m \sinh \beta_m x' + B_m \beta_m x' \cosh \beta_m x') \sin \beta_m y' + \\ (83) \quad & + \frac{1}{h} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{1}{\alpha_n^2} (C_n \sinh \alpha_n y' + D_n \alpha_n y' \cosh \alpha_n y') \sin \alpha_n x'. \end{aligned}$$

W tym przypadku warunki brzegowe opiewają:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{x'y'} = & -\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = -\bar{\tau}_{x'y'} \quad \text{dla } x' = a/2 \text{ i } y' = b/2, \\ (84) \quad \bar{\sigma}_{x'} = & 0 \quad \text{dla } x' = a/2, \quad \bar{\sigma}_{y'} = 0 \quad \text{dla } y' = b/2, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{x'y'} &= -\frac{KGa^2}{4bh} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \beta_m \varrho^{(a)}(\mu_m, \xi') \sin \beta_m \eta' \cos \beta_m y', \\ (85) \quad \bar{\tau}_{x'y'} &= -\frac{KGb^2}{4bh} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \alpha_n \varrho^{(a)}(\delta_n, \eta') \sin \alpha_n \xi' \cos \alpha_n x'. \end{aligned}$$

Z warunków (84) można wyznaczyć bezpośrednio wszelkie współczynniki A_m, \dots, D_n . Otrzymamy mianowicie

$$\begin{aligned} A_m s(\mu_m) &= \frac{KGa^2}{4b} \beta_m \varrho^{(a)}(\mu_m, \xi') \sin \beta_m \eta', \quad m = 2, 4, \dots, \\ (86) \quad C_n s(\delta_n) &= \frac{KGb^2}{4a} \alpha_n \varrho^{(a)}(\delta_n, \eta') \sin \alpha_n \xi', \quad n = 2, 4, \dots, \\ B_m &= -A_m \frac{\operatorname{tgh} \mu_m}{\mu_m}, \quad D_n = -C_n \frac{\operatorname{tgh} \delta_n}{\delta_n}. \end{aligned}$$

Dodając do siebie naprężenia wywołane stanami przedstawionymi na rysunkach 6a-d otrzymamy naprężenia dodatkowe $\bar{\sigma}_x, \dots$, które wraz z naprężeniami σ_x, \dots określają stan naprężenia tarczy wywołany działaniem źródła ciepła o intensywności W umieszczonego w punkcie (ξ, η) .

*

Podane w przedstawionej pracy rozwiązania można przenieść od razu do zagadnienia płaskiego stanu odkształcenia. Zamiast źródeł ciepła na grubości h tarczy, będziemy mieli do czynienia z liniowymi źródłami ciepła rozpościerającymi się nieskończenie daleko w kierunku osi z . I tak dla przykładu, układ przedstawiony na rysunku 3 można sobie w płaskim stanie odkształcenia wyobrazić jako nieograniczoną płytę stropową o grubości a , w której w jednakowych odstępach $2b$ umieszczone są liniowe źródła ciepła (np. rury grzewcze centralnego ogrzewania).

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia równanie różniczkowe potencjału przemieszczeniowego termicznego przyjmie postać¹⁾

$$(87) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{aW}{k}.$$

Naprężenia $\bar{\sigma}$ i $\bar{\tau}$ wyrażone są związkami

$$(88) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, & \bar{\sigma}_y &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, & \bar{\tau}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ \bar{\sigma}_z &= -2G \nabla^2 \Phi, & \bar{\tau}_{xz} &= 0, & \bar{\tau}_{yz} &= 0. \end{aligned}$$

Dodatkowy stan naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}$ i $\bar{\bar{\tau}}$ otrzymamy po rozwiązaniu równania różniczkowego Airy'ego z zależności

$$(89) \quad \begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \bar{\bar{\sigma}}_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \bar{\bar{\tau}}_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ \bar{\bar{\sigma}}_z &= \nu \nabla^2 F, & \bar{\bar{\tau}}_{xz} &= 0, & \bar{\bar{\tau}}_{yz} &= 0. \end{aligned}$$

Tak więc mnożąc wyniki uzyskane dla płaskiego stanu naprężenia przez $h/(1-\nu)$ i dodatkowo wyznaczając wielkości $\bar{\sigma}_z$ i $\bar{\bar{\sigma}}_z$ z wzorów (88) i (89) otrzymamy pełne rozwiązanie dla zagadnień płaskiego stanu odkształcenia.

