ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
CENTRE SCIENTIFIQUE À PARIS

CONFÉRENCES FASCICULE 37

WITOLD NOWACKI

SUR CERTAINS PROBLÈMES DYNAMIQUES DE LA THERMOÉLASTICITÉ

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

CONFÉRENCE FAITE À L'INSTITUT POINCARÉ,
FACULTÉ DES SCIENCES À L'UNIVERSITÉ DE
PARIS, PAR WITOLD NOWACKI, PROFESSEUR
À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE
le 11 Juin 1962

Introduction

Pendant les dernières années, nous assistons à un développement imposant de la science de thermoélasticité. Ce développement est dû aux demandes que présente la technique à la science. Il est stimulé par l'essor que prend l'aérotechnique, et par le développement réalisé dans le domaine de la construction des machines, de la technologie chimique et nucléaire.

C'est surtout la théorie classique des contraintes thermiques qui a été développée au cours de la première décade après la deuxième guerre mondiale, et, plus particulièrement, les problèmes des parcours thermiques non stationnaires. La théorie des contraintes thermiques base sur les énoncés fondamentaux de la théorie classique d'élasticité et sur la présomption de l'indépendance du champ de température de celui de déformation.

Tout dernièrement l'importance toute particulière des problèmes du couplage du champ de température avec celui de déformation a été généralement reconnu. Ce sera donc ce complexe de problèmes auquel nous allons consacrer le présent rapport.

Couplage du champ de température et de celui de déformation

Dans un solide, le champ de température est lié au champ de déformation. La variation de quantité de chaleur provoque un état de déformation et de contrainte. Inversement, le champ de déformation dû aux facteurs mécaniques provoque la formation d'un champ de température dans le corps. Une partie de l'énergie mécanique due à la déformation du corps se transforme en énergie thermique.

Le couplage du champ de température avec celui de déformation nous permet de traiter les problèmes élastocinétiques d'une manière plus précise, de déterminer le champ de température formé sous l'influence des charges qui varient dans le temps, de prendre par exemple en considération l'influence du champ de température sur la vitesse de propagation des ondes élastiques. Enfin, le couplage des champs nous conduit au phénomène connu de la dissipation thermoélastique dans un corps élastique.

Le couplage des champs de température et de déformation a été postulé par J. Duhamel [1]; l'équation élargie de la conductibilité thermique fut introduite par

W. Voigt [2] et H. Jeffreys [3]. On trouvera un exposé général et détaillé concernant cette équation dans les travaux de M. A. Biot [4], P. Chadwick [5] et K. Zoller [6]; un exposé sur la théorie de l'unicité des solutions se trouve dans le travail de J. H. Weiner [7].

L'équation linéaire de la conductibilité thermique (en admettant toutefois que l'accroissement de la température par rapport à l'état naturel du corps est petit) revêt la forme suivante

$$\Theta_{,kk}-\frac{1}{\varkappa}\dot{\Theta}-\eta\dot{u}_{k,k}=\frac{Q}{\varkappa}. \tag{1.1}$$

L'expression $T=T_0+\Theta$ désigne ici la température absolue, l'état $T=T_0(\Theta=0)$ étant défini comme état initial, où les contraintes aussi bien que les déformations dans le corps n'existent pas. Ensuite $\varkappa=\lambda'/c\varrho$, où λ' désigne le coefficient de la conductibilité thermique, c — la chaleur spécifique et ϱ — la densité. Dans l'expression (1.1) nous avons: $Q=W/\varrho c$, où W désigne la quantité de chaleur suscitée dans un élémentunité de volume pendant une unité de temps. Nous avons, en outre, $\eta=\gamma T_0/\lambda'$ où $\gamma=(3\lambda+2\mu)a_t=3Ka_t$. K désigne ici le coefficient de compressibilité, tandis que a_t — le coefficient de la dilatation thermique. Et, pour terminer, λ,μ — sont les constantes de Lamé, $u_{k,k}=\varepsilon_{kk}$ désigne la dilatation, $\dot{\Theta}=\partial_t\Theta$, $\dot{u}_{k,k}=\partial_t u_{k,k}$, ∂_t étant égal à $\partial/\partial t$.

L'équation de la conductibilité thermique (1.1) peut être déduite des bases de la thermodynamique des processus irreversibles; nous obtenons pour l'énergie interne U, et l'entropie S, les formules suivantes

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}+\frac{\gamma}{2}\varepsilon_{kk}(\Theta+2T_0)+c_\varepsilon\Theta, \tag{1.2}$$

$$S=\gamma\varepsilon_{kk}+c_\varepsilon\ln\left(1+\frac{\Theta}{T_0}\right), \tag{1.3}$$

Dans ces relations les symboles U, S, c_ε se rapportent à l'unité de volume, c_ε désignant la chaleur spécifique à l'état de déformation constante. Entre les composantes de l'état de contrainte, σ_{ij}, de celui de déformation ε_{ij} et de l'accroissement de température, $\Theta=T-T_0$, existent (pour $\left|\frac{\Theta}{T_0}\right|\ll 1$) les relations linéaires suivantes (relations Duhamel-Neumann):

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+(\lambda\varepsilon_{kk}-\gamma\Theta)\delta_{ij}. \tag{1.4}$$

Dans la formule (1.2) pour l'énergie interne, le premier terme à droite désigne l'énergie de déformation, le dernier — la quantité de chaleur dans l'unité de volume; le terme central provient de l'influence réciproque de la déformation et de la conductibilité thermique. Quant à l'équation (1.3), le premier terme à droite c'est le couplage du champ de température avec celui de déformation; le deuxième désigne l'accroissement de l'entropie dû à la conductibilité thermique. Dans l'équation (1.3) le terme purement élastique fait défaut, vu que le processus élastique — à l'encontre du processus thermique — est un processus reversible, donc, il n'engendre pas des changements de l'entropie. Les coefficients d'élasticité (μ, λ, γ) qui apparaissent dans les équations (1.1)—(1.4) se rapportent à l'état isothermique.

En écrivant (pour $\left|\frac{\Theta}{T_0}\right| \ll 1$) la relation (1.3) sous forme

$$S = \gamma\varepsilon_{kk} + c_\varepsilon \frac{\Theta}{T_0}, \tag{1.5}$$

et en établissant la connexion de (1.6) avec l'accroissement de l'entropie dû au processus irreversible de la conductibilité thermique.

$$T\dot{S} = \lambda' T,_{kk} + W \tag{1.6}$$

nous obtenons l'équation de conductibilité thermique (1.1) supplémentée par rapport à l'équation classique de la conductibilité thermique par le terme $-\eta\dot{u}_{k,k}$.

Nous allons maintenant associer aux équations (1.1) les équations de déplacement de la théorie d'élasticité

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda+\mu)u_{k,ki} + F_i - \gamma\Theta,_i = \varrho\ddot{u}_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.7}$$

Ainsi, le système d'équations de la thermoélasticité est complet.

Dans les équations (1.7) $\vec{u}$ désigne le vecteur de déplacement, $\vec{F}$ — celui des forces massiques.

