ZAMM

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

BAND 52 | 1972 | HEFT 10

INHALT:

Vorträge der Konferenz für Mechanik

vom 13. bis 15. 10. 1971 in Berlin

THEORIA CUM PRAXI

AKADEMIE-VERLAG GMBH · BERLIN

ZAMM Bd. 52 Heft 10 Seite T249 bis T440 Berlin, Oktober 1972

ZAMM 52, T 268 – T 280 (1972)

Zweidimensionale Probleme der mikropolaren Elastostatik

Von W. Nowacki

1. Einführung

Wir untersuchen einen mikropolaren elastischen homogenen, isotropen und zentrosymmetrischen Körper. Unter dem Einfluß von Belastungen erfährt der Körper eine Deformation, die durch zwei voneinander unabhängige Vektoren beschrieben wird, den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ und den Drehvektor $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$. Aus diesen Vektoren werden zwei asymmetrische Tensoren konstruiert, der Deformationstensor γ_{ji} und der Torsionsbiegungstensor $\varkappa_{ji}$, wobei

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \varepsilon_{kji}\varphi_k , \qquad \varkappa_{ij} = \varphi_{i,j} , \qquad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

gilt. Der Spannungszustand ist durch zwei asymmetrische Tensoren charakterisiert, den Tensor der Spannungskräfte σ_{ji} sowie den Momentenspannungstensor μ_{ji}. Diese Tensoren sind mit den Tensoren γ_{ji} und $\varkappa_{ji}$ mittels der Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\,\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\,\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\,\delta_{ji} , \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \varepsilon)\,\varkappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\,\varkappa_{ij} + \beta\,\varkappa_{kk}\,\delta_{ji} , \qquad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

verbunden. In diesen Relationen bezeichnen α, β, γ, ε, μ, λ die Materialkonstanten. Wenn wir (1.2) und (1.1) in die Gleichgewichtsgleichungen

$$\begin{aligned} &\sigma_{ji,j} + X_i = 0 , \\ &\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

einsetzen, erhalten wir das Gleichungssystem der Verschiebungen und Drehungen [1]—[4]

$$\begin{aligned}&(\mu+\alpha)\,\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu-\alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{X}=0\,,\\&[(\gamma+\varepsilon)\,\nabla^2-4\alpha]\boldsymbol{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{Y}=0\,.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Hier sind $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ die Vektoren der Kräfte und Massenmomente.

Die Gleichungen (1.4) müssen durch die Randbedingungen ergänzt werden. Wenn auf der Fläche A, die den Körper begrenzt, Belastungen (die Kräfte $\boldsymbol{p}$ und Momente $\boldsymbol{m}$) gegeben sind, nehmen die Randbedingungen die nachstehende Form an:

$$p_i=\sigma_{ji}\,n_j\,,\qquad m_i=\mu_{ji}\,n_j\,.\tag{1.5}$$

Hier sind n_j die Komponenten des Einheitsvektors der Normalen $\boldsymbol{n}$.

Wir gehen zu den ebenen Problemen der mikropolaren Elastizität über, indem wir voraussetzen, daß alle Ursachen und Folgen nur von den Veränderlichen x_1, x_2 abhängen. In diesem Fall zerfällt das System der sechs Gleichungen (1.4) in zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme. Das erste dieser Systeme, in dem die Vektorkomponenten

$$\boldsymbol{u}\equiv(u_1,u_2,0)\,,\qquad \boldsymbol{\varphi}\equiv(0,0,\varphi_3)\tag{1.6}$$

auftreten, hat die Form

$$\begin{aligned}&(\mu+\alpha)\,\nabla_1^2u_1+(\lambda+\mu-\alpha)\,\partial_1e+2\alpha\,\partial_2\varphi_3+X_1=0\,,\\&(\mu+\alpha)\,\nabla_1^2u_2+(\lambda+\mu-\alpha)\,\partial_2e-2\alpha\,\partial_1\varphi_3+X_2=0\,,\\&[(\gamma+\varepsilon)\,\nabla_1^2-4\alpha]\,\varphi_3+2\alpha\,(\partial_1u_2-\partial_2u_1)+Y_3=0\,.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Hier wurden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\nabla_1^2=\partial_1^2+\partial_2^2\,,\qquad e=\partial_1u_1+\partial_2u_2\,.$$

Im zweiten System treten die Vektorkomponenten

$$\boldsymbol{u}\equiv(0,0,u_3)\,,\qquad \boldsymbol{\varphi}\equiv(\varphi_1,\varphi_2,0)\tag{1.8}$$

auf. Das Gleichungssystem hat hier die Form

$$\begin{aligned}&[(\gamma+\varepsilon)\,\nabla_1^2-4\alpha]\,\varphi_1+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\partial_1\varkappa+2\alpha\,\partial_2u_3+Y_1=0\,,\\&[(\gamma+\varepsilon)\,\nabla_1^2-4\alpha]\,\varphi_2+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\partial_2\varkappa-2\alpha\,\partial_1u_3+Y_2=0\,,\\&(\mu+\alpha)\,\nabla_1^2u_3+2\alpha\,(\partial_1\varphi_2-\partial_2\varphi_1)+X_3=0\,.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\varkappa=\partial_1\varphi_1+\partial_2\varphi_2\,,\qquad \nabla_1^2=\partial_1^2+\partial_2^2\,.$$