Praca wpłynęła do redakcji 10.08.1956 r.

LITERATURA

1. E. Melan i H. Parcus: Waermespannungen Stationaerer Temperaturfelder. Wiedeń 1953.
2. K. Girkmann: Flaechentragwerke, Wiedeń 1954.
3. A. N adai: Elastische Platten. Berlin 1935.

Распределение напряжений в дисках, вызванных воздействием источников тепла

Краткое содержание

Уравнения перемещения теории упругости для плоского режима распределения напряжения и установившегося поля температур можно написать в виде одного дифференциального уравнения (1) в котором Φ обозначает т. н. тепловой потенциал перемещения, T — поле температур, ν — число Пуассона α — коэффициент теплопроводности. Поле температур соответствует уравнению (2), в котором W — обозначает интенсивность источника тепла (на единицу толщины диска), κ — коэффициент теплопроводности h — толщину

плитки. Систему уравнений можно (1) и (2) можно заменить одним уравнением (3).

Функцию Φ мы связываем граничными условиями $\Phi = 0$ и $\nabla^2 \Phi = 0$. Обозначает это, что на конце диска температура $T = 0$ и что исчезают нормальные напряжения $\bar{\sigma}$. Так как на краю диска не должны выступать также и касательные напряжения, надо к напряжениям $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ добавить напряжения $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ удовлетворяющие уравнению (6), при котором на конце диска касательные напряжения равнялись бы нулю.

Дифференциальное уравнение (3) при граничных условиях $\Phi = 0$ и $\nabla^2 \Phi = 0$ является аналогичным к дифференциальному уравнению изгиба пластины (8) со свободно опертыми краями ($W = 0$ и $\nabla^2 W = 0$). В этой аналогии роль источника тепла играет сосредоточенная сила. Поэтому при определении функции Φ и напряжений $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ можно использовать известное решение теории пластинок, а добавочные напряжения $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ определить при помощи функции Эри. Обращаем внимание на то, что решение будет состоять из части регулярной и части особенной при чем особенность выступит только в функции Φ и напряжениях $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$.

Подробное решение следующих задач доведено к определению составляющих поля напряжений:

- а) бесконечно длинный пояс диска с одним источником тепла,
- б) бесконечно длинный пояс диска с одинаковыми источниками тепла, находящимися в одинаковых расстояниях,
- в) полупояс диска с одним источником тепла,
- г) прямоугольный диск с одним источником тепла.

The State of Stress in a Thin Plate Due to the Action of Sources of Heat

Summary

Displacement equations of the theory of elasticity for a plane stress condition and a fixed temperature field can be represented by one differential equation (1) in which Φ denotes the so called displacement heat potential, T — the temperature field, ν — the Poisson number, α — the coefficient of thermal expansion. The temperature field is described by the differential equation (2) in which W denotes the heat source intensity (per unit of thickness of the plate), k — the heat conductivity

coefficient, h — the thickness of the plate. The system of equations (1) and (2) can be replaced by one equation (3).

We impose upon the function the boundary conditions $\Phi = 0$ and $\nabla^2 \Phi = 0$. They lead to the conclusion that in the edge of the plate the temperature is $T = 0$ and the normal stresses $\bar{\sigma}$ vanish. Since the edge of the plate should be free from tangent stresses as well, we must add to the stress condition $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ such a stress condition $(\bar{\sigma}', \bar{\tau}')$ satisfying equation (6), as would make the tangent stresses on the edge of the plate equal to zero.

The differential condition (3) with the boundary conditions $\Phi = 0$ and $\nabla^2 \Phi = 0$ is fully analogous to the differential equation of deflection (8) of a plate freely supported at the edge ($w = 0$ and $\nabla^2 w = 0$). In this analogy the part of heat source is played by the concentrated force. That is why in determining the function Φ and the stresses $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ we can make use of the known solution from the theory of plates and determine the additional stress condition $\bar{\sigma}', \bar{\tau}'$ by means of the Airy function. It should be mentioned that the solution will consist of a regular and a singular part, the singularity appearing only in the function and in the stress condition $(\bar{\sigma}', \bar{\tau}')$.

The following problems have been worked out in a detailed manner, the components of the stress condition (σ, τ) being determined:

- a) an infinitely long strip of plate with one heat source,
- b) an infinitely long strip of plate with identical heat sources evenly spaced,
- c) a semi-infinite strip of plate with one heat source,
- d) a rectangular plate with one heat source.