ACCADEMIA POLACCA DI SCIENZE E LETTERE
BIBLIOTECA DI ROMA

CONFERENZE FASCICOLO 21

WITOLD NOWACKI

NOUVEAUX COURANTS
DANS LES RECHERCHES PORTANT SUR
LA THERMOÉLASTICITÉ

1963

WROCŁAW — WARSZAWA — KRAKÓW

ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK

CONFÉRENCE TENUE A LA BIBLIOTHÈQUE
DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES A ROME
LE 8 MAI 1963

WARSZAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA
Warszawa, ul. Śniadeckich 8
Zam. 338/63

WITOLD NOWACKI

NOUVEAUX COURANTS DANS LES RECHERCHES PORTANT SUR LA THERMOÉLASTICITÉ

Introduction

Depuis ces des dernières années nous assistons à un développement imposant de la thermoélasticité. Ceci est dû, en premier lieu, aux demandes pressantes présentées à la science par la technique aéronautique qui a pris un essor remarquable. Le développement de la science de la thérmoélasticité est aussi stimulé par le progrès réalisé dans le domaine de la construction de machines de tout genre, ainsi que dans le domaine de la technologie chimique et surtout dans celui de la technologie nucléaire.

Pendant la première décade après la deuxième guerre mondiale c'est surtout la théorie classique des contraintes thermiques qui a été développée par rapport aux parcours thermiques non stationnaires.

La théorie des contraintes thermiques se base sur les principes de la théorie classique de l'élasticité, ainsi que sur la présomption que les constantes du matériel ne varient pas et qu'elles sont indépendantes de la température. Ces présomptions retrécissent, bien entendu, l'applicabilité de solutions à certains intervalles de températures déterminées.

Cependant, au cours des dernières années, le problème du couplage du champ de température et de celui de déformation a pris de plus en plus d'importance, ainsi que le problème des contraintes thermiques dans les corpsanisotropes et hétérogènes.

Le premier problème mentionné présente un vif intérêt du point de vue des connaissances scientifiques. Par contre, le problème des contraintes thermiques dans les corps anisotropes prend actuellement un sens pratique par suite de l'application, de plus en plus répandue, des matériaux à structure anisotrope macroscopique pour la construction des machines et des appareils aéronautiques.

De même nous pouvons constater un développement remarquable des recherches portant sur les contraintes thermiques stationnaires aux températures élevées. C'est notamment la température élevée qui est responsable de l'hétérogénéité du matériel. Les coefficients du matériel deviennent des fonctions de température et, par cela même, le flux étant stationnaire, des fonctions d'emplacement.

Dans le rapport que voici, nous laissons de côté les problèmes des contraintes thermiques dans les corps géométriquement non linéaires. Nous nous proposons de passer en revue les résultats obtenus dans quelques domaines mentionnés et, si possible, de souligner les tendances des recherches qui se frayent le chemin d'une manière digne d'intérêt.

Couplage du champ de température et du champ de déformation

Dans un solide, le champ de température est lié au champ de déformation. Le changement de la quantité de chaleur dans un élément du volume provoque un état de déformation et de contrainte. Inversement, la charge d'un corps — c'est-à-dire le champ de déformation dû aux facteurs mécaniques — provoque la formation d'un champ de température dans le corps. Une partie de l'énergie mécanique, due à la déformation du corps, se transforme en énergie thermique.

Le couplage du champ de température avec celui de déformation nous permet de traiter les problèmes élastocinétiques d'une façon plus précise, de déterminer le champ de température formé sous l'influence des charges variant dans le temps, de prendre en considération l'influence du champ de température, par exemple, sur la vitesse de propagation des ondes élastiques. Enfin, le couplage des champs nous conduit au phénomène connu de la dissipation thermoélastique dans un corps élastique.

Le couplage des champs de température et de déformation a été postulé par J. Duhamel [1]: l'équation élargie de la conductibilité thermique a été introduite par W. Voigt [2] et H. Jeffreys [3]. On trouvera un exposé général et détaillé concernant cette équation dans les travaux de M. A. Biot [4], K. Zoller [5] et P. Chadwick [6]; un exposé sur l'unicité des solutions peut être trouvé dans le travail de J. H. Weiner [7].

L'équation linéarisée de la conductibilité thermique (en admettant toutefois que l'accroissement de la température par rapport à l'état naturel du corps soit petit) est la suivante

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa}\dot{T} - \eta\dot{\varepsilon}_{kk} = -\frac{Q}{\varkappa}. \tag{1}$$

L'expression $T = T_1 - T_0$, T_1 désigne ici la température absolue, l'état $T = 0$ étant défini comme état initial où les contraintes, aussi bien que les déformations dans le corps, n'existent pas. Ensuite $\varkappa = \bar{\lambda}/\varrho c$, où $\bar{\lambda}$ désigne le coefficient de la conductibilité thermique, c — la chaleur spécifique et ϱ — la densité. Dans l'expression (1) nous avons: $Q = \frac{W}{\varrho c}$, où W désigne la quantité de chaleur, formée dans un élément-unité de volume, pendant une unité de temps. Nous avons, en outre, $\eta = \frac{\gamma T_0}{\bar{\lambda}}$ où $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_t = K\alpha_t$, K désigne ici le module de compressibilité, tandis que α_t — le coefficient de dilatation thermique. Et, pour terminer, ε_{kk} désigne la dilatation, $\dot{T} = \partial_t T$, $\dot{\varepsilon}_{kk} = \partial_t \varepsilon_{kk}$ $\left(\partial_t \text{ étant égal au } \frac{\partial}{\partial t}\right)$.

Nous allons maintenant associer aux équations (1) les équations de déplacement de la théorie d'élasticité

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + F_i - \gamma T_{,i} = \varrho \ddot{u}_i. \tag{2}$$

Ainsi, le système d'équations de thermoélasticité se trouve au complet. Dans les équations (2) $\mathbf{u}$ désigne le vecteur de déplacement, $\mathbf{F}$ — celui de forces massiques, λ, μ — les constantes de Lamé, constantes isothermiques.

Les équations (1) et (2) ont été construites en se basant sur la thermodynamique des processus irréversibles [4], [6]. On admet le processus élastique comme étant réversible, tandis que le processus thermique ne l'est pas.

Nous écrirons maintenant les équations (1) et (2) sous une forme vectorielle, à savoir:

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa}\dot{T} - \eta \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = -\frac{Q}{\varkappa}. \tag{3}$$

$$\mu\nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{F} - \gamma \operatorname{grad} T = \varrho \ddot{\mathbf{u}}. \tag{4}$$

En décomposant les vecteurs de déplacement et de la force massique en deux parties: potentielle et rotative

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \operatorname{grod} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \\ \mathbf{F} &= \varrho(\operatorname{grad} \vartheta + \operatorname{rot} \boldsymbol{\chi}). \end{aligned} \tag{5}$$

et en introduisant (5) dans (3) et (4) nous obtenons — après avoir éliminé la température — le système d'équations que voici:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)\varphi - \bar{\varepsilon}\partial_t \nabla^2 \varphi = -\frac{mQ}{\varkappa} - \frac{1}{c_1^2}\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\vartheta, \tag{6}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \frac{1}{c_2^2}\ddot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{1}{c_2^2}\boldsymbol{\chi}, \quad \bar{\varepsilon} = m\eta. \tag{7}$$

Dans les équations ci-dessus $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}$, $c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}$, où c_1 représente la vitesse de propagation d'une onde élastique longitudinale et c_2 — celle d'une onde transversale.