Wir gehen bei (1.4) zu Zylinderkoordinaten (r,θ,z) über. Indem wir voraussetzen, daß wir es mit axialsymmetrischen Problemen zu tun haben, erhalten wir aus (1.4) zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme. Im ersten System treten die Vektorkomponenten

$$\boldsymbol{u}\equiv(u_r,0,u_z)\,,\qquad \boldsymbol{\varphi}\equiv(0,\varphi_\theta,0)\,.\tag{1.10}$$

auf. Die Gleichungen (1.4) nehmen in diesem Fall die Form

$$\begin{aligned}&(\mu+\alpha)\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)u_r+(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial r}-2\alpha\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial z}+X_r=0\,,\\&(\gamma+\varepsilon)\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)\varphi_\theta-4\alpha\,\varphi_\theta+2\alpha\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+Y_\theta=0\,,\\&(\mu+\alpha)\,\nabla^2u_z+(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{2\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\varphi_\theta)+X_z=0\end{aligned}\tag{1.11}$$

an, wobei

$$e=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r)+\frac{\partial u_z}{\partial z},\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ist. Im zweiten Differentialgleichungssystem, das von (1.11) unabhängig ist, treten die Vektorkomponenten

$$\boldsymbol{u}\equiv(0,u_\theta,0)\,,\qquad \boldsymbol{\varphi}\equiv(\varphi_r,0,\varphi_z)\tag{1.12}$$

auf. Das mit (1.12) verbundene Differentialgleichungssystem hat die Form

$$
\begin{aligned}
&(\gamma + \varepsilon)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\varphi_r - 4\,\alpha\,\varphi_r + (\beta + \gamma - \varepsilon)\frac{\partial \varkappa}{\partial r} - 2\,\alpha\,\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + Y_r = 0\,,\\
&(\mu + \alpha)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)u_\theta + 2\,\alpha\left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial r}\right) + X_\theta = 0\,,\\
&(\gamma + \varepsilon)\,\nabla^2\varphi_z - 4\,\alpha\,\varphi_z + (\beta + \gamma - \varepsilon)\frac{\partial \varkappa}{\partial z} + \frac{2\,\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_\theta) + Y_z = 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Hier wurden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$
\varkappa = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\varphi_r) + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\,, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.
$$

Nachstehend werden wir ein einheitliches Verfahren zur Lösung der Differentialgleichungen (1.7), (1.9), (1.11) und (1.13) angeben. Dieses Verfahren, das auf einer Einführung von elastischen Potentialen beruht, wird besonders bei der Bestimmung der Verschiebungen und Drehungen vorteilhaft sein.

2. Lösung des Gleichungssystems (1.7)

Wir untersuchen das homogene System der Gleichgewichtsgleichungen (1.7) und nehmen die Lösung dieses Systems in Form einer Zerlegung des Vektors $\boldsymbol{u} \equiv (u_1, u_2, 0)$ in einen Potentialanteil und einen solenoidalen Anteil an:

$$
u_1 = \partial_1\Phi + \partial_2\Psi\,, \qquad u_2 = \partial_2\Phi - \partial_1\Psi\,. \tag{2.1}
$$

Hierbei sind Φ und Ψ die statischen elastischen Potentiale.

Indem wir (2.1) in (1.7) einsetzen, erhalten wir das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
&(\lambda + 2\,\mu)\,\partial_1\nabla_1^2\Phi + \partial_2\left[(\mu + \alpha)\,\nabla_1^2\Psi + 2\,\alpha\,\varphi_3\right] = 0\,,\\
&(\lambda + 2\,\mu)\,\partial_2\nabla_1^2\Phi - \partial_1\left[(\mu + \alpha)\,\nabla_1^2\Psi + 2\,\alpha\,\varphi_3\right] = 0\,,\\
&\left[(\gamma + \varepsilon)\,\nabla_1^2 - 4\,\alpha\right]\varphi_3 - 2\,\alpha\,\nabla_1^2\Psi = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Wenn wir $\nabla_1^2\Psi$ aus den beiden ersten Gleichungen unter Berücksichtigung der dritten Gleichung eliminieren, kommen wir zu den Cauchy-Riemannschen Relationen

$$
\begin{aligned}
&\partial_1\nabla_1^2\Phi + \frac{2\,\mu}{\lambda + 2\,\mu}\,\partial_2\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3 = 0\,,\\
&\partial_2\nabla_1^2\Phi - \frac{2\,\mu}{\lambda + 2\,\mu}\,\partial_1\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3 = 0\,, \qquad l^2 = \frac{(\mu + \alpha)\,(\gamma + \varepsilon)}{4\,\mu\,\alpha}\,.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Die Funktionen Φ und φ_3 müssen die Gleichungen

$$
\nabla_1^2\,\nabla_1^2\,\Phi = 0\,, \qquad \nabla_1^2\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3 = 0 \tag{2.5}
$$

erfüllen.

Die Funktion Ψ ist mit der Funktion φ_3 durch folgende Beziehung verbunden, die sich aus der dritten Gleichung in (2.3) ergibt:

$$
\nabla_1^2\Psi = \frac{1}{2\,\alpha}\left[(\gamma + \varepsilon)\,\nabla_1^2 - 4\,\alpha\right]\varphi_3\,. \tag{2.6}
$$

Der Lösungsvorgang des ebenen Problems gestaltet sich folgendermaßen: Wir lösen die Gleichung (2.5), wobei in diesen Lösungen vier Integralkonstanten auftreten. Die Konstanten bestimmen wir aus drei Randbedingungen sowie aus der Cauchy-Riemannschen Relation (2.4).