Nous écrirons maintenant les équations (1.1) et (1.7) sous une forme vectorielle, à savoir:

$$\nabla^2\Theta - \frac{1}{\varkappa}\dot{\Theta} - \eta\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{u}} = -Q/\varkappa, \tag{1.8}$$

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \vec{F} - \gamma\,\mathrm{grad}\,\Theta = \varrho\ddot{\vec{u}}. \tag{1.9}$$

En décomposant les vecteurs de déplacement et de la force massique en deux parties: potentielle et rotative

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\,\Phi + \mathrm{rot}\,\vec{\psi}, \tag{1.10}$$

$$\vec{F} = \varrho(\mathrm{grad}\,\vartheta + \mathrm{rot}\,\vec{\chi}) \tag{1.11}$$

nous obtenons le système d'équations que voici

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\Theta - \eta\nabla^2\dot{\Phi} = -Q/\varkappa, \tag{1.12}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)\Phi = m\Theta-\frac{1}{c_1^2}\vartheta, \tag{1.13}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c_2^2}\partial_t^2\right)\vec{\psi} = -\frac{1}{c_2^2}\vec{\chi}. \tag{1.14}$$

Éliminant la température Θ nous obtenons les équations

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\left(\nabla^2-\frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)\Phi-m\eta\nabla^2\dot{\Phi} = -\frac{mQ}{\varkappa}-\frac{1}{c_1^2}\left(\nabla^2-\frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\vartheta, \tag{1.15}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c_2^2}\partial_t^2\right)\vec{\psi} = -\frac{1}{c_2^2}\vec{\chi}, \qquad m = \gamma/2\mu+\lambda. \tag{1.16}$$

Dans les équations ci-dessus: $c_1^2 = \dfrac{\lambda+2\mu}{\varrho}$, $c_2^2 = \dfrac{\mu}{\varrho}$, c_1 représente la vitesse de propagation de l'onde de l'élastique longitudinale et c_2 — celle de l'onde transversale.

L'équation (1.15) représente l'onde longitudinale, tandis que l'équation (1.16) — l'onde transversale.

Nous allons considérer tout d'abord la propagation des ondes dans un milieu illimité. Nous admettons l'activité des sources de chaleur, les forces massiques n'étant fournies que par la partie potentielle ($\vec{\chi} = 0$). Pour ce cas particulier, on a $\vec{\psi} \equiv 0$ dans tout le milieu; dans un espace illimité on aura que des ondes longitudinales, définies par l'équation (1.15) et couplées avec le potential Φ.

Après avoir déterminé l'intégrale particulière de l'équation (1.15) on peut déterminer les déplacements et les déformations selon les formules

$$u_i = \Phi_{,i} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) = \Phi_{,ij}. \tag{1.17}$$

La fonction Φ étant connue, nous déterminons le champ de température Θ selon la formule (1.13). Les contraintes peuvent être obtenues en introduisant (1.17) dans les relations (1.4) et, profitant de l'équation (1.13), nous obtiendrons

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\Phi_{,ij}-\delta_{ij}\Phi_{,kk})+\varrho\delta_{ij}(\ddot{\Phi}-\vartheta). \tag{1.18}$$

Remarquons, que le côté droit de l'équation (1.15) contient les causes déterminant la formation des ondes longitudinales, à savoir, la source de chaleur et la partie potentielle des forces massiques. Nous pouvons constater que l'action des forces massiques $F_i = \varrho$ grad ϑ donne l'effet analogique à celui de l'action de la source de chaleur. Les ondes longitudinales — nous aurons l'occasion d'en reparler plus tard — subissent atténuation et dispersion.

Si, dans un espace illimité les sources de chaleur n'existent pas ($Q = 0$, si, encore, $\vartheta = 0$ et $\vec{F} = \varrho\,\mathrm{rot}\,\vec{\chi}$, nous n'aurons affaire qu'aux ondes transversales, décrites par l'équation (1.16); la vitesse de prepagation de ces ondes non attenuées, ne donnant aucun changement de température ($\Theta \equiv 0$) sera c_2.

Dans un corps limité on aura, en principe, les ondes longitudinales et transversales en même temps. Dans ce cas la solution des équations (1.12)—(1.14) sera répartie entre deux étapes: les intégrales particulières $\Phi', \vec{\psi}', \Theta'$ des équations non homogènes (1.12)—(1.14) et les fonctions $\Phi'', \vec{\psi}'', \Theta''$, des solutions générales du système homogène d'équations

$$(1.19) \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\Theta'' - \eta\nabla^2\dot{\Phi}'' = 0,$$

$$(1.20) \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)\Phi'' = m\Theta'',$$

$$(1.21) \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\partial_t^2\right)\vec{\psi}'' = 0.$$

Dans le cas, où les changements de température et des forces massiques prennent dans le temps une allure ralentie, nous pouvons négliger les termes inertiaux dans les équations (1.7) et considérer le problème comme quasi statique.

Dans le cas d'un corps illimité, en déterminant que $u_i = \Phi,_i$, les équations (1.1) et (1.7) peuvent être réduites au système de deux équations:

$$(1.22) \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\Theta - \eta\nabla^2\dot{\Phi} = -Q/\varkappa,$$

$$(1.23) \qquad \nabla^2\Phi = m\Theta.$$

Éliminant la fonction Φ des équations ci-dessus nous obtenons

$$(1.24) \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa_1}\partial_t\right)\Theta = -Q/\varkappa, \qquad \frac{1}{\varkappa_1} = \frac{1}{\varkappa}(1+\varepsilon), \qquad \varepsilon = \eta m\varkappa.$$

L'équation de conductibilité thermique revêt ici la même forme [8] que l'équation classique de Fourier.

Remarquons encore que pour un problème stationnaire l'équation (1.1) devient l'équation du type Poisson: les champs de température et de déformation ne sont pas couplés.

$$(1.25) \qquad \nabla^2\Theta = -Q/\varkappa.$$

En prenant en considération les équations (1.1) et (1.7), nous pouvons constater que les charges, changeant dans le temps, sont toujours accompagnées d'une variation du champ de température. Une description approximative — mais suffisamment exacte du point de vue des applications pratiques — de la déformation accompagnant les charges, nous est fournie par la méthode élastocinétique classique. Dans cette théorie approximative, on profite du fait que l'échange de chaleur entre deux parties d'un corps a lieu — pendant le processus des oscillations et d'une allure notablement ralentie. Si, pendant les intervalles de temps, d'ordre correspondant à la période du mouvement oscillant dans un corps, l'échange de chaleur est nul, nous sommes autorisés à considérer chaque partie de ce corps comme étant isolée au point de vue thermique, donc nous pouvons considérer le processus comme adiabatique. C'est pourquoi, dans les formules dans lesquelles nous lions le tenseur de la déformation avec celui de la contrainte, nous pouvons considérer les symboles μ_s et λ_s comme valeurs adiabatiques

$$\sigma_{ij} = 2\mu_s \varepsilon_{ij} + \lambda_s \varepsilon_{kk} \delta_{ij}. \tag{1.26}$$