La température est liée à la fonction φ par la relation suivante:

$$T = \frac{1}{m}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\,\partial_t^2\right)\varphi + \frac{\vartheta}{mc_1^2}. \tag{8}$$

On voit, d'après les équations (6) et (7) que pour $\boldsymbol{\chi} = 0$ on n'obtient dans l'espace thermoélastique illimité que des ondes longitudinales.

Par contre, si les sources de chaleur n'existent pas $Q = 0$ et si $\vartheta = 0$, on aura dans l'espace thermoélastique illimité des ondes transversales seulement, ce qui ne donne pas lieu au couplage du champ de température avec celui de déformation.

Dans un corps élastique limité on aura des ondes longitudinales, ainsi que des ondes transversales.

Dans le cas, où les changements de température et des forces massiques procèdent, dans le temps, à une allure ralentie, nous pouvons négliger les termes inertiaux dans les équations (4) et considérer le problème comme quasi statique.

Pour le cas d'un corps illimité, posant que $u_i = \varphi_{,i}$ les équations (3) et (4) peuvent être réduites au système de deux équations:

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa}\dot{T} - \eta\,\nabla^2\dot{\varphi} = -\frac{Q}{\varkappa}, \tag{9}$$

$$\nabla^2\varphi = mT. \tag{10}$$

Éliminant la fonction φ des équations ci-dessus, nous obtenons

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa_1}\dot{T} = -\frac{Q}{\varkappa}, \quad \frac{1}{\varkappa_1} = \frac{1}{\varkappa} + \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon} = \eta m. \tag{11}$$

L'équation de conductibilité thermique revêt ici la même forme [8] que pour le problème non couplé.

Remarquons que, pour un problème stationnaire, l'équation (1) devient une équation de type Poisson; les champs de température et de déformation ne sont pas couplés.

On n'a résolu jusqu'ici qu'un nombre tout à fait restreint de problèmes, aussi bien plans que spatiaux. Ceci est dû aux grandes difficultés d'ordre mathématique du problème.

C'est ainsi que H. Deresiewicz [9] et ensuite P. Chadwick et I. N. Sneddon [10] ont considéré le problème de propagation des ondes harmoniques dans l'espace thermoélastique illimité.

Le problème de propagation des contraintes thermiques dans les barres métalliques dues, soit à l'excitation thermique, soit à l'excitation mécanique, a été considéré par I.N. Sneddon [11]. Il a donné aussi une solution approximative basée sur la méthode des perturbations. J. Ignaczak [12] a indiqué une autre méthode d'obtenir la solution pour une barre semi-infinie, méthode expédiente dans le cas de conditions homogènes aux limites, les conditions initiales étant admises comme hétérogènes.

Le problème de la propagation des ondes de surface de Rayleigh dans un milieu thermoélastique, le libre échange thermique étant admis dans le plan limitant le demi-espace élastique, a été l'objet d' une étude de E. J. Lockett [13]; le problème de la propagation des ondes thermoélastiques harmoniques dans une couche élastique a été considéré par W. Nowacki et M. Sokołowski [14].

Les ondes harmoniques longitudinales se propageant dans les cylindres pleins et vides — en tenant compte des effets thermoélastiques — ont été étudiées dans le travail de E. J. Lockett [15]. J. Ignaczak et W. Nowacki [16], [17] ont étudié les oscillations forcées périodiques des cylindres aux profils rectangulaires dues à leur échauffement, ainsi que le problème des oscillations forcées de plaques d'épaisseur moyenne.

L'action des sources de chaleur dans l'espace thermoélastique illimité fut l'objet de plusieurs ouvrages. C'est ainsi que Zorski [18] considérait le problème de l'action d'une source momentanée et concentrée de chaleur, appliquant à ce problème, caractérisé par la symétrie sphérique, la transformation de Laplace.

G. Eason et I. N. Sneddon [19], ainsi que F. J. Lockett et I. N. Sneddon [20] ont donné une solution du problème de la propagation des contraintes, en admettant une distribution arbitraire des sources de chaleur, aussi bien dans l'espace que dans le temps. Ils ont eu recours à la technique Fourier, en appliquant la transformation quadruple exponentielle.

W. Nowacki [21] a proposé quelques solutions en forme fermée pour les sources de chaleur variant dans le temps d'une façon harmonique.

Une ample littérature a été consacrée au problème de la propagation des contraintes dans le demi-espace thermoélastique, échauffé à la surface ou bien excité aux oscillations par des forces mécaniques.

C'est ainsi que le problème de l'échauffement inégal de la surface limitant le demi-espace thermoélastique, en tenant compte de la technique de transformation exponentielle de Fourier, a été étudié dans le travail mentionné de G. Eason et I. N. Sneddon [19] *.

Le problème de Lamb, élargi sur le demi-espace thermoélastique, caractérisé aussi bien par la symétrie axiale que plane, a été l'objet d'un travail de W. Nowacki [21]. Ajoutons que les résultats d'ordre général n'ont, dans une certaine mesure qu'un caractère formel. Il a été impossible, même dans les cas les plus simples, d'obtenir des résultats sous forme fermée à l'aide fonctions connues; les résultats ont été présentés, pour la plupart, sous forme d'intégrales impropres.

Notons aussi quelques travaux concernant la solution approximative du problème du demi-espace thermoélastique: M. Lessen [23] et R. Hetnarski [24], ainsi que R. Muki et S. Breuer [25], ont donné une solution du problème de V. I. Danilovskaya [26] pour de petites valeurs du temps t, élargi sur le milieu thermoélastique. Une solution intéressante a été donnée par G. Paria [27]. Elle concerne les cas de l'échauffement du plan limitant le demi-espace élastique à la température $\theta(r,o)\, H(t)$ où $H(t)$ désigne la fonction de Heaviside. La solution de Paria est valable pour le problème caractérisé par la symétrie axiale, pour de petites valeurs du temps t.

G. A. Nariboli [28] a présenté une solution analogue, valable pour les valeurs petites du temps t et concernant le cas de l'espace thermoélastique avec un vide. Le bord du vide est échauffé à la température $T_0\, H(t)$.

Le problème caractérisé par la symétrie axiale, en rapport à la concentration des contraintes, dues au flux plan de chaleur (le flux varie dans le temps d'une façon harmonique) autour d'un vide cylindrique ou sphérique, a été considéré dans le travail de J. Ignaczak et W. Nowacki [29].