Der Spannungszustand ist in dem hier untersuchten ebenen Deformationszustand durch die Matrizen

$$
\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}
$$

charakterisiert. Diese Spannungen lassen sich durch die Potentiale Φ, Ψ und die Drehung φ_3 folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\,\nabla_1^2\Phi + 2\mu\,(\partial_1\partial_2\Psi - \partial_2^2\Phi)\,,\\
\sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\,\nabla_1^2\Phi + 2\mu\,(-\partial_1\partial_2\Psi - \partial_1^2\Phi)\,,\\
\sigma_{33} &= \lambda\,\nabla_1^2\Phi\,,\\
\sigma_{12} &= \mu\,[2\,\partial_1\partial_2\Phi + (\partial_2^2 - \partial_1^2)\,\Psi] - \alpha\,\nabla_1^2\Psi - 2\,\alpha\,\varphi_3\,,\\
\sigma_{21} &= \mu\,[2\,\partial_1\partial_2\Phi + (\partial_2^2 - \partial_1^2)\,\Psi] + \alpha\,\nabla_1^2\Psi + 2\,\alpha\,\varphi_3\,,\\
\mu_{13} &= (\gamma + \varepsilon)\,\partial_1\varphi_3\,, \qquad \mu_{23} = (\gamma + \varepsilon)\,\partial_2\varphi_3\,,\\
\mu_{31} &= (\gamma - \varepsilon)\,\partial_1\varphi_3\,, \qquad \mu_{32} = (\gamma - \varepsilon)\,\partial_2\varphi_3\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Es sei vermerkt, daß

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\,(\lambda + \mu)\,\nabla_1^2\Phi\,, \qquad \sigma_{12} - \sigma_{21} = [(\gamma + \varepsilon)\,\nabla_1^2 - 4\,\alpha]\,\varphi_3 = 2\,\alpha\,\nabla_1^2\Psi$$

ist.

Wir untersuchen beispielsweise die Lösung des nachstehenden statischen Problems. Es möge der elastische Halbraum $x_1 \geqq 0$ auf dem Rande $x_1 = 0$ durch die Kraft $p(x_2)$ belastet sein, die in Richtung der positiven Achse x_1 verläuft. Die Randbedingungen (1.5) bei $\boldsymbol{n} \equiv (1, 0, 0)$ reduzieren sich auf

$$\sigma_{11}(0, x_2) = -\,p(x_2)\,, \qquad \sigma_{12}(0, x_2) = 0\,, \qquad \mu_{13}(0, x_2) = 0\,. \tag{2.9}$$

Diese Bedingungen bringen wir mit den Potentialen Φ, Ψ und der Drehung φ_3 zum Ausdruck, indem wir die Relationen (2.8) benutzen.

Die Lösung der Gleichungen (2.5) stellen wir in Form der FOURIERintegrale

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (A + B\,x_1\,\zeta)\,\mathrm{e}^{-x_1\zeta - i\,x_2\zeta}\,d\zeta\,,\\
\Psi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (C\,\mathrm{e}^{-x_1\zeta} + D\,\mathrm{e}^{-\eta x_1})\,\mathrm{e}^{-i\,x_2\zeta}\,d\zeta\,, \qquad \eta = \left(\zeta^2 + \frac{1}{l^2}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

dar. Aus den CAUCHY-RIEMANNschen Gleichungen (2.4) erhalten wir die Beziehung

$$C = i\,\zeta^2\,\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\,B\,. \tag{2.11}$$

Aus der letzten Randbedingung erhalten wir $D = -\,\zeta\,C/\eta$. In den Randbedingungen $(2.9)_{1,2}$ tritt die Funktion Ψ auf, die aus der Gleichung (2.6) zu bestimmen ist. Wir erhalten durch einfache Rechnung

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{\zeta^2}\left[x_1\,\zeta\,\mathrm{e}^{-\zeta x_1} - 2\,\varkappa^2\,l^2\,\zeta^2\,\frac{\zeta}{\eta}\,\mathrm{e}^{-\eta x_1}\right]\mathrm{e}^{-i\,x_2\zeta}\,d\zeta\,, \qquad \varkappa^2 = \frac{\nu^2}{l^2} - 1\,, \quad \nu^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\,\alpha}\,. \tag{2.12}$$

Die Benutzung der Randbedingungen $(2.9)_{1,2}$ liefert die Integralkonstanten

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\tilde{p}(\zeta)}{2\,(\lambda + \mu)\,\zeta^2\,\Delta_0}\,, \qquad A = -\,\frac{\lambda + \mu}{\mu}\left(1 - 2\,a_0\,\zeta^2\,\frac{\zeta}{\eta}\right)B\,, \qquad C = i\,\zeta^2\,\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\,B\,,\\
D &= -\,\frac{\zeta}{\eta}\,C\,,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

mit

$$\Delta_0 = 1 + 2\,\zeta^2\,a_0\left(1 - \frac{\zeta}{\eta}\right), \qquad a_0 = \frac{(\gamma + \varepsilon)\,(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)\,4\,\mu}\,.$$

$$\tilde{p}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p(x_2)\,\mathrm{e}^{i\,x_2\zeta}\,dx_2\,.$$