En introduisant les contraintes dans les équations du mouvement et en exprimant les déformations par des déplacements, nous obtenons l'équation de la théorie élastocinétique classique

$$\mu_s u_{i,kk} + (\lambda_s + \mu_s) u_{k,ki} + F_i = \varrho \ddot{u}_i. \tag{1.27}$$

Les équations (1.27) peuvent être aussi obtenues à l'aide des équations de thermoélasticité, en déterminant l'existence du processus adiabatique. Vu que dans un processus adiabatique $\dot{S} = 0$ on a $S = \text{const}$. Nous avons alors, en vertu de (1.6) (W étant égal à 0), $\Theta,_{kk} = 0$ et, en vertu de (1.8): $\dot{\Theta} = \varkappa\eta\dot{\varepsilon}_{kk}$. En intégrant la dernière équation par rapport au temps et en prenant en considération que pour $t = 0$ (c'est-à-dire à l'état naturel) $\Theta = 0$, tandis que ε_{kk} disparaît, on obtient

$$\Theta = \varkappa\eta\varepsilon_{kk}. \tag{1.28}$$

En introduisant cette équation dans (1.7) et en faisant usage des relations entre les coefficients d'élasticité adiabatiques et isothermiques [5], nous obtenons

$$\lambda_s + 2\mu_s = \lambda_T + 2\mu_T + \varkappa\eta\gamma_T, \qquad \mu_s = \mu_T. \tag{1.29}$$

Nous allons considérer maintenant les oscillations suscitées dans un corps par l'échauffement ou par le refroidissement de ce corps ou bien par l'action des sources de chaleur, en déterminant que les charges extérieures et les forces massiques n'existent pas.

La méthode la plus simple de déterminer (approximativement) les oscillations élastiques, dues à l'action des facteurs que nous venons de nommer, sera de prendre pour point de départ l'équation de la conductibilité thermique, non couplée avec la déformation du corps

$$\Theta,_{kk} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\Theta} = -\frac{Q}{\varkappa} \tag{1.30}$$

et aussi les relations de Duhamel-Neumann

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\Theta)\delta_{ij}. \tag{1.31}$$

En introduisant la formule (1.31) dans les équations du mouvement nous obtenons les équations du déplacement

(1.32) $$\mu u_{i,kk}+(\lambda+\mu)u_{k,ki} = \gamma\Theta_{,i}+\varrho\ddot{u}_i.$$

Les coefficients d'élastivité μ, λ, qui apparaissent dans l'équation (1.32) sont adiabatiques.

Dans cette théorie dynamique des contraintes thermiques, nous avons les équations (1.30) et (1.32), non couplées. L'équation (1.30) nous permet de déterminer la température Θ qui, par conséquent, peut être considérée comme une grandeur connue dans l'équation (1.32). Dans cette dernière équation le terme $\gamma\Theta_{,i}$ joue un rôle analogique à l'action des forces massiques.

Les déplacements peuvent être déterminés selon les équations (1.32) à l'aide de la méthode classique de l'élastocinétique.

Est-il possible d'exécuter une transition des équations de thermoélasticité (1.1)—(1.7) aux équations non couplées de la théorie des contraintes thermiques? En juxtaposant les équations (1.1) et (1.30), on voit aisément qu'une telle transition est possible, à condition que l'on pose $\eta = 0$. Vu que $\eta = 3\alpha_t K_T T_0/\lambda'$, il faut poser $\alpha_t = 0$. D'autre part, le terme $\gamma\Theta_{,i}$ disparaît de l'équation (1.7), vu que $\gamma = 3K_T\alpha_t = 0$, pour $\alpha_t = 0$. En posant $\eta = 0$, on est amené à supposer un état imaginaire et physiquement irréalisable où la dilatation thermique disparaît et les coefficients d'élasticité sont isothermiques.

C'est pourquoi la transition des équations de thermoélasticité aux équations non couplées (1.30)—(1.32) de la théorie des contraintes thermiques revêt un caractère purement formel. Dans les solutions des équations de thermoélasticité nous posons $\eta = 0$ et en substituant à μ_s, λ_s nous obtenons les solutions des équations non couplées (1.30), (1.32).

Dans le domaine de thermoélasticité on n'a résolu jusqu'ici qu'un nombre tout à fait restreint de problèmes aussi bien plans que spatiaux. Ceci est dû aux grandes difficultés d'ordre mathématique du problème.

C'est ainsi que H. Deresiewicz [9] et plus tard P. Chadwick et I. N. Sneddon [10] ont considéré le problème de propagation des ondes harmoniques planes dans l'espace illimité. C'est encore Sneddon [11] qui a considéré le problème de propagation des contraintes thermoélastiques dans les barres métalliques, contraintes dues à l'excitation thermique ou bien mécanique.

Le problème de propagation des ondes de surface de Rayleigh — en admettant un libre échange de chaleur dans le plan limitant le demi-espace thermoélastique — a été étudié par F. J. Lockett [12]; le problème de propagation des ondes thermoélastiques dans une couche thermoélastique—par W. Nowacki et M. Sokołowski [13].

L'action des sources de chaleur dans l'espace illimité fut l'objet de nombreux travaux. H. Zorski p. ex. [14] a étudié le problème des contraintes dues à l'action de la source instantanée concentrée de chaleur, G. Eason et I. N. Sneddon [15], ainsi que F. J. Lockett et I. N. Sneddon [16], et W. Nowacki [17], ont donné une solution générale du problème de propagation des contraintes en posant une distribution arbitraire des sources de chaleur aussi bien dans l'espace que dans le temps. W. Nowacki [17] a donné une solution du problème élargi de Lamé pour un milieu thermoélastique pour les forces mécaniques et pour l'échauffement variant d'une façon harmonique dans le temps. Il faudrait ajouter que les résultats d'ordre général n'ont, dans une grande mesure, qu'un caractère formel; il a été impossible — même pour les cas les plus simples — d'obtenir des résultats sous forme fermée à l'aide de fonctions connues; les résultats ont été présentés pour la plupart de cas sous forme d'intégrales impropres.

Notons aussi quelques travaux concernant la solution approximative du problème d'un demi-espace thermoélastique. H. Lessen [18] et R. Hetnarski [19], ainsi que R. Muki et S. Breuer [20], ont donné une solution du problème de V. I. Danilovskaya [21] pour les valeurs petites du temps t, élargi sur le milieu thermoélastique. Une solution intéressante a été donnée par G. Paria [22]. Cette solution concerne le cas de l'échauffement du plan limitant le demi-espace élastique à la température $\Theta(r, o)H(t)$, où $H(t)$ désigne la fonction de Heaviside. La solution de Paria est valable pour le problème caractérisé par la symétrie axiale pour les petites valeurs du temps t.

G. A. Nariboli [23] a présenté une solution analogique, valable pour les valeurs petites du temps t et concernant le cas de l'espace thermoélastique dans le vide. Le bord du vide est échauffé à la température $\Theta_0 H(t)$.