Comme on le voit — et notre revue de littérature le prouve — on n'a résolu jusqu'ici que les problèmes le plus simples. Les solutions sous forme fermée ont été obtenues seulement pour quelques cas particuliers, unidimensionnels, en admettant que la température ou les forces, varient dans le temps d'une façon harmonique.

Il nous semble que les recherches futures seront dirigées, avant tout, vers les solutions de problèmes où les changements des charges et de température dans le temps seront traités comme arbitraires. Vu la complexité

* Cette solution comporte deux parties, à savoir: l'intégrale singulière et la solution générale choisies de façon à satisfaire toutes les conditions aux limites sur le bord du demi-espace. L'intégrale singulière se rapporte au milieu thermoélastique ($\varepsilon \neq 0$). La solution complète peut être trouvée dans le travail de W. Nowacki [22].

mathématique du problème, on doit s'attendre plutôt à des solutions approximatives.

Étant donné que le couplage thermoélastique n'influence que faiblement le changement des contraintes, on peut appliquer, avec résultat, la méthode des perturbations. Cette méthode s'avère particulièrement efficace pour les problèmes quasi statiques.

Le groupe des problèmes qui s'imposent ensuite, c'est l'élaboration des méthodes générales d'intégration du système d'équations différentielles (3), (4), de transformation dudit système dans un système d'équations intégrales, de donner des solutions de ces équations sous forme intégrale, similaire à la présentation intégrale de Kirchhoff et Poisson pour le problème élastique [30]. Ajoutons que c'est M. Rosenblatt qui, déjà en 1910 [31], a fait les premiers pas dans cette direction, bien que les conditions aux limites admises aient borné la portée de ses recherches.

On peut présumer que les recherches futures porteront aussi sur les problèmes concernant les corps thermoélastiques anisotropes et thermo-visco-élastiques.

Contraintes thermiques dans les corps anisotropes

Si la théorie des contraintes thermiques dans les corps homogènes possède une ample et riche littérature scientifique, le problème des contraintes thermiques dans les corps anisotropes n'inspire pas d'intérêt semblable et les considérations qui le concernent sont plutôt rares. Ceci est dû non seulement au fait qu'il comporte des problèmes d'ordre mathématique beaucoup plus compliqués, mais aussi au fait que l'application pratique du problème est jusqu'à nos jours beaucoup plus restreinte. Cependant, on a affaire maintenant, de plus en plus fréquemment, aux matériaux de structure macroscopique et anisotrope (p. ex., plaques, disques, coques, tubes aux parois fortes) accusant différentes propriétés élastiques et thermiques selon les directions considérées.

Nous donnons ci-dessous un aperçu des problèmes déjà résolus, ainsi que les relations générales, en indiquant les travaux où les problèmes particuliers sont traités d'une façon plus détaillée. Dans un corps, accusant l'anisotropie générale rectiligne, l'équation de la conductibilité thermique (en négligeant le couplage du champ de déformation et du champ de température) peut être écrite comme suit [32]

$$\lambda_{ij} T_{,ij} - \varrho c \dot{T} = - W, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

où $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ désignent les coefficients de la conductibilité thermique.

Les relations entre les composantes de l'état de déformation, de contrainte et de température, ainsi que la loi Hooke-Duhamel généralisée, sont données par les formules

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \alpha_{ij}\,T, \qquad i, j, k, l = 1, 2, 3, \tag{2}$$

le nombre de 81 coefficients (*elastic compliance constants*) étant réduit — vu les propriétés de symétrie

$$a_{ijkl} = a_{ijlk} = a_{jikl} \tag{3}$$

au nombre de 36. Cependant, lesdits coefficients ne déterminent pas d'une façon directe les constantes du matériel, leur valeurs variant avec les changements de direction de l'axe des coordonnées. C'est seulement après avoir appliqué la théorie des invariants à la transformation des formes linéaires sus-dites et en postulant l'existence d'une fonction homogène quadruple de l'énergie élastique qu'on peut réduire le nombre de coefficients a_{ijkl} encore de 15, pour obtenir, pour un corps accusant l'anisotropie la plus générale (structure triclinique), 21 coefficients indépendants. Les grandeurs α_{ij} apparaissant dans (2) — appelées les coefficients de dilatation thermique linéaire — forment un tenseur symétrique $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ [33].

Grâce à la symétrie, nous obtenons des structures de plus en plus simples. C'est ainsi que, pour la structure monoclinique, nous avons 13 constantes élastiques, mutuellement indépendantes, pour la structure orthorombique — 9, hexagonale — 5, cubique — 3 et, enfin, pour la structure isotropique — 2 coefficients.

En résolvant (2) par rapport à σ_{ij}, nous obtenons

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} + \beta_{ij}\,T, \qquad i, j, k, l = 1, 2, 3, \tag{4}$$

où

$$A_{ijkl} = A_{ijlk} = A_{jikl}, \qquad \beta_{ij} = \beta_{ji}.$$

On appelle les valeurs A_{ijkl} des constantes rigiditées.

En introduisant la formule (4) dans les équations du mouvement

$$\sigma_{ij,j} = \varrho \ddot{u}_i, \tag{5}$$

et en exprimant les déformations par les déplacements en tenant compte des relations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{6}$$

après avoir rangé les équations par rapport à u_i, nous obtenons les équations de déplacement suivantes:

$$\frac{1}{2} A_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k})_{,j}+\beta_{ij}T_{,j}=\varrho\ddot{u}_i \tag{7}$$

ou bien

$$L_{ij}(u_j)+\beta_{ij}T_{,j}=0 \tag{7'}$$

où L_{ij} désignet certains opérateurs linéaires différentiels de second genre des variables du temps et de l'espace. La solution des équations (7) peut être composée de deux solutions partielles, à savoir: la solution $\bar{u}_i$ satisfaisant au système d'équations non homogènes (7′) et la solution $\bar{\bar{u}}_i$ satisfaisant au système d'équations

$$L_{ij}(\bar{\bar{u}}_j)=0, \tag{8}$$

$\bar{\bar{u}}_i$ étant exprimée à l'aide de trois fonctions χ_i $(i=1,2,3)$. Les fonctions χ_i satisferont, bien entendu, aux équations homogènes

$$|L_{ij}|\chi_i=0. \tag{9}$$

Il est permis de considérer les fonctions χ_i comme fonctions de Galerkin, pour un corps anisotrope, étendues sur les problèmes dynamiques [34].

Du point de vue formel, on peut obtenir une solution du système d'équations (1) et (7) en appliquant la transformation intégrale quadruple de Fourier. Cependant, les tentatives en vue d'obtenir, par cette méthode, une solution servant à calculer un problème tridimensionnel quelconque, aussi bien pour un corps accusant l'anisotropie générale que l'anisotropie orthogonale (orthotropie) ont échoué [35] jusqu'ici.