Indem wir uns die Beziehungen (2.7) zunutze machen, erhalten wir für die Spannungen die Formeln

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\zeta)}{\Delta_0}\left[(1 + x_1\zeta)\,e^{-\zeta x_1} + 2\,a_0\zeta^2\left(e^{-\eta x_1} - \frac{\zeta}{\eta}\,e^{-\zeta x_1}\right)\right] e^{-i x_2 \zeta}\, d\zeta\,,$$

$$\sigma_{12} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\zeta)}{\Delta_0}\left[x_1\zeta\,e^{-\zeta x_1} + 2\,a_0\zeta^2\frac{\zeta}{\eta}\,(e^{-\eta x_1} - e^{-\zeta x_1})\right] e^{-i x_2 \zeta}\, d\zeta\,, \tag{2.14}$$

$$\mu_{13} = -\frac{2\,i\,a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta\,\tilde{p}(\zeta)}{\Delta_0}(e^{-\zeta x_1} - e^{-\eta x_1})\, e^{-i x_2\zeta}\, d\zeta \qquad \text{usw.}$$

3. Lösung des Gleichungssystems (1.9)

Wir untersuchen das homogene System der Gleichgewichtsgleichungen (1.9) und nehmen die Lösung dieses Systems in Form von Vektorzerlegungen von $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, 0)$ in einen Potentialanteil und einen solenoidalen Anteil

$$\varphi_1 = \partial_1\Omega + \partial_2\Gamma\,, \qquad \varphi_2 = \partial_2\Omega - \partial_1\Gamma\,. \tag{3.1}$$

an. Indem (3.1) in (1.9) eingesetzt wird, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\partial_1\,[(\beta + 2\,\gamma)\,\nabla_1^2 - 4\,\alpha]\,\Omega + \partial_2\,[((\gamma + \varepsilon)\,\nabla_1^2 - 4\,\alpha)\,\Gamma + 2\,\alpha\,u_3] = 0\,,\\
&\partial_2\,[(\beta + 2\,\gamma)\,\nabla_1^2 - 4\,\alpha]\,\Omega - \partial_1\,[(\gamma + \varepsilon)\,\nabla_1^2 - 4\,\alpha)\,\Gamma + 2\,\alpha\,u_3] = 0\,,\\
&(\mu + \alpha)\,\nabla_1^2\,u_3 - 2\,\alpha\,\nabla_1^2\Gamma = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Die ersten beiden Gleichungen lassen sich unter Berücksichtigung der dritten Gleichung in Form der Cauchy-Riemannschen Relation

$$-\,\partial_1\,(\nu^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\Omega = \frac{\mu}{\mu + \alpha}\,\partial_2\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\Gamma\,, \quad \partial_2\,(\nu^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\Omega = \frac{\mu}{\mu + \alpha}\,\partial_1\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\Gamma\,, \tag{3.3}$$

darstellen, dabei ist

$$\nu^2 = \frac{\beta + 2\,\gamma}{4\,\alpha}\,, \qquad l^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)\,(\mu + \alpha)}{4\,\mu\,\alpha}\,.$$

Die Funktionen Ω und Γ genügen den Gleichungen

$$\nabla_1^2\,(\nu^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\Omega = 0\,, \qquad \nabla_1^2\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\Gamma = 0\,. \tag{3.4}$$

Der Spannungszustand wird hier durch die Matrizen

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13}\\ 0 & 0 & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0\\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0\\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

beschrieben. Wenn wir die Spannung mit den Funktionen Ω, Γ ausdrücken, kommen wir zu den Beziehungen

$$\begin{aligned}
&\sigma_{13} = 2\,\alpha\,\partial_2\Omega\,, \qquad \sigma_{23} = -\,2\,\alpha\,\partial_1\Omega\,, \qquad \sigma_{31} = -\,2\,\alpha\,\partial_2\Omega + \frac{4\,\alpha\,\mu}{\mu + \alpha}\,\partial_1\Gamma\,,\\
&\sigma_{32} = 2\,\alpha\,\partial_1\,\Omega + \frac{4\,\alpha\,\mu}{\mu + \alpha}\,\partial_2\Gamma\,,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\mu_{11} = (\beta + 2\,\gamma)\,\nabla_1^2\Omega - 2\,\gamma\,\partial_2^2\Omega + 2\,\gamma\,\partial_1\,\partial_2\Gamma\,, \quad \mu_{22} = (\beta + 2\,\gamma)\,\nabla_1^2\Omega - 2\,\gamma\,\partial_1^2\Omega - 2\,\gamma\,\partial_1\,\partial_2\Gamma\,,\\
&\mu_{33} = \beta\,\nabla_1^2\Omega\,, \qquad \mu_{12} = -\,(\gamma + \varepsilon)\,\nabla_1^2\Gamma + 2\,\gamma\,\partial_1\,\partial_2\Omega + 2\,\gamma\,\partial_2^2\Gamma\,,\\
&\mu_{21} = (\gamma + \varepsilon)\,\nabla_1^2\Gamma - 2\,\gamma\,\partial_1^2\Gamma + 2\,\gamma\,\partial_1\,\partial_2\Omega\,.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Wir untersuchen beispielsweise die Lösung des folgenden Problems. Betrachtet wird der elastische Halbraum $x_1 \geqq 0$, der auf dem Rande $x_1 = 0$ mit dem Moment $\mu_{11}(0, x_2) = m(x_2)$ belastet ist. Die Randbedingungen sind in diesem Fall

$$\mu_{11}(0, x_2) = m(x_2)\,, \qquad \mu_{12}(0, x_2) = 0\,, \qquad \sigma_{13}(0, x_2) = 0\,. \tag{3.8}$$