Le problème caractérisé par la symétrie axiale en rapport à la concentration des contraintes dues au flux plan de chaleur (le flux varie dans le temps d'une façon harmonique) autour du vide cylindrique ou sphérique a été considéré dans le travail de J. Ignaczak et W. Nowacki [24], J. Ignaczak et W. Nowacki [25] ont étudié les oscillations des contraintes harmoniques des cylindres aux sections rectangulaires provoquées par leur échauffement, ainsi que le problème des oscillations des contraintes de plaques d'épaisseur moyenne [26].

Ci-dessous nous donnons quelques solutions sous forme fermée, obtenues pour l'action des sources de chaleur et des charges dans l'espace illimité ainsi que le problème élargi de Lamb.

Contraintes dues à l'action des sources de chaleur et des centres de compression dans un espace illimité

Nous allons considérer à tour de rôle les sources de chaleur ponctuelles, linéaires et planes variant d'une façon harmonique dans le temps. Nous posons donc que $Q(P, t) = e^{i\omega t} Q^*(P)$ où ω désigne la fréquence des oscillations de la source de chaleur, ω étant une magnitude réelle et positive.

Étant donné que les sources de chaleur dans l'espace illimité ne provoquent que la formation des ondes longitudinales, il nous suffira — pour déterminer les contraintes — de faire profit de l'équation (1.15).

En introduisant dans (1.15) les relations suivantes

$$Q(P,t)=e^{i\omega t}Q^*(P),\qquad \Phi(P,t)=e^{i\omega t}\Phi^*(P),\qquad \Theta(P,t)=e^{i\omega t}\Theta^*(P), \tag{2.1}$$

on obtient l'équation

$$(\nabla^2-k_1^2)(\nabla^2-k_2^2)\Phi^*=-\frac{m}{\varkappa}Q^*, \tag{2.2}$$

où

$$k_1^2+k_2^2=q(1+\varepsilon)-\sigma^2,\qquad k_1^2k_2^2=-q\sigma^2,$$
$$q=i\omega/\varkappa,\qquad \sigma^2=\omega^2/c_1^2,\qquad \varepsilon=\eta m\varkappa.$$

Ici les grandeurs $\pm k_1^2$, $\pm k_2^2$ sont les racines de l'équation

$$k^4-k^2[q(1+\varepsilon)-\sigma^2]-\sigma^2q=0.$$

La fonction Φ^* étant connue, nous pouvons déterminer l'amplitude Θ^* grâce à la relation

$$\Theta^*=\frac{1}{m}(\nabla^2+\sigma^2)\Phi^*. \tag{2.3}$$

Posons qu'une source concentrée de chaleur, à l'intensité Q_0 agisse à l'origine du système des coordonnées. Nous aurons alors $\Theta^*(P)=Q_0\delta(R)$. La solution de l'équation (2.2) peut être présentée sous forme d'intégrale de Fourier-Henkel, notamment

$$\Phi^*=-\frac{Q_0m}{2\pi^2\varkappa}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{aJ_0(ar)\cos\gamma z}{F(a,\gamma)}\,da\,d\gamma, \tag{2.4}$$

où

$$F(a,\gamma)=(a^2+\gamma^2+k_1^2)(a^2+\gamma^2+k_2^2).$$

Après les intégrations nécessaires, nous obtenons la fonction Φ^* sous forme fermée

$$\Phi^*=\frac{Q_0m}{4\pi\varkappa(k_1^2-k_2^2)}(e^{-k_1R}-e^{-k_2R}),$$

$$R=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2},\qquad k_{1,2}=a_{1,2}+ib_{1,2},\qquad a_{1,2}>0. \tag{2.5}$$

Nous avons obtenu les ondes sphériques longitudinales. La relation (2.3) nous permet d'obtenir

$$\Theta^*=\frac{Q_0}{4\pi\varkappa R(k_1^2-k_2^2)}[(\sigma^2+k_1^2)e^{-k_1R}-(\sigma^2+k_2^2)e^{-k_2R}]. \tag{2.6}$$

Si la source de chaleur est transférée de l'origine du système des coordonnées au point (ξ) et si l'on détermine que $Q_0 = 1$, alors les fonctions $\Phi^*(x, \xi)$ et $\Theta^*(x, \xi)$ seront les fonctions de Green pour potential Φ^* et le champ de température Θ^* dans l'espace illimité. Les contraintes liées au champ de température Θ peuvent ètre exprimées à l'aide des formules suivantes

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left[\Phi_{,ij} - \delta_{ij}\left(\Phi_{,kk} - \frac{1}{2c_2^2}\ddot{\Phi}\right)\right]. \tag{2.7}$$

Si l'on néglige l'influence du couplage du champ de température et de celui des déformations ($\varepsilon = 0$, $k_1 = \sqrt{q}$, $k_2 = i\sigma$), on obtient selon les formules (2.5)

$$\Phi^* = \frac{Q_0 m}{4\pi R\varkappa(\sigma^2+q)}\left(e^{-R\sqrt{q}} - e^{-i\sigma R}\right), \tag{2.8}$$

$$\Theta^* = \frac{Q_0}{4\pi\varkappa R} e^{-R\sqrt{q}}. \tag{2.9}$$

Passons maintenant au problème caractérisé par la symétrie axiale, le champ de température et des déformations provoqué par la source linéaire de chaleur étant $Q(P, t) = q_0 \dfrac{\delta(r)}{2\pi r} e^{i\omega t}$.

La solution de l'équation (2.2) peut être présentée par l'intégrale

$$\Phi^* = -\frac{q_0 m}{2\pi\varkappa}\int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha}{F(\alpha)}, \tag{2.10}$$

où

$$F(\alpha) = (\alpha^2 + k_1^2)(\alpha^2 + k_2^2),$$

ou bien

$$\Phi^* = \frac{q_0 m}{2\pi\varkappa(k_1^2 - k_2^2)}\left[K_0(k_1 r) - K_0(k_2 r)\right]. \tag{2.11}$$

On peut vérifier sans peine que

$$\Theta^* = \frac{q_0}{2\pi\varkappa(k_1^2 - k_2^2)}\left[(\sigma^2 + k_1^2)K_0(k_1 r) - (\sigma^2 + k_2^2)K_0(k_2 r)\right]. \tag{2.12}$$

Dans les formules ci-dessus $K_0(z)$ est la fonction de Bessel modifiée, de troisième genre.