Le théorème de Betti peut être sans peine étendu au cas d'un corps anisotrope.

$$\begin{aligned}\int_V F_i\,\delta u_i'\,dV+\int_\Gamma p_i\,\delta u_i'\,d\Gamma+\int_V T\alpha_{ij}\,\delta\sigma_{ij}'\,dV= \\ =\int_V \delta F_i'\,u_i\,dV+\int_\Gamma \delta p_i'\,u_i\,d\Gamma+\int_V \delta T'\,\alpha_{ij}\,\sigma_{ij}\,dV.\end{aligned} \tag{10}$$

On peut démontrer également que le changement de volume d'un corps libre de charges sur la surface peut être présenté sous la forme suivante [36]

$$\Delta V=\int_V T\alpha_{kk}\,dV. \tag{11}$$

Les équations de déplacement, pour un milieu d'une orthotropie curviligne arbitraire, ont été établies et discutées dans le travail de J. Nowiński, W. Olszak et W. Urbanowski, [37]. Trois exemples ont été résolus, dont le premier concerne un cylindre à parois fortes, échauffées d'une manière inégale, accusant une orthotropie cylindrique; le second — un problème analogue pour un disque, le troisième enfin — concerne le cas d'une coque sphérique d'orthotropie sphérique chauffée d'une manière inégale.

W. Olszak [38] a formulé des remarques intéressantes concernant l'état libre de contraintes dans les corps anisotropes soumis à un échauffement. Il a démontré que pour les corps susceptibles d' une déformation libre et accusant l'anisotropie rectiligne, seule une répartition linéaire de température ne provoque pas de contraintes. Cependant, pour les corps à anisotropie curviligne, les équations de compatibilité des déformations impliquent des restrictions beaucoup plus grandes que celles pour les corps à anisotropie rectiligne. C'est ainsi, p. ex., que pour les milieux à orthotropie cylindrique, seulement la répartition constante de température ne provoque pas de contraintes; pour les corps à orthotropie sphérique, tout champ de température différent de zéro provoque un état de contrainte.

Parmi les problèmes tridimensionnaux, c'est le problème des contraintes thermiques stationnaires et quasi statiques dans un corps à anisotropie transversale qui a été le mieux étudié, B. Sharma [39] p.ex., examine les contraintes thermiques dues à l'échauffement d'un plan limitant le demi-espace élastique; il est arrivé à la solution du problème en introduisant deux fonctions de contraintes satisfaisant à l'équation différentielle du second degré. Z. Mossakowska et W. Nowacki [40] ont élaboré une méthode différente en introduisant trois fonctions de déplacement. Ces fonctions étendent la fonction de Galerkin sur le problème thermoélastique dans les corps anisotropes. Ont été résolus et présentés, sous forme fermée, les problèmes de contraintes thermiques dues à l'action des sources de chaleur dans un espace illimité et dans un demi-espace élastique en tenant compte de différentes conditions aux limites statiques, aussi bien que thermiques. Une solution analogue a été donnée pour le cas de l'action d'un noyau de la déformation thermoélastique. Le problème de l'échauffement stationnaire d'un demi-espace et d'une couche élastiques a été considéré dans le même travail. Les auteurs ont démontré que les contraintes à vecteur normal, au plan limitant un demi-espace, ne disparaissent pas — comme cela a lieu dans le problème de E. Sternberg et E. L. Mac Dowell [41] — mais tendent vers zéro à mesure que l'isotropie transversale passe à l'isotropie. Les auteurs ont encore donné la solution de quelques problèmes quasi statiques concernant l'action d'une source instantanée de chaleur dans un espace et un demi-espace élastique. A. Singh [42] a réussi à obtenir les solutions de quelques problèmes de contraintes thermiques caractérisées par la symétrie axiale dans le demi-espace à isotropie transversale en faisant usage de deux fonctions de déplacement. Les problèmes bidimensionnels ont reçu une considération assez ample. C'est ainsi que W. W. Pell [43] a analysé le problème de fléchissement et de pression simultanés d'une planche anisotrope, dus au champ stationnaire de température, variant d'une façon linéaire le long de l'épaisseur de la plaque; l'auteur a consacré une analyse plus détaillée à la plaque circulaire.

J. Mossakowski [44], en faisant usage de la méthode de la fonction variable complexe, a obtenu des solutions de problèmes concernant l'action des sources de chaleur dans une plaque semi infinie à anisotropie isogone. L'introduction de la fonction des contraintes, analogique à celle d'Airy pour les plaques isotropes [45], est avérée une méthode expédiente pour résoudre les problèmes traités. Les méthodes de solution du problème des plaques orthotropes en appliquant les fonctions du type de celle d'Airy et de Marguerre ont été élaborées par P. P. Teodorescu [46]. On peut, d'ailleurs, tenir compte de l'analogie de la plaque élaborée par Dubas et Tremmel [47], [48], pour les problèmes d'un disque orthotrope.

Deux problèmes dynamiques ont été résolus jusqu'ici, à savoir: le problème de déterminer les contraintes dans un demi-espace anisotrope pour le cas où dans un plan parallèle au bord $x_3 = 0$ une source plane non stationnaire de chaleur [49], [50] est placée. Le champ de température, les composantes de l'état de contrainte et de déplacement ne dépendent que des variables x_3 et t.

Contraintes thermiques dans les corps hétérogènes isotropes

La théorie d'élasticité des corps hétérogènes isotropes constitue un domaine de la théorie générale de l'élasticité actuellement en plein essor. Le terme «hétérogénéité du matériel» est employé ici au sens de hétérogénéité macroscopique. Les grandeurs mécaniques, les modules d'élasticité E, G, le coefficient μ do Poisson et la densité ϱ sont des fonctions de l'emplacement. Elles varient d'une façon continue; dans le cas particulier d'une variation discontinue nous nous trouvons en présence d'un milieu stratifié.

Les premiers ouvrages concernant le milieu non homogène traitaient de la propagation des ondes élastiques dans les problèmes de séismologie [51]—[56] (La densité et les propriétés mécaniques de la croûte terrestre varient avec sa profondeur). Les problèmes statiques d'élasticité d'un milieu non homogène ont attiré l'attention de nombreux auteurs [57], [58]; le Symposium d'IUTAM à Varsovie en 1958 a été destiné à l'étude de ces problèmes [59].

Nous allons considérer un corps non homogène où les propriétés mécaniques et thermiques sont, toutes les deux, fonctions de l'emplacement, étant indépendantes du temps et de la température; la variation de ces valeurs provient des procès technologiques au cours de la production (béton, barres en acier, etc.). Les relations entre les contraintes et les déformations peuvent être présentées sous la forme suivante:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma T)\,\delta_{ij}, \tag{1}$$

où les symboles $\mu, \lambda, \gamma = (3\lambda+2\mu)\,\alpha_t$ désignent les fonctions de l'emplacement, c'est à dire elles dépendent des coordonnées x. En introduisant (1) dans les équations de mouvement

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \varrho \ddot{u}_i, \tag{2}$$

et en exprimant les déformations par les déplacements, nous arrivons aux équations de déplacement suivantes:

$$\begin{aligned}\mu u_{i,kk} + [(\lambda + 2\mu)\, u_{k,k}]_{,i} - \mu u_{k,ki} - 2\mu_{,i}\, u_{k,k} + \\ + (u_{i,k} + u_{k,i})\,\mu_{,k} + F_i - (\gamma T)_{,i} = \varrho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned} \tag{3}$$

Nous pouvons écrire ces équations dans la notation vectorielle à savoir:

$$\begin{aligned}\mu\nabla^2 \mathbf{u} - \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\,(\operatorname{grad} \mu \cdot \varphi) + \\ + \operatorname{grad}\,[(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}] + \boldsymbol{F}_i - \operatorname{grad}\,(\gamma T) = \varrho \ddot{\mathbf{u}},\end{aligned} \tag{4}$$

où φ désigne le tenseur de déformation. L'équation de la conductibilité thermique prendra la forme

$$(\bar{\lambda} T_{,k})_{,k} - c\varrho \dot{T} = -W \tag{5}$$

où $\bar{\lambda}$ désigne le coefficient de la conductibilité thermique.