Vermittels der Beziehungen (3.6), (3.7) lassen sich die Randbedingungen durch die Potentiale Ω, Γ ausdrücken. Die Lösungen der Gleichungen (3.4) nehmen wir in Form der FOURIERintegrale

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A\, e^{-\zeta x_1} + B\, e^{-\eta x_1})\, e^{-i\zeta x_2}\, d\zeta\,, \qquad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (C\, e^{-\zeta x_1} + D\, e^{-\varrho x_1})\, e^{-i\zeta x_2}\, d\zeta\,, \tag{3.9}$$

an, wobei

$$\eta = \left(\zeta^2 + \frac{1}{\nu^2}\right)^{1/2}, \qquad \varrho = \left(\zeta^2 + \frac{1}{l^2}\right)^{1/2}$$

ist. Die Konstanten A, B, C, D bestimmen wir aus den Randbedingungen (3.8) sowie aus den CAUCHY-RIEMANNschen Relationen (3.3). Aus den letzteren Relationen geht hervor, daß

$$C = i\frac{\mu + \alpha}{\alpha} A \tag{3.10}$$

gilt. Die Auswertung der Randbedingungen (3.8) ergibt

$$A = -B = \frac{\tilde{m}\, a_0\,(\zeta^2 + a_1)}{4\alpha\, \Delta_1}, \qquad C = \frac{\tilde{m}\, i}{2\gamma\, \Delta_1}(\zeta^2 + a_1)\,, \qquad D = -\frac{\tilde{m}\, i\, a_1\, \zeta^2}{4\mu\, \Delta_1}\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\frac{\eta}{\zeta}\right),$$

wobei

$$a_1 = \frac{2\alpha\mu}{\gamma(\mu + \alpha)}, \quad \Delta_1 = (\zeta^2 + a_1)^2 - \zeta^2 \varrho\left[1 + \frac{\mu}{\mu + \alpha}\left(\frac{\eta}{\zeta} - 1\right)\right], \quad \tilde{m}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} m(x_2)\, e^{i x_2 \zeta}\, dx_2\,.$$

ist. Als Ergebnis erhalten wir die Ausdrücke

$$\varphi_1 = \frac{a_1}{4\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta\, \tilde{m}(\zeta)}{\Delta_1(\zeta)} (\zeta^2 + a_1)\left[e^{-\zeta x_1} + \frac{\mu\,\eta}{\alpha\,\zeta} e^{-\eta x_1}\right] - \zeta^2\left(1 + \frac{\mu\,\eta}{\alpha\,\zeta}\right) e^{-\varrho x_1}\Big\}\, e^{-i\zeta x_2}\, d\zeta\,,$$

$$\varphi_2 = \frac{i\, a_1}{4\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta\, \tilde{m}(\zeta)}{\Delta_1(\zeta)} \left\{(\zeta^2 + a_1)\left[e^{-\zeta x_1} + \frac{\mu}{\alpha} e^{-\eta x_1}\right] - \varrho\,\zeta\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\frac{\eta}{\zeta}\right) e^{-\varrho x_1}\right\} e^{-i\zeta x_2}\, d\zeta\,, \tag{3.9}$$

$$u_3 = \frac{i\, a_1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{m}(\zeta)}{\Delta_1(\zeta)} \left[(\zeta^2 + a_1)\, e^{-\zeta x_1} - \frac{\alpha}{\mu + \alpha}\zeta^2\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\frac{\eta}{\zeta}\right) e^{-\varrho x_1}\right] e^{-i\zeta x_2}\, d\zeta\,.$$

Die Kenntnis der Funktionen φ_1. φ_2, u_3 erlaubt, die Komponenten des Spannungszustandes zu bestimmen.

Das hier dargestellte Lösungsverfahren führt zu sehr einfachen Differentialgleichungen für die elastischen Potentiale Φ, Ψ und Ω, Γ. Diese Potentiale sind durch die CAUCHY-RIEMANNschen Relationen miteinander verbunden.

Der Charakter dieser Gleichungen bringt es mit sich, daß auf sie die Funktionsmethode der komplexen Veränderlichen mit Erfolg angewendet werden kann, die von J. N. MUSKELISHVILI [5] und seiner Schule entwickelt worden ist. Diese Methode ist von G. N. SAVIN [6] mit Erfolg auch für das erste ebene Problem benutzt worden, das mit Hilfe der AIRY-MINDLINschen Funktion gelöst wird.