Les contraintes sont données par les formules suivantes

$$\sigma_{rr} = -2\mu e^{i\omega t}\left(\frac{1}{r}\frac{d\Phi^*}{dr} + \frac{\tau^2}{2}\Phi^*\right), \qquad \tau^2 = \omega^2/c_2^2,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2\mu e^{i\omega t}\left(\frac{d^2\Phi^*}{dr^2} + \frac{\tau^2}{2}\Phi^*\right). \tag{2.13}$$

Dans le cas où l'on néglige le couplage, nous obtenons de (2.11) et (2.12) les formules simples que voici:

$$\Phi^* = \frac{q_0 m}{2\pi\varkappa(\sigma^2+q)}[K_0(r\sqrt{q})-K_0(i\sigma r)], \tag{2.14}$$

$$\Theta^* = \frac{q_0}{2\pi\varkappa}K_0(r\sqrt{q}). \tag{2.15}$$

Posons encore qu'une source plane de chaleur agit, $Q(P,t)=q_0\delta(x_1)e^{i\omega t}$ dans le plan $x_1=0$. En résolvant l'équation (2.1) nous obtenons

$$\Phi^* = \frac{q_0 m}{2\varkappa(k_1^2-k_2^2)}\left[\frac{e^{-k_1x_1}}{k_1}-\frac{e^{-k_2x_1}}{k_2}\right], \tag{2.16}$$

$$\Theta^* = \frac{q_0}{2\varkappa(k_1^2-k_2^2)}\left[(\sigma^2+k_1^2)\frac{e^{-k_1x_1}}{k_1}-(\sigma^2+k_2^2)\frac{e^{-k_2x_1}}{k_2}\right], \qquad x_1>0. \tag{2.17}$$

Les contraintes provoquées par l'action d'une source plane de chaleur sont données par les formules

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\mu\tau^2\Phi^*e^{i\omega t},\\ \sigma_{22}=\sigma_{33} &= -2\mu\left(\frac{d^2\Phi^*}{dx_1^2}+\frac{\tau^2}{2}\Phi^*\right)e^{i\omega t}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Si l'on néglige l'influence du couplage des champs de température et des déformations, on peut écrire les équations (2.16) et (2.17) sous la simple forme que voici:

$$\Phi^* = \frac{q_0 m}{2\varkappa(q+\sigma^2)}\left(\frac{e^{-x_1\sqrt{q}}}{\sqrt{q}}-\frac{e^{-i\sigma x_1}}{i\sigma}\right), \tag{2.19}$$

$$\Theta^* = \frac{q_0}{2\varkappa\sqrt{q}}e^{-x_1\sqrt{q}}, \qquad x_1>0, \tag{2.20}$$

Des expressions analogiquement simples peuvent être obtenues pour le cas de l'action d'un centre de compression dans l'espace illimité. Posons que le centre de compression (à intensité unitaire) agit à l'origine du système des coordonnées. Mettons que les forces se comportent comme si elles étaient des forces doubles agissant le long de l'axe x_1, x_2, x_3. Les équations de déplacement présentent alors la forme suivante

$$\mu u_{i,kk}+(\lambda+\mu)u_{k,ki}+[\delta(x_r)]_{,i} = \varrho\ddot{u}_i+\gamma\Theta_{,i}, \tag{2.21}$$

où
$$\delta(x_r) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3).$$

En introduisant $u_i=e^{i\omega t}\Phi^*_{,i}$, on peut simplifier le système d'équations (2.21) à la forme

$$(\nabla^2+\sigma^2)\Phi^* = m\Theta^*-\frac{1}{\beta}\delta(x_r), \qquad \beta=\lambda+2\mu. \tag{2.22}$$

Nous devons y joindre l'équation de conductibilité

$$(\nabla^2-q)\Theta^*-q\eta'\nabla^2\Phi^*=0, \qquad \eta'=\eta\varkappa. \tag{2.23}$$

En résolvant les équations (2.22) et (2.23), nous obtenons pour le centre-point de compression

$$\Phi^*=\frac{1}{4\pi\beta R(k_1^2-k_2^2)}[(k_1^2-q)e^{-k_1R}-(k_2^2-q)e^{-k_2R}], \tag{2.24}$$

$$\Theta^*=\frac{\eta' q}{4\pi\beta R(k_1^2-k_2^2)}[k_1^2e^{-k_1R}-k_2^2e^{-k_2R}]. \tag{2.25}$$

D'après la dernière équation, il est évident qu'à l'origine du système des coordonées existe une singularité, de même que dans le cas d'une action de la source concentrée ponctuelle de chaleur.

Si l'on néglige le couplage du champ de température et de celui des déformations, on obtient une formule connue de la théorie de propagation des ondes elastiques

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\beta R}e^{i\omega\left(t-\frac{R}{c_1}\right)}, \qquad \Theta=0, \tag{2.26}$$

en admettant que la propagation des ondes n'est pas accompagnée de contraintes thermiques associées.

Nous obtenons des solutions également simples, sous forme fermée, pour le centre linéaire et le plan de copmpression.

Une solution exacte peut être aussi obtenue pour le cas d'un vide sphérique dans l'espace illimité caractérisé par la symétrie sphérique du champ des contraintes et pour le cas d'un vide cylindrique jouissant de la symétrie circulaire du champ de température.

Nous avons dans le premier cas:

$$\Phi^*=\frac{1}{R}[Ae^{-k_1R}+Be^{-k_2R}], \tag{2.27}$$

$$\Theta^*=\frac{1}{m}(\nabla_R^2+\sigma^2)\Phi^*, \qquad \nabla_R^2=\frac{d^2}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{d}{dR}, \tag{2.28}$$

tandis que dans le second il y a

$$\Phi^*=AK_0(k_1r)+BK_0(k_2r), \tag{2.29}$$

$$\Theta^*=\frac{1}{m}(\nabla_r^2+\sigma^2)\Phi^*, \qquad \nabla_r^2=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}. \tag{2.30}$$

Les constantes A et B peuvent être déterminées d'après deux conditions aux limites dont l'une se rapporte à la contrainte ou au déplacement, tandis que l'autre à la température au bord du vide.

Nous allons considérer maintenant d'une facon un peu plus approfondie une onde plane provoquée par l'action d'une source plane de chaleur. Les fonctions Φ^* et Θ^* sont données par les formules (2.16) et (2.17).

Étant donné que k_1, k_2 sont des racines conjugées, les valeurs $u_1 = \Phi_{,1}$ et Θ peuvent être présentées sous forme suivante

$$(2.31) \qquad \begin{aligned} u_1 = \frac{q_0 m}{2\varkappa(k_1^2-k_2^2)} \Bigg[\exp\left[i\omega\left(t - \frac{x_1}{v_2}\right)\right] \exp(-\vartheta_2 x_1) - \\ - \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x_1}{v_1}\right)\right] \exp(-\vartheta_1 x_1) \Bigg], \end{aligned}$$

$$(2.32) \qquad \begin{aligned} \Theta = \frac{q_0}{2\varkappa(k_1^2-k_2^2)} \Bigg[\frac{\sigma^2+k_1^2}{k_1^2} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x_1}{v_1}\right)\right] \exp(-\vartheta_1 x_1) - \\ - \frac{\sigma^2+k_2^2}{k_2^2} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x_1}{v_2}\right)\right] \exp(-\vartheta_2 x_1) \Bigg]. \end{aligned}$$