Les équations de déplacement (3), ainsi que l'équation de la conductibilité thermique (5) sont des équations linéaires aux coefficients variables. C'est l'équation (5) qui est responsable des difficultés mathématiques, parce qu'il n'est possible d'obtenir des solutions en fonction connue que dans des cas très peu nombreux. On doit donc attendre que les recherches sur les corps non homogènes aboutiront à des solutions approximatives, basées sur les méthodes variationnelles et orthogonales. Il va de soi, que les principes généraux établis par d'Alembert, Hamilton et Castigliano resteront vrais pour les corps non homogènes, les valeurs μ, λ, α_t, $\bar{\lambda}$ étant considérées comme variables. Analogiquement. le théorème de réciprocité de E. Betti pour les déplacements restera vrai dans ce cas, ainsi que toutes les conséquences qui en découlent. P. ex.:

$$\int_V \varepsilon_{ij}\, dV = \delta_{ij} \int_V \alpha_t\, T dV, \qquad \int_V \sigma_{kk}\, dV = 0. \tag{6}$$

Au cours des dernières années, en raison de l'emploi de plus en plus fréquent d'éléments de construction exposés à des températures hautes, nous assistons au développement d'un nouveau courant de recherches, tenant compte de l'effet de la température sur les propriétés mécaniques et thermiques du corps. Le corps devient non homogène sous l'influence du champ de température; donc, ces propriétés dépendent de l'emplacement du corps. Dans ce cas, au lieu des relations (5) nous écrirons

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \left[\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\int_0^T \alpha_t(\eta)\, d\eta\right]\delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Les valeurs λ, μ, α_t dépendent de la température, c'est-à-dire

$$\mu = \mu\,[T(x_i)], \qquad \lambda = \lambda\,[T(x_i)].$$

En introduisant les déformations dans les équations d'équilibre, pour le cas du problème stationnaire, nous arrivons au système d'équations (3) où les termes d'inertion sont négligés. En plus, nous avons

$$\mu_{,i} = \mu_{,T} T_{,i}, \qquad \lambda_{,i} = \lambda_{,T} \cdot T_{,i}$$

et

$$\gamma T = (3\lambda + 2\mu)\int_0^T \alpha_t(\eta)\, d\eta.$$

L'équation de la conductibilité thermique est non linéaire

$$[\lambda'(T)\, T_{,k}]_{,k} = -W. \tag{8}$$

Si nous introduisons la fonction auxiliaire

$$G(T) = \frac{1}{\lambda_0'}\int_0^T \lambda'(\tau)\, d\tau = G\,[T(x_i)] \tag{8'}$$

nous pouvons réduire l'équation (8) à la forme

$$\nabla^2 G(x_r) = -\frac{1}{\lambda_0'} W(x_r), \qquad \lambda_0' = \text{const}. \tag{8''}$$

En résolvant cette équation, nous obtenons le champ de température sous forme implicite (8′).

Dans le cas considéré, la difficulté consiste à résoudre l'équation (8) de conductibilité thermique. En connaissant le champ de température et la dépendance des coefficients de la température, ainsi que de l'emplacement, nous pouvons résoudre les équations de déplacement qui constituent les équations linéaires différentielles partielles avec les coefficients variables. Pour faire face aux difficultés et résoudre ces équations, il est indispensable d'introduire quelques simplifications. Nous pouvons admettre, p. ex., que le coefficient de Poisson est constant; nous pouvons aussi poser $\nu = \frac{1}{2}$ que le corps est incompressible. Une autre simplification peut être admise pour la dilatation thermique $\varepsilon^0 = \int_0^T \alpha_t(\eta)\, d\eta$: une valeur moyenne $\varepsilon^0 = \alpha_t^* T$.

Jusqu'ici on n'a résolu qu'un nombre minime de problèmes [60], [66]. Ces solutions concernent principalement l'état de déformation dans un disque circulaire, un cylindre vide et une sphère vide. En posant l'indépendance ν de température et la valeur moyenne de l'expansion thermique, nous avons les équations de déplacement suivantes [65]:

a. pour l'état plan de déformation et pour un champ de température caractérisés par la symétrie axiale

$$\partial_r \left\{ E \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1+\nu)\, \alpha_t^* T \right] \right\} = \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial E}{\partial r} u_r, \qquad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \tag{9}$$

b. pour l'état plan de contrainte

$$\partial_r \left\{ E \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \alpha_t^* T \right] \right\} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{u_r}{r} \frac{\partial E}{\partial r}, \tag{10}$$

c. pour le problème caractérisé par la symétrie sphérique

$$\partial_R \left\{ E \left[\frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u_R}{R} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t^* T \right] \right\} = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{u_R}{R} \frac{\partial E}{\partial R}, \tag{11}$$

$$R = (r^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

On peut en déduire que si l'on admet que $\nu = \frac{1}{2}$, on arrive à une simplification importante, étant donné qu'alors les parties droites des équations (10) et (11) disparaissent. Par conséquent, la solution de ces équations se trouve simplifiée de beaucoup.

J. Nowiński [61] examine les contraintes thermiques dans un cylindre à parois fortes en posant $E(T) = E_0 e^{-\beta T}$ ou bien $E(r) = E_0 \varkappa r$. S. A. Šesterikov [64] partant des les mêmes prémisses, étudie les contraintes thermiques dans un disque. J. Nowiński dans un autre travail [66] étudie l'état de contrainte dans une sphère pleine et dans une autre vide, où $\nu = \frac{1}{2}$, et $\varepsilon^0 = \int_0^T \alpha_t(\eta)\, d\eta$; il a obtenu une solution sous une forme fermée.