4. Lösung des Gleichungssystems (1.11)

Wir untersuchen das homogene Gleichungssystem (1.11) und nehmen die Lösung dieses Gleichungssystems in der Form

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \qquad u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r} \tag{4.1}$$

an. Wenn wir die Identität:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\Phi$$

berücksichtigen, erhalten wir das Gleichungssystem

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial z}\left[(\mu + \alpha)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\Psi + 2\alpha\varphi_0\right] = 0\,,$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\Phi - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)[(\mu + \alpha)\nabla^2\Psi + 2\alpha\varphi_0] = 0\,, \tag{4.2}$$

$$(\gamma + \varepsilon)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\varphi_0 - 2\alpha\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\Psi - 4\alpha\varphi_0 = 0\,.$$

Indem wir durch

$$\Psi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \varphi_0 = \frac{\partial\vartheta}{\partial r} \tag{4.3}$$

neue Funktionen ψ und ϑ in (4.2) einführen sowie in bezug auf r integrieren, erhalten wir das Gleichungssystem

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial z}[(\mu + \alpha)\nabla^2\psi - 2\alpha\vartheta] = 0\,,$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\Phi - \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)[(\mu + \alpha)\nabla^2\psi - 2\alpha\vartheta] = 0\,, \tag{4.4}$$

$$[(\gamma + \varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha]\,\vartheta + 2\alpha\nabla^2\psi = 0\,.$$

Wenn wir $\nabla^2\psi$ aus den ersten beiden Gleichungen (4.4) mittels $(4.4)_3$ eliminieren, erhalten wir die Beziehungen

$$\nabla^2\Phi - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial}{\partial z}(l^2\nabla^2 - 1)\,\vartheta = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\Phi + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(l^2\nabla^2 - 1)\,\vartheta = 0\,. \tag{4.5}$$

Aus diesem Gleichungssystem ergeben sich folgende Differentialgleichungen, die zur Bestimmung der Potentiale Φ und ϑ dienen:

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0\,, \qquad \nabla^2(l^2\nabla^2 - 1)\,\vartheta = 0\,. \tag{4.6}$$

Diese Gleichungen sind durch die Beziehung $(4.4)_3$

$$\nabla^2\psi = -\frac{1}{2\alpha}[(\gamma + \varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha]\,\vartheta \tag{4.7}$$

zu ergänzen. Der Lösungsvorgang des axialsymmetrischen Problems gestaltet sich folgendermaßen: Wir konstruieren eine allgemeine Lösung der Gleichungen (4.6), indem wir mit Hilfe der Beziehung (4.7) die Funktion ψ bestimmen. In den Lösungen treten vier Integralkonstanten auf. Für ihre Bestimmung stehen uns drei Randbedingungen sowie die Beziehungen (4.5) zur Verfügung. Die Kenntnis der Funktionen Φ, ϑ, ψ erlaubt uns die Bestimmung der Verschiebungen u_r, u_z und der Drehung φ_θ.

Der Spannungszustand wird mit den Matrizen

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_{r\theta} & 0 \\ \mu_{\theta r} & 0 & \mu_{\theta z} \\ 0 & \mu_{z\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Wenn wir die Spannungen mit den Funktionen Φ, ψ und ϑ ausdrücken, erhalten wir für die Spannungen die Ausdrücke

$$\sigma_{rr} = 2\mu\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\Phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \lambda\nabla^2\Phi\,,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \lambda\nabla^2\Phi\,,$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi\right] + \lambda\nabla^2\Phi\,, \tag{4.9}$$

$$\sigma_{zr} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\mu\left[2\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \left(\nabla^2 - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi\right] + \alpha\nabla^2\psi - 2\alpha\vartheta\right\},$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\mu\left[2\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \left(\nabla^2 - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi\right] - \alpha\nabla^2\psi + 2\alpha\vartheta\right\},$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mu_{r\theta} &= (\gamma + \varepsilon)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} - (\gamma - \varepsilon)\frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \\
\mu_{\theta r} &= (\gamma - \varepsilon)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} - (\gamma + \varepsilon)\frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \\
\mu_{z\theta} &= (\gamma + \varepsilon)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r\,\partial z}, \qquad \mu_{\theta z} = (\gamma - \varepsilon)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r\,\partial z}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Es läßt sich verifizieren, daß

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} = (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\nabla^2\Phi\,, \qquad \sigma_{zr} - \sigma_{rz} = 2\,\alpha\,(\nabla^2\psi - \vartheta) \tag{4.11}$$

gilt.

Der Lösungsvorgang des axialsymmetrischen Problems der mikropolaren Elastizität wird nachstehend an einem einfachen Beispiel erläutert.

Es möge in der Ebene $z = 0$ des elastischen Halbraums $z \geqq 0$ die axial-symmetrische Belastung $p(r)$ in Richtung der z-Achse wirken. Die Randbedingungen haben die Form

$$\sigma_{zz}(r, 0) = -\,p(r)\,, \qquad \sigma_{zr}(r, 0) = 0\,, \qquad \mu_{z\theta}(r, 0) = 0\,. \tag{4.12}$$