Dans les formules ci-dessus le symbole $v_\beta(\beta = 1, 2)$ désigne la vitesse de phase (grandeur réelle et positive) d'une onde plane. Notons que

$$(2.33) \qquad v_\beta = \omega/\mathrm{Im}(k_\beta), \qquad \beta = 1, 2$$

et que $\vartheta_\beta(\beta = 1,2)$ sont les coefficients d'atténuation, données par les formules

$$(2.34) \qquad \vartheta_\beta = \mathrm{Re}(k_\beta), \qquad \beta = 1,2.$$

Considérons tout d'abord le cas particulier d'une onde plane, en posant $\varepsilon = 0$. Ceci nous permettra de définir laquelle des racines $k_{1,2}$ est propre à l'onde atténuée et laquelle — à l'onde élastique. Pour $\varepsilon = 0$, on a $k_1 = \sqrt{q'} = (1+i)\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}$, $k_2 = i\omega/c_1$. D'après les formules (2.33) et (2.34), on obtient

$$(2.35) \qquad \begin{aligned} v_1 &= (2\varkappa\omega)^{1/2}, \qquad & \vartheta_1 &= \left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}, \\ v_2 &= c_1, & \vartheta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Étant donné que $\sigma^2+k_2^2 = 0$, le second terme dans l'équation (2.32) disparaît et nous obtenons l'équation (2.20) que nous écrivons sous la forme

$$(2.36) \qquad \Theta = \frac{q_0}{2\varkappa\sqrt{q}} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x_1}{v_1}\right)\right] \exp(-\vartheta_1 x_1), \qquad x_1 > 0$$

On voit que la racine k_1 — donc les valeurs v_1, ϑ_1 aussi, sont liées à l'onde thermique. Cette onde subit atténuation et dispersion, vu que la vitesse de phase $v_1 = (2\varkappa\omega)^{1/2}$ est la fonction de la fréquence.

L'onde élastique ($\varepsilon = 0$) prend la forme que voici:

$$u_1 = \frac{q_0 m}{2\varkappa(q+\sigma^2)}\left[\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x_1}{v_2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x_1}{v_1}\right)\right]\exp(-\vartheta_1 x_1)\right], \qquad x_1 > 0. \tag{2.37}$$

Nous donnerons quelques explications concernant les deux termes (à droite) de la formule (2.37). Le premier correspond à une onde purement élastique, non atténuée, ne subissant pas de dispersion, à la vitesse de phase constante $v_2 = c_2$. Le second terme reflêt les perturbations thermiques; il est atténué et subit la dispersion. Il est évident que, dans le problème non couplé, la racine k_2 ainsi que les valeurs v_2, ϑ_2 sont liées à l'onde purement élastique.

Dans le problème thermoélastique, k_1, k_2 sont des racines de l'équation

$$k^4 - k^2[q(1+\varepsilon)-\sigma^2] - q\sigma^2 = 0, \tag{2.38}$$

étant donné que $k_{1,2}^2 = \dfrac{c_1^2\beta}{2\varkappa}\left[i(1+\varepsilon)-\beta\pm\sqrt{\beta^2-(1+\varepsilon)^2+2i\beta(1-\varepsilon)}\right]$.

où $\beta = \omega/\omega^*$ désigne une grandeur sans dimensions et $\omega^* = c_1^2/\varkappa$ — la valeur caractérisant le milieu thermoélastique, introduite par P. Chadwick et I. N. Sneddon [10].

La racine k_1 correspond à l'onde modifiée thermique de diffusion et k_2 — à l'onde modifiée élastique. On voit — d'après la discussion des racines des équations [10] — que le coefficient d'amortissement ϑ n'est qu'une fonction croissante de la fréquence ω, variant de la même facon que ω^2 pour les fréquences basses, et tendant asymptotiquement vers la valeur $\vartheta_\infty = \dfrac{\varepsilon\omega^*}{2c_1}$ pour $\omega \to \infty$. Pour les basses fréquences $\beta \ll 1$ on a $c \approx \left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right) c_1$, pour les fréquences hautes $\beta \gg 1$, on a $c \to c_1$. Pour $\beta \to 1 (\omega \to \omega^*)$ les valeurs ϑ et c variant rapidement.

La fréquence ω, dans les oscillations auxquelles nous avons affaire dans les conditions pratiques, est limitée d'en haut par la fréquence ω_c, résultant du spectre Debey [27], vu que $\omega_c = 2\pi c_1\left(\dfrac{3\varrho}{4\pi M}\right)^{1/3}$ où M désigne la masse de l'atome constituant le milieu donné.

Pour tous les métaux nous avons $\dfrac{\omega^*}{\omega_c} < 1$, ω^* étant beaucoup plus grand que les fréquences obtenues dans les expériences où on a appliqué les oscillations ultrasoniques.

Les solutions obtenues ci-dessus nous mènent aux contraintes thermiques (pour le cas de l'action des sources de chaleur) ne différant que de peu des sources déterminées, en négligeant le couplage du champ de température et de celui de déformation.

Problème élargi de Lamb caractérisé par la symétrie axiale

Par le «problème de Lamb caractérisé par la symétrie axiale», on entend le problème suivant: nous considérons l'action de la charge $p(r, t)$ agissant le long de l'axe z dans le plan $z = 0$ du demi-espace thermoélastique $z \geqq 0$. La charge mentionnée provoque la formation de champs de déformation et de température dans l'espace. Cette définition du problème diffère de celle du problème classique de Lamb en ce qu'elle consiste dans la détermination du champ de température accompagnant le champ de déformation.

On admet que dans l'espace considéré $z \geqslant 0$, les sources de chaleur ainsi que les forces massiques n'existent pas. Ces présomptions admises, les équations différentielles initiales sont homogènes.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\Theta - \eta\nabla^2\dot{\Phi} = 0, \tag{3.1}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)\Phi - m\Theta = 0, \tag{3.2}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\partial_t^2\right)\psi = 0, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3.3}$$

On peut exprimer les déplacements radiaux u_r et verticaux à l'aide des fonctions Φ et ψ par les formules suivantes [28]

$$\begin{gathered} u_r = \partial_r\Phi + \partial_r\partial_z\psi, \\ w = \partial_z\Phi - \left(\partial_r^2\psi + \frac{1}{r}\partial_r\psi\right) = \partial_z\Phi + \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c_2^2}\partial_t^2\right)\psi, \\ u_\varphi = 0, \qquad \partial_r = \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Profitant des mêmes fonctions Φ et ψ, on peut trouver l'expression pour les contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -2\mu\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{2c_2^2}\partial_t^2\right)\Phi + 2\mu\,\partial_z\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c_2^2}\partial_t^2\right)\psi, \\ \sigma_{rr} &= -2\mu\left(\partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{2c_2^2}\partial_t^2\right)\Phi + 2\mu\,\partial_r^2\partial_z\psi, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -2\mu\left(\partial_z^2 + \partial_r^2 - \frac{1}{2c_2^2}\partial_t^2\right)\Phi + \frac{2\mu}{r}\partial_r\partial_z\psi, \\ \sigma_{rz} &= 2\mu\,\partial_r\partial_z\Phi + \mu\partial_r\left(2\partial_z^2 - \frac{1}{c_2^2}\partial_t^2\right)\psi. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Posons que la charge varie d'une façon harmonique dans le temps $p(r,t) = f(r)c^{i\omega t}$. En introduisant les notions:

$$\Phi(r,z,t) = e^{i\omega t}\Phi^*(r,z), \qquad \psi(r,z,t) = e^{i\omega t}\psi^*(r,z), \text{ ect.} \tag{3.6}$$

nous pouvons réduire le système d'équations (3.1)—(3.3) à la forme suivante

$$(\nabla^2 - k_1^2)(\nabla^2 - k_2^2)\Phi^* = 0, \tag{3.7}$$

$$(\nabla^2 + \tau^2)\psi^* = 0, \tag{3.8}$$

$$(\nabla^2 + \sigma^2)\Phi^* - m\Theta^* = 0, \tag{3.9}$$

où

$$k_1^2 + k_2^2 = q(1+\varepsilon) - \sigma^2, \qquad k_1^2 k_2^2 = -q\sigma^2,$$

$$q = i\omega/\varkappa, \qquad \sigma^2 = \omega^2/c_1^2, \qquad \varepsilon = m\eta\varkappa, \qquad \tau^2 = \omega^2/c_2^2.$$

Les relations entre l'état de déplacement et les fonctions Φ^*, ψ^* prendront alors la forme qui suit:

$$\begin{aligned} u_r^* &= \partial_r\Phi^* + \partial_r\partial_z\psi^*, \\ w^* &= \partial_z\Phi^* + (\partial_z^2 + \tau^2)\psi^*. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour les amplitudes des contraintes on aura les formules que voici:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* &= -2\mu\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{\tau^2}{2}\right)\Phi^* + 2\mu\,\partial_z(\partial_z^2 + \tau^2)\psi^*, \\ \sigma_{rr}^* &= -2\mu\left(\partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{\tau^2}{2}\right)\Phi^* + 2\mu\,\partial_r^2\partial_z\psi^*, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^* = -2\mu\left(\partial_z^2 + \partial_r^2 + \frac{\tau^2}{2}\right)\Phi^* + \frac{2\mu}{r}\partial_r\partial_z\psi^*,$$

$$\sigma_{rz}^* = 2\mu\partial_r\partial_z\Phi^* + \mu\partial_r(2\partial_z^2 + \tau^2)\psi^*,$$

Pour les équations (3.7)—(3.9) transformons l'intégrale de Hankel, définie par les relations

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\alpha,z) &= \int_0^\infty \Phi^*(r,z)rJ_0(\alpha r)\,dr, \\ \Phi^*(r,z) &= \int_0^\infty \tilde{\Phi}(\alpha,z)\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nous obtenons ainsi un système d'équations différentielles ordinaires

$$[\partial_z^2 - (\alpha^2 + k_1^2)][\partial_z^2 - (\alpha^2 + k_2^2)]\tilde{\Phi} = 0, \tag{3.13}$$

$$[\partial_z^2 - (\alpha^2 + \tau^2)]\tilde{\psi} = 0, \tag{3.14}$$

$$[\partial_z^2 - (\alpha^2 - \sigma^2)]\tilde{\Phi} - m\tilde{\Theta} = 0. \tag{3.15}$$

Maintenant, nous pouvons sans peine déterminer les fonctions $\tilde{\Phi}(a, z)$ et $\tilde{\psi}(a, z)$; les équations (3.12) nous permettent de déterminer la transformation inverse de Hankel.

$$\Phi^*(r, z) = \int_0^\infty (Ae^{-\lambda_1 z} + Be^{-\lambda_2 z}) aJ_0(ar)\, da,$$

(3.16)
$$\psi^*(r, z) = \int_0^\infty Ce^{-\nu z} aJ_0(ar)\, da,$$

$$\nu = (a^2 - \tau^2)^{1/2} > 0.$$

Les termes λ_1, λ_2 désignent les racines de l'équation

$$\lambda^4 - (k_1^2 + k_2^2 + 2a^2)\lambda^2 + (k_1^2 + a^2)(k_2^2 + a^2) = 0.$$

Nous choisissons les racines λ_1, λ_2 de manière à ce que leur parties réelles soient positives. Dans les équations (3.16) nous n'avons que trois constantes A, B, C. Le nombre de constantes est réduit à trois parce que $\Phi^* \to 0$, $\psi^* \to 0$ pour $|r^2 + z^2| \to \infty$.

L'amplitude de température sera déterminée d'après l'équation (3.15)

(3.17)
$$\Theta^*(\eta z) = \int_0^\infty \{A[\lambda_1^2 + \sigma^2 - a^2]e^{-\lambda_1 z} + B[\lambda_2^2 + \sigma^2 - a^2]e^{-\lambda_2 z}\} aJ_0(ar)\, da.$$

Les valeurs A, B, C, comme fonctions du paramètre seront déterminées d'après les conditions aux limites

(3.18)
$$\Theta^*(r, 0) = 0, \qquad \sigma_{rz}^*(r, 0) = 0, \qquad \sigma_{zz}^*(r, 0) = -f(r),$$

en posant que sur la surface $z = 0$ la température Θ et la contrainte σ_{rz} sont égales à zéro; nous n'avons que la charge $p(r, t) = f(r)e^{i\omega t}$ agissant le long de l'axe positive z. En introduisant les formules (3.16)—(3.18), on obtient un système de trois équations suivantes:

$$An_1 + Bn_2 = 0,$$

$$2a(A\lambda_1 + B\lambda_2) - (a^2 + \nu^2)C = 0,$$

$$\mu(A + B)(a^2 + \nu^2) - 2\mu\nu a^2 C = -\tilde{f}(a).$$

En résolvant ledit système d'équations, on obtiendra

$$A = \frac{\tilde{f}(a) n_2 (a^2 + \nu^2)}{\Delta}, \qquad B = -A\frac{n_1}{n_2},$$

(3.19)
$$C = \frac{2Aa(\lambda_1 n_2 - \lambda_2 n_1)}{n_2(a^2 + \nu^2)}.$$

Les notations dont nous nous sommes servi sont les suivantes:

$$\Delta = 4\mu\nu a^2[\lambda_1 n_2 - \lambda_2 n_1] - \mu(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(a^2 + \nu^2),$$

$$n_{1,2} = \lambda_{1,2}^2 + \sigma^2 - \alpha^2,$$

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_0^\infty f(r) r J_0(\alpha r) d\alpha .$$

Ainsi, grâce aux formules (3.16), (3.17) et (3.19), nous pouvons considérer les fonctions Φ^*, ψ^* et Θ^* comme étant connues, ce qui nous permet de déterminer les contraintes d'après les formules (3.5).