R. Trostel [62] dans les travaux cités ci-dessus en posant $\nu = \frac{1}{2}$ a réussi à donner une solution exacte de l'équation (10). Dans un second ouvrage [63], il développe une méthode de perturbation pour résoudre les équations de déplacement, en posant que le module E varie lentement avec T

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{d}{dT}\left(\lg \frac{E}{E_0}\right) = \varepsilon\varphi(T).$$

ε désigne ici le petit paramètre. Ayant recours à la méthode de perturbation, R. Trostel a résolu le problème de contraintes thermiques dans un tube à parois fortes où $\nu = \text{const} \neq \frac{1}{2}$ et $\lambda(T)$, $\alpha_t(T)$ sont des fonctions linéaires de température. M. Sokołowski [65] étudia les contraintes thermiques dans un cylindre infini et dans une sphère, dues à l'échauffement de la surface extérieure et à l'effet des sources de chaleur, en posant $\nu = \text{const}$ et admettant que les dérivées de E sont si petites par rapport au rayon qu'il est permis de négliger les parties droites des équations [9]—[11]. Le point essentiel est de considérer la variabilité du coefficient de conductibilité $\bar{\lambda}(T)$ et de formuler les principes selon lequels les contraintes thermiques augmentent (dépendant du genre de la variabilité de $\bar{\lambda}(T)$ et de la direction du flux de chaleur), resp. diminuent.

Il ne se présente aucune difficulté d'étendre les principes d'Alembert et d'Hamilton sur les corps où la non-homogénéité est le résultat de la température élevée. Cependant il faut tenir compte du fait que les valeurs μ, λ dépendent de la température.

J. Nowiński [67] a généralisé le théorème réciproque de Betti-Rayleigh sur le cas des corps élastiques dont les propriétés dépendent de la température.

Afin d'appliquer ce théorème aux problèmes thermo-élastiques aux propriétés dépendant de la température, il y a lieu de résoudre auparavant un problème élastique connexe pour un corps non homogène «de par sa nature même». Le théorème réciproque de Betti a la forme

$$(12)\quad \int_V F_i' u_i\, dV + \int_\Gamma p_i' u_i\, d\Gamma = \int_V \Lambda_i'\, dV \int_0^T \alpha_t(\tau)\, d\tau + \int_V F_i u_i'\, dV + \int_\Gamma p_i u_i'\, d\Gamma,$$

où les déplacements sont dus à l'effet des forces p'_i, F'_i dans un corps non homogène $(T=0)$, tandis que les déplacements u_i sont dus à l'effet des forces p_i, F_i et du champ de température dans ce même corps non homogène; Λ'_i désignent la somme des contraintes normales provoquées par les forces p'_i, F'_i. Le déplacement thermoélastique, p.ex., dans un corps V est donné par la formule générale

$$u_i(x_r) = \int_V \Lambda' \, dV \int_0^T \alpha_t(\eta) \, d\eta \tag{13}$$

où la somme des contraintes $\Lambda'(x_r, \xi_r)$ doit être trouvée dans la solution du problème classique pour le corps non homogène, exposé à l'action des forces concentrées uniformes au point (ξ_r) de V le long de l'axe x_i.

On a, en particulier,

$$\int_V \varepsilon_{ij} \, dV = \delta_{ij} \int_V dV \int_0^T \alpha_t(\eta) \, d\eta, \tag{14}$$

pour un corps libre de traction. Donc,

$$\Delta V = \int_V \varepsilon_{kk} \, dV = \varrho \int_V dV \int_0^T \alpha_t(\eta) \, d\eta \tag{15}$$

et

$$\int_V \sigma_{kk} \, dV = 0, \tag{16}$$

analogiquement comme pour un corps homogène.

Contraintes thermiques dans les corps physiquement non linéaires

Nombre de matériaux de construction n'obéissent pas à la loi de variation linéaire entre les composantes de l'état de déformation et celui de contrainte (la loi Hooke), même dans la région de petites déformations et dans la région élastique. La non linéarité du type mentionné — due à la structure physique du matériel — est appelée la non-linéarité physique.

Il résulte de l'essence même des relations entre les contraintes et les déformations que ces dernières n'augmentent pas proportionellement aux changements des charges. Donc, le principe de superposition des effets de charges ne s'applique pas. Cependant l'action des forces est soumise au principe de succession d'actions ce qui d'ailleurs ne change pas, en général, l'effet final de l'action du système de forces — la loi de l'interchangeabilité des forces est ici en vigueur.

On a proposé déjà quelques variantes de la théorie non linéaire physique d'élasticité [68]—[71]. Les problèmes des contraintes thermiques, stationnaires du point de vue de la théorie non linéaire physique d'élasticité, ont été considérés pour la première fois dans le travail de F. Jindra [72], se basant sur la théorie de H. Kauderer [70].

Conformément à cette théorie les relations entre l'état de contrainte et celui de déformation peuvent être présentées sous la forme suivante:

$$s_{ij} = 2G\gamma(\psi_0^2)\, e_{ij}, \tag{1}$$

$$\sigma_{kk} = 3K\varkappa(\varepsilon_{kk})\,(\varepsilon_{kk} - 3\alpha_t T). \tag{2}$$

Les symboles s_{ij} et e_{ij} désignent ici, respectivement, les déviateurs de l'état de contrainte et de celui de déformation, tandis que $\gamma(\psi_0^2)$ et $\varkappa(\varepsilon_{kk})$ sont des fonctions de l'extension et de la compression, compte tenu de

$$\lim_{\varepsilon_{kk}\to 0} \varkappa(\varepsilon_{kk}) = 1, \quad \lim_{\psi_0^2 = 0} \gamma(\psi_0^2) = 1 \tag{3}$$

d'où suit que pour $\varepsilon_{kk} \to 0$ et $\psi_0^2 \to 0$ les relations (1) et (2) tendent à se conformer à la loi Hooke, donnée par les formules

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3K(\varepsilon_{kk} - 3\alpha_t T), \tag{4}$$

où G, K désignent, respectivement, le module du glissement simple et le module de compressibillité de la théorie linéaire.

En résolvant les équations (1) et (2) par rapport aux déformations nous obtenons:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{g(t_0^2)}{2G}\sigma_{ij} + \left\{\left[\frac{k(s_0)}{3K} - \frac{1}{2G}g(t_0^2)\right]\sigma_0 + \alpha_t T\right\}\delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3 \tag{5}$$

où $g = g(t_0^2)$, $k = k(s_0)$ désignent les fonctions des variables $s_0 = \dfrac{\sigma_0}{3K}$, $t_0 = \dfrac{\tau_0}{G}$ et les valeurs σ_0, τ_0 sont les invariantes de la forme

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad \tau_0^2 = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}[(\sigma_{11}-\sigma_0)^2 + (\sigma_{22}-\sigma_0)^2 + (\sigma_{33}-\sigma_0)^2] + \right.$$
$$\left. + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right\}.$$

L'application des relations (5) présente des avantages particulièrement expédients si on réussi à présenter les fonctions $k(s_0)$ et $g(t_0)$ sous la forme de séries entières

$$\begin{aligned} k(s_0) &= 1 + k_1 s_0 + k_2^2 s_0^2 + \ldots, \\ g(t_0) &= 1 + g_2 t_0^2 + g_4 t_0^4 + \ldots. \end{aligned} \tag{6}$$

Les coefficients dans les séries ci-dessus désignent les constantes du matériel. Dans les nombreux cas résolus jusqu'ici (la torsion d'une barre, l'état plan de contrainte dans les disques) H. Kauderer et ses collaborateurs, basant sur les résultats obtenus dans les expériences effectuées au laboratoire, proposent — comme première approximation — d'accepter les relations suivantes:

$$k(s_0) = 1, \quad g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2. \tag{7}$$

Ces relations indiquent que l'effet de la non linéarité physique est beaucoup plus grande sur les glissements simples que sur les changements de volume du corps.