Wir setzen voraus, daß für $|r^2 + z^2| \to \infty$ die Verschiebungen u_r, u_z und die Drehung φ_θ verschwinden. Die Funktionen Φ, ϑ stellen wir folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^\infty (A + B\,\zeta\,z)\,e^{-\zeta z}\,\zeta\,J_0(\zeta\,r)\,d\zeta\,, \\
\vartheta &= \int_0^\infty (C\,e^{-\zeta z} + D\,e^{-\eta z})\,\zeta\,J_0(\zeta\,r)\,d\zeta\,, \qquad \eta = \left(\frac{1}{l^2} + \zeta^2\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Aus den Relationen $(4.5)_{1,2}$ erhalten wir dieselbe Beziehung

$$C = -\,\frac{\lambda + 2\,\mu}{\mu}\,\zeta\,B\,.$$

Die Lösung der Gleichung (4.7) stellen wir unter Benutzung Hankelscher Integrale in der Form

$$\psi = \frac{\lambda + \mu}{\mu}\int_0^\infty \frac{B}{\zeta}\left(\frac{\lambda + 2\,\mu}{\lambda + \mu}\,z\,\zeta\,e^{-\zeta z} + 2\,a_0\,\zeta^2\,e^{-\eta z}\,\frac{\zeta}{\eta}\right)\zeta\,J_0(\zeta\,r)\,d\zeta$$

dar mit

$$a_0 = \frac{(\gamma + \varepsilon)\,(\lambda + 2\,\mu)}{4\,\mu\,(\lambda + \mu)}\,. \tag{4.14}$$

Aus den Randbedingungen (4.12) erhalten wir bei Berücksichtigung der Beziehungen (4.9) und (4.10) für die Integrationskonstanten die Ausdrücke

$$A = -\,\frac{\lambda + \mu}{\mu}\left(1 - 2\,a_0\,\zeta^2\,\frac{\zeta}{\eta}\right)B\,, \qquad B = \frac{\tilde{p}(\zeta)}{2\,\zeta^2\,(\lambda + \mu)\,\Delta_0(\zeta)}$$

mit

$$\Delta_0(\zeta) = 1 + 2\,a_0\,\zeta^2\left(1 - \frac{\zeta}{\eta}\right), \qquad \tilde{p}(\zeta) = \int_0^\infty p(r)\,r\,J_0(\zeta\,r)\,dr\,.$$

Auf diese Weise haben wir die Funktionen Φ, ϑ, ψ bestimmt. Die Spannungen ergeben sich aus den Formeln (4.9) und (4.10) zu

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= -\int_0^\infty \frac{\zeta\,\tilde{p}(\zeta)}{\Delta_0(\zeta)}\left[(1 + \zeta\,z)\,e^{-\zeta z} + 2\,a_0\,\zeta^2\left(e^{-\eta z} - \frac{\zeta}{\eta}\,e^{-\zeta z}\right)\right]J_0(\zeta\,r)\,d\zeta\,, \\
\sigma_{zr} &= -\int_0^\infty \frac{\zeta\,\tilde{p}(\zeta)}{\Delta_0(\zeta)}\left[\zeta\,z\,e^{-\zeta z} + 2\,a_0\,\zeta^2\,\frac{\zeta}{\eta}\,(e^{-\eta z} - e^{-\zeta z})\right]J_1(\zeta\,r)\,d\zeta\,, \\
\mu_{z\theta} &= -\,2\,a_0\int_0^\infty \frac{\zeta^2\,\tilde{p}(\zeta)}{\Delta_0(\zeta)}\,(e^{-\zeta z} - e^{-\eta z})\,J_1(\zeta\,r)\,d\zeta \qquad \text{usw.}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Die obigen Formeln vereinfachen sich bedeutend für das HOOKEsche Medium. In diesem speziellen Fall müssen $\eta = \zeta$, $\Delta_0 = 1$ eingesetzt werden. Die Formeln (4.15) gehen in bekannte Formeln der klassischen Elastizität über.

5. Lösung des Gleichungssystems (1.13)

Wir untersuchen nun das homogene Gleichungssystem (1.13). Wir nehmen die Lösung dieses Gleichungssystems in der Form

$$\varphi_r = \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z}, \qquad \varphi_z = \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{\Gamma}{r} \tag{5.1}$$

an. Wenn wir (5.1) in (1.13) einsetzen, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial r}\left[(\beta + 2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha\right]\Omega - \left[(\gamma+\varepsilon)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) - 4\alpha\right]\frac{\partial \Gamma}{\partial z} - 2\alpha\frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0\,,\\
\frac{\partial}{\partial z}\left[(\beta + 2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha\right]\Omega + \left[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha\right]\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\Gamma + \frac{2\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_\theta) = 0\,,\\
(\mu+\alpha)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)u_\theta - 2\alpha\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\Gamma = 0\,.
\end{gathered} \tag{5.2}$$

Wir führen durch

$$\Gamma = -\frac{\partial \chi}{\partial r}, \qquad u_\theta = \frac{\partial \omega}{\partial r} \tag{5.3}$$

neue Funktionen in (5.2) ein und integrieren in bezug auf r. Auf diese Weise erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{gathered}
\left[(\beta + 2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha\right]\Omega + \frac{\partial}{\partial z}\left[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha)\,\chi - 2\alpha\,\omega\right] = 0\,,\\
\frac{\partial}{\partial z}\left[(\beta + 2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha\right]\Omega - \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[((\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha)\,\chi - 2\alpha\,\omega\right] = 0\,,\\
(\mu+\alpha)\nabla^2\omega + 2\alpha\nabla^2\chi = 0\,.
\end{gathered} \tag{5.4}$$