Nous allons considérer maintenant le cas suivant: sur la surface $z = 0$ n'agissent que les forces tangentielles $g(r)e^{i\omega t}$; les forces normales font défaut, la température est zéro. D'après les conditions aux limites

$$\sigma_{rz}^*(r, 0) = -g(r), \qquad \sigma_{zz}^*(r, 0) = 0, \qquad \Theta^*(r, 0) = 0, \tag{3.20}$$

on détermine aisément les valeurs A, B, C, qui donneront les solutions suivantes

$$A = -\frac{2\mu\nu\alpha^2 n_2}{\Delta}\tilde{g}((\alpha), \qquad B = -A\frac{n_1}{n_2}, \qquad C = \frac{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\alpha^2 + \nu^2)}{2\nu\alpha^2 n_2}, \tag{3.21}$$

où

$$\tilde{g}(\alpha) = \int_0^\infty g(r) r J_0(\alpha r) dr .$$

On voit qu'il est possible d'élargir la condition thermique aux limites, en admettant une condition plus large, p.ex. $\partial_z \Theta = k(\Theta - \Theta^0)$ qui décrit un échange libre de chaleur sur la surface $z = 0$.

Cependant, les solutions obtenues n'ont qu'un caractère formel. On n'a pas réussi, jusqu'ici, à donner pour un cas particulier quelconque une solution sous forme fermée, se prêtant à la discussion. L'élargissement du problème pour le cas $\varepsilon = 0$ revient à la solution classique de Lamb.

Conclusions

Nous pouvons préciser que nous n'avons réussi qu'à donner des solutions sous forme fermée pour un groupe de problèmes seulement, de plus, de problèmes à une dimension, en posant que la température ou les charges varient d'une facon harmonique.

Les solutions des problèmes à deux dimensions et des problèmes spatiaux obtenues pour les corps limités et semi infinis sont jusqu'ici des solutions formelles seulement.

Il nous semble que les recherches futures seront dirigées, en premier lieu, vers des solutions pour la variation arbitraire des charges et de la température dans le temps.

Vu la complexité mathématique du problème les recherches tendront sans doute à obtenir des solutions approximatives.

Étant donné que le couplage thermoélastique provoqué par l'échauffement du corps n'influe que faiblement sur les changements de contraintes, nous pouvons espérer que le méthode des perturbations nous donnera des résultats satisfaisants.

Nous devons envisager ensuite la possibilité d'obtenir des méthodes générales de l'intégration du système d'équations différentielles (1.8) et (1.9) sous une forme analogique à celle de la représentation intégrale donnée par Kirchhoff et Poisson pour le problème élastocinétique (problème non couplé).

Le développement des recherches sera sans doute dirigé aussi vers l'élargissement du couplage des champs de température et de déformation sur les corps thermo-élastiques anisotropes et sur les corps thermo-visco-élastiques.

Les problèmes considérés dans le présent rapport sont avant tout de caractère cognitif tendant à élargir la science d'élastocinétique.

Á des fins pratiques, pour déterminer les contraintes apparaissant dans les constructions mécaniques, le couplage des champs de température et de déformation peut être négligé.

Ouvrages cités dans le texte

[1] J. M. C. Duhamel, *Second mémoire sur les phénomènes thermomécaniques*, «J. de l'École Polytech.», v. 15, 1837.

[2] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, 1910.

[3] H. Jeffreys, *The Thermodynamics of an Elastic Solid*, «Proc. Comb. Phil. Soc.», v. 26, 1930.

[4] M. A. Biot, *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*, «J. Appl. Phys.», v. 27, 1956.

[5] P. Chadwick, *Thermoelasticity. The Dynamical Theory*, «Progress in Solid Mechanics», v. I, Amsterdam 1960.

[6] K. Zoller, *Die Wärmegleichung bei Wärmespannungen*, «Ing. Arch.», v. V, 28, 1959.

[7] J. H. Weiner, *A Uniqueness Theorem for the Coupled Thermoelastic Problem*, «J. Appl. Math.», v. 15, 1957.

[8] H. Zorski, *On a Certain Property of Thermoelastic Media*, «Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. techn.», v. 6, 1958.

[9] H. Deresiewicz, *Plane Waves in a Thermoelastic Solid*, «J. of Acoust. Soc. Amer.», v. 29, 1957.

[10] P. Chadwick, I. N. Sneddon, *Plane Waves in an Elastic Solid Conducting Heat*, «J. of Mech. Phys. of Solids», v. 6, 1958.

[11] I. N. Sneddon, *The Propagation of Thermal Stresses in thin Metallic Rods*, «Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Ser. A», v. 65, 1959.

[12] F. J. Lockett, *Effect of Thermal Properties of a Solid on the Velocity of Rayleigh Waves*, «J. Mech. Phys. of Solids», v. 7, 1958.

[13] W. Nowacki, M. Sokołowski, *Propagation of Thermoelastic Waves in Plates*, «Arch. Mech. Stos.», v. 9, 6, 1959.

[14] H. Zorski, *Singular Solutions for Thermoelastic Media*, «Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Techn.», v. 6, 6, 1958.

[15] G. Eason, I. N. Sneddon, *The Dynamic Stress Produces in Elastic Bodies by Uneven Heating*, «Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Ser. A.», v. 65, 1959.

[16] F. J. LOCKETT, I. N. SNEDDON, *Propagation of Thermal Stresses in an Infinite Medium*, «Proc. of the Edinburgh Math. Soc.», v. II, 4, 1959.

[17] W. NOWACKI, *Some Dynamic Problems of Thermoelasticity*, «Arch. Mech. Stos.», v. 11, 2, 1959.

[18] H. LESSEN, *Thermoelasticity and Thermal Shock*, «J. Mech. Phys. Solids», v. 5, 1956.

[19] R. HETNARSKI, *Coupled One-dimensional Thermal Shock. Problem for Small Times*, «Arch. Mech. Stos.», v. 13, 2, 1961.

[20] R. MUKI, S. BREUER, *Couplings Effects in Transient Thermoelastic Problem*, «Rap.....», 562 (25)/14, Brown University, 1962.

[21] V. I. DANILOVSKAYA, *Contraintes dans le demi-espace élastique dues à l'échauffement subit de cette surface* (en russe), «Prikl. Mat. Mech.», N° 14, 316, 1950.

[22] G. PARIA, *Coupling of Elastic and Thermal Deformations*, Indian Inst. of Techn., Kharagpur 1959.

[23] G. A. NARIBOLI, *Spherically Symetric Thermal Shock in a Medium with Thermal Stresses and Elastic Deformations Coupled*, «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1961.

[24] J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The Sommerfeld Radiation Conditions for Coupled Problems of Thermoelasticity. Exemples of Coupled Stresses and Temperature Concetration at Cylindrical and Spherical Cavities*, «Arch. Mech. Stos.», v. 14, 1. 1962.

[25] J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The Plane Dynamic Problem of Thermoelasticity*, «Proc. of Vibr. Probl.», v. 2, 4, 1961.

[26] J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Transversal Vibrations of a Plate Produced by Heating*, «Arch. Mech. Stos.», v. 13, 5, 1961.

[27] L. BRILLOUIN, *Tenseurs en mécanique et en élasticité*, Paris 1938, p. 324.

[28] W. M. EWING, W. S. JARDETZKY, F. PRESS *Elastic Waves in Layered Media*, New York 1957.

Table des matières