F. Jindra, dans le travail que nous venons de citer, a considéré deux problèmes unidimensionnels, à savoir: il a réussi à déterminer les parcours de contraintes dans une balle vide et dans un disque annulaire de faible épaisseur F. Jindra a posé un flux stationnaire de chaleur, déterminé à l'aide de l'équation de conductibilité thermique, aux coefficients constants.

Dans les deux cas, grâce à l'élimination du déplacement, on obtient les équations linéaires pour les contraintes radiales. En faisant profit de la relation (7) et en appliquant la méthode des perturbations, l'auteur arrive à déterminer la distribution des contraintes radiales. Les calculs des exemples cités (pour le cuivre pur) démontrent qu'on obtient — par rapport à la théorie linéaire — des changements importants, particulièrement pour le bord intérieur d'une balle vide et des anneaux.

La complexité des équations non linéaires aussi bien pour les déplacements que pour les contraintes, ne permet pas d'espérer qu'on obtiendra des solutions exactes. En ce qui concerne les solutions des problèmes physiques non linéaires, les méthodes approximatives peuvent s'avérer très efficaces, notamment la méthode de Galerkin et la méthode des perturbations.

OUVRAGES CITÉS DANS LE TEXTE

1. J. M. C. DUHAMEL, *Second mémoire sur les phénomènes thermomécaniques*, «J. de l'École Polytech.», Vol. 15, 1837.
2. W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner Verlag, 1910.
3. H. JEFFREYS, *The thermodynamics of an elastic solid*, «Proc. Camb. Phil. Soc.», Vol. 26, 1930.
4. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*, «J. Appl. Phys.», Vol. 27, 1956.
5. K. ZOLLER, *Die Wärmegleichung bei Wärmespannungen*, «Ing. Arch.», Vol. 28, 1959.
6. P. CHADWICK, *Thermoelasticity. The dynamical theory*, «Progress in Solid Mechanics», Vol. 1, 1960.
7. J. H. WEINER, *A uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem*, «J. Appl. Math.», Vol. 15, 1957.
8. H. ZORSKI, *On a certain property of thermoelastic media*, «Bull. Acad. Polon. Sci.», Ser. Techn., Vol. 6, 1958.
9. H. DERESIEWICZ, *Plane waves in a thermoelastic solid*, «J. of Accust. Soc. Amer.», Vol. 29, 1957.
10. P. CHADWICK, I. N. SNEDDON, *Plane waves in an elastic solid conducting heat*, «J. of Mech. Phys. of Solids», Vol. 6, 1958.
11. I. N. SNEDDON, *The propagation of thermal stresses in thin metallic rods*, «Proc. Roy. Soc. Edinburgh», Ser. A., Vol. 65, 1959.
12. J. IGNACZAK, *Note of the propagation of thermal stresses in a long metallic rod*, «Bull. Acad. Polon. Sci.», Ser. Sci. Techn., Vol. 7, 1959, n° 5.
13. F. J. LOCKETT, *Effect of thermal properties of a solid on the velocity of Rayleigh waves*, «J. Mech. Phys. of Solids», Vol. 7, 1958.
14. W. NOWACKI, M. SOKOŁOWSKI, *Propagation of thermoelastic waves in plates*, «Arch. Mech. Stos.», Vol. 9, 1959, n° 6.
15. F. J. LOCKETT, *Longitudinal elastic waves in cylinders and tubes-including thermoelastic effects*, «Proc. Edinbourgh Math. Soc.», Vol. 11, 1959, part 3.
16. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Transversal vibrations of a plate, produced by heating*, «Arch. Mech. Stos.», Vol. 13, 1961, n° 5.
17. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The plane dynamic problem of thermoelasticity*, «Proc. of Vibr. Probl.», Vol. 2, 1961, n° 4.
18. H. ZORSKI, *Singular solutions for thermoelastic media*, «Bull. Acad. Polon. Sci.», Ser. Techn., Vol. 6, 1958, n° 6.
19. G. EASON, I. N. SNEDDON, *The dynamic stresses produced in elastic bodies by uneven heating*, «Proc. Roy. Soc. Edinbourgh», Ser. A, Vol. 65, 1959.
20. F. J. LOCKETT, I. N. SNEDDON, *Propagation of thermal stresses in an infinite medium*, «Proc. of the Edinburgh Math. Soc. II», Vol. 4, 1959.
21. W. NOWACKI, *Some dynamic problems of thermoelasticity*, «Arch. Mech. Stos.», Vol. 11, 1959, n° 2.

22. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, London 1962.
23. H. LESSEN, *Thermoelasticity and thermal shock*, «J. Mech. Phys. of Solids», Vol. 5, 1956.
24. R. HETNARSKI, *Coupled one-dimensional thermal shock problem for small times*, «Arch. Mech. Stos.», Vol. 13, 1961, n° 2.
25. R. MUKI, S. BREUER, *Coupling effects in transient thermoelastic problem*, «Rep.,» 562 (25) 14, Brown University 1962.
26. В. И. ДАНИЛОВСКАЯ, Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. [Contraintes dans le demi-espace élastique dues à un échauffement subit de sa surface], «Прик. Мат. Мех.», Vol. 14, 1950, n° 3.
27. G. PARIA, *Coupling of elastic and thermal deformations*, «Indian Inst. of Techn.», Kharagpur, India 1959.
28. G. A. NARIBOLI, *Spherically symetric thermal shock in a medium with thermal and elastic deformations coupled*, «Quart. J. Mech. Appl. Math.», Vol. 14, 1961, n° 1.
29. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The Sommerfeld radiations conditions for coupled problems of thermoelasticity. Examples of coupled stresses and temperature concentration at cylindrical and spherical cavities*, «Arch. Mech. Stos.», Vol. 14, 1962, n° 1.
30. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*. [La théorie de l'élasticité], Vol. 2, Warszawa 1954.
31. A. ROSENBLATT, *Über das allgemeine thermoelastische Problem*, «Rend. del Circolo Math. di Palermo», Vol. 29, 1910.
32. H. S. CARLSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solid*, Oxford 1959.
33. F. J. F. NYE, *Physical properties of crystals*, Oxford 1957.
34. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, [Quelques problèmes aux limites de la théorie dynamique des corps élastiques et non élastiques], Warszawa 1957.
35. G. F. CARRIER, *The thermal-stress and body-force problems of the infinite orthotropic bodies*, «Quart. Appl. Math.», Vol. 5, 1948, n° 2.
36. W. NOWACKI, *Naprężenia cieplne w ciałach anizotropowych*, [Contraintes thermiques dans les corps anisotropes], «Arch. Mech. Stos.», Vol. 6, 1954, n° 2.
37. J. NOWIŃSKI, W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *O zagadnieniu termosprężystym w przypadku ośrodków o dowolnej ortotropii krzywoliniowej*, [On thermoelastic problems in the case of a body of an arbitrary type of curvelinear orthotropy], «Arch. Mech. Stos.», Vol. 7, 1955, n° 2.
38. W. OLSZAK, *Autocontraintes des milieux anisotropes*, «Bull. Acad. Pol. Sci. Lettr.», Cl. Sc. Math. PAU, Vol. 1, 1950.
39. B. SHARMA, *Thermal stresses in transversely isotropic semi-infinite elastic solids*, «J. Appl. Mech.», Vol. 25, 1958.
40. Z. MOSSAKOWSKA, W. NOWACKI, *Thermal stresses in transversely isotropic bodies*, «Arch. Mech. Stos.», Vol. 10, 1958, n° 4.
41. E. STERNBERG, E. L. MC DOWELL, *On the steady-state thermoelastic problem for the half-space*, «Quart. Appl. Math.», Vol. 14, 1957.
42. A. SINGH, *Axisymetrical thermal stresses in transverselly isotropic bodies*, «Arch. Mech. Stos.», Vol. 12, 1960.
43. W. H. PELL, *Thermal deffection of anisotropic thin plates*, «Quart. Appl. Mech.», Vol. 4, 1946.
44. J. MOSSAKOWSKI, *The state of stress and displacement in a thin anisotropic plate due to a concentrated source of heat*, «Arch. Mech. Stos.», Vol. 9, 1957, n° 5.

45. W. NOWACKI, *Ustalone naprężenia w walcu ortotropowym oraz w tarczy ortotropowej*, [Contraintes thermiques stationnaires dans un cylindre et un disque orthotropes], «Rozpr. Inż.», Vol. 8, 1960, n° 3.
46. P. P. TEODORESCU, *Probleme plane in teoria termo-elasticitătii*, [Problème plan de la thermoélasticité], «Bull. Stiint. Acad. R. P. R.» Sectia de Mat. si Fiz., Vol. 9, 1957.
47. P. DUBAS, *Calcul numérique des plaques et des parois minces*, Zurich 1955.
48. E. TREMMEL, *Über die Anwendung der Plattentheorie zur Bestimmung von Wärmespannungsfeldern*, «Österr. Ing. Arch.», Vol. 11, 1957.
49. Z. MOSSAKOWSKA, *One-dimensional dynamical problem for thermoelasticity for anisotropic medium*, «Arch. Mech. Stos.», Vol. 12, 1960, n° 1.
50. Z. MOSSAKOWSKA, *Dynamical problem for anisotropic semispace with discontinuous field temperature*, «Bull. Acad. Polon. Sci.», Sér. Sci. Techn., Vol. 9, 1961, n° 12.
51. E. MEISSNER, *Elastische Oberflächenwelle mit Dispersion in einem inhomogenen Medium*, «Vierth. Naturforsch. Gess.», Vol. 66, 1921.
52. K. ULLER, *Die Front- und Ruckengeschwindigkeit von Verzerrungswellen in festen, schweren Körpern*, «Gerlands Beitr. Geophys.», Vol. 15, 1926.
53. R. YOSIYAME, *Elastic waves from a point in a isotropic heterogeneous sphere*, «Bull. Earthquake Research Inst.», Tokyo, Vol. 11, 1933; Vol. 18, 1940; Vol. 19, 1941.
54. S. SOBOLEV, *Sur l'équation d'onde pour le cas d'un milieu hétérogène isotrope*, «Publi. Inst. Séism. Acad. Sci. URSS», Vol. 2, 1930.
55. S. SOBOLEV, *L'équation d'onde pour un milieux hétérogène*, «Publi. Inst. Séism. Acad. Sci. URSS», Vol. 6, 1930.
56. R. STONELEY, *The Transmission of Rayleigh waves in a hétérogeneous medium*, «Monthly Notices, Roy. Astron. Soc. Geophys.», Suppl. Vol. 3, 1934.
57. J. NOWIŃSKI, S. TURSKI, *Z teorii sprężystości ciał isotropowych niejednorodnych* [Quelques problèmes d'élasticité des corps isotropes non homogènes], «Arch. Mech. Stos.», Vol. 5, 1953, n° 1.
58. J. NOWIŃSKI, S. TURSKI, *Studium nad stanami naprężenia w ciałach sprężystych niejednorodnych*, [État de contrainte dans un corps élastique non homogène], «Arch. Mech. Stos.», Vol. 5, 1953, n° 3.
59. W. OLSZAK, (rédacteur), *Non-homogeneity in elasticity and plasticity*, London 1959.
60. H. H. HILTON, *Thermal stresses in bodies exhibiting temperature-dependent properties*, «J. Appl. Mech.», Vol. 19, 1952.
61. J. NOWIŃSKI, *Naprężenia cieplne w walcu grubościennym, którego materiał przejawia zmienne własności sprężyste*, [Contraintes thermiques dans un tube aux parois dont le matériel est doué de propriétés élastiques variantes], «Arch. Mech. Stos.», Vol. 5, 1953, n° 4.
62. R. TROSTEL, *Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperatur-abhängigen Werten*, «Ing. Arch.», Vol. 26, 1958.
63. R. TROSTEL, *Stationäre Wärmespannungen mit temperatur-abhängigen Werten*, «Ing. Arch.», Vol. 26, 1958.
64. S. A. ŠESTERIKOV, [Contraintes thermiques dans un disque élastique à épaisseur constante], «Изв. АН СССР. Мех. и Машиностроение», Vol. 5, 1959.
65. M. SOKOŁOWSKI, *One-dimensional thermoelastic problems for elastic bodies with material constants dependent on temperature*, «Bull. de l'Acad. Polon. Sci.», Sér. Sc. Techn., Vol. 8, 1960. n° 4.
66. J. NOWIŃSKI, *Thermoelastic problem for an isotropic sphere with temperature dependent properties*, «ZAMP», Vol. 10, 1959.

67. J. Nowiński, A. *Betti-Rayleigh theorem for elastic bodies exhibiting temperature dependent properties*, «Appl. Sci. Resch.», Ser. A, Vol. 9, 1960, n° 6.
68. E. Sternberg, *Non linear theory of elasticity with small deformations*, «J. Appl. Mech.», Vol. 13, 1946.
69. H. Kauderer, *Nichtlineare Elastität und Vermischtes*, dans: *Verformung und Fliessen des Festkörpers*, «IUTAM Colloqium Madrid 1955», Berlin 1956.
70. H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.
71. J. Nowiński, W. Olszak, *O podstawach teorii ciał sprężystych fizykalnie nieliniowych*, [Bases de la théorie des corps élastiques aux propriétés physiques non linéaires], «Arch. Mech. Stos.», Vol. 6, 1954, n° 1.
72. F. Jindra, *Wärmespannungen bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz*, «Ing. Arch.» Vol. 28, 1959.

TABLE DES MATIÈRES