Wenn wir ω aus den ersten beiden Gleichungen (5.4) eliminieren und ein partikuläres Integral der Gleichung $(5.4)_3$ benutzen, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{gathered}
(\nu^2\nabla^2 - 1)\,\Omega + \frac{\mu}{\mu+\alpha}\frac{\partial}{\partial z}(l^2\nabla^2 - 1)\,\chi = 0\,,\\
\frac{\partial}{\partial z}(\nu^2\nabla^2 - 1)\,\Omega - \frac{\mu}{\mu+\alpha}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(l^2\nabla^2 - 1)\,\chi = 0\,, \qquad \nu^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{4\alpha}.
\end{gathered} \tag{5.5}$$

Aus den vorstehenden Beziehungen ergeben sich zur Bestimmung der Potentiale Ω, χ die Differentialgleichungen

$$\nabla^2(\nu^2\nabla^2 - 1)\,\Omega = 0\,, \qquad \nabla^2(l^2\nabla^2 - 1)\,\chi = 0\,. \tag{5.6}$$

Diese Gleichungen sind durch die Beziehung

$$(\mu+\alpha)\nabla^2\omega + 2\alpha\nabla^2\chi = 0$$

zu ergänzen.

Die Kenntnis der Funktionen Ω, χ und ω gestattet bereits die Bestimmung der Spannungen. Der Spannungszustand ist durch die Matrizen

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{\theta r} & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{rr} & 0 & \mu_{rz} \\ 0 & \mu_{\theta\theta} & 0 \\ \mu_{zr} & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

charakterisiert.

Wenn wir die Spannungen mit Ω, χ und ω ausdrücken, erhalten wir

$$\begin{gathered}
\sigma_{r\theta} = (\mu+\alpha)\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + (\alpha-\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} - 2\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial z} + 2\alpha\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\chi\,,\\
\sigma_{\theta r} = (\mu-\alpha)\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} - (\alpha+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} + 2\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial z} - 2\alpha\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\chi\,,\\
\sigma_{\theta z} = (\mu-\alpha)\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial z} - 2\alpha\frac{\partial}{\partial r}\left(\Omega + \frac{\partial\chi}{\partial z}\right), \qquad \sigma_{z\theta} = (\mu+\alpha)\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial z} + 2\alpha\frac{\partial}{\partial r}\left(\Omega + \frac{\partial\chi}{\partial z}\right),
\end{gathered} \tag{5.8}$$

sowie

$$\mu_{rr} = 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\Omega + \frac{\partial \chi}{\partial z}\right) + \beta \nabla^2 \Omega , \qquad \mu_{\theta\theta} = 2\gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\Omega + \frac{\partial \chi}{\partial z}\right) + \beta \nabla^2 \Omega ,$$

$$\mu_{zz} = 2\gamma \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\chi\right) + \beta \nabla^2 \Omega , \qquad \mu_{rz} = 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial r\, \partial z}\left(\Omega + \frac{\partial \chi}{\partial z}\right) - (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \chi , \tag{5.9}$$

$$\mu_{zr} = 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial r\, \partial z}\left(\Omega + \frac{\partial \chi}{\partial z}\right) + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \chi .$$

Man erkennt, daß

$$\mu_{rr} + \mu_{\theta\theta} + \mu_{zz} = (2\gamma + 3\beta) \nabla^2 \Omega , \qquad \mu_{zr} - \mu_{rz} = 2\gamma \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \chi$$

gilt.

Das Verfahren zur Lösung axialsymmetrischer Probleme ist für diesen Fall analog wie in Abschnitt 4.

6. Das zweidimensionale Problem der Thermoelastizität

Die in den vorigen Abschnitten dargestellte Lösungsweise kann auf stationäre und quasistatische Probleme der Thermoelastizität ausgedehnt werden. An Stelle der Zustandsgleichungen (1.2) treten die verallgemeinerten DUHAMEL-NEUMANNschen Relationen [7]

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\, \gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\, \gamma_{ij} + (\lambda \gamma_{kk} - \nu T)\, \delta_{ji} , \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \varepsilon)\, \varkappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\, \varkappa_{ij} + \beta\, \varkappa_{kk}\, \delta_{ji} . \end{aligned} \tag{6.1}$$

Hierbei ist $\nu = (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_t$, wobei α_t der Koeffizient der linearen thermischen Ausdehnung und T der Temperaturzuwachs in bezug auf Temperaturen des natürlichen Zustandes sind.

Die Gleichungen der mikropolaren Thermoelastizität, die in Verschiebungen und Drehungen ausgedrückt werden, haben die Form [7]

$$\begin{aligned} &(\mu + \alpha) \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} = \nu \operatorname{grad} T , \\ &(\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0 . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Das Temperaturfeld ist durch die POISSONsche Gleichung

$$\nabla^2 T = -\frac{W}{k} .$$

beschrieben. Hierbei ist W die in der Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Wärmemenge.

Beim ebenen Deformationszustand, bei dem alle Ursachen und Folgen nur von den Veränderlichen x_1 und x_2 abhängen, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &(\mu + \alpha) \nabla_1^2 u_1 + (\lambda + \mu - \alpha)\, \partial_1 e + 2\alpha\, \partial_2 \varphi_3 = \nu\, \partial_1 T , \\ &(\mu + \alpha) \nabla_1^2 u_2 + (\lambda + \mu - \alpha)\, \partial_2 e - 2\alpha\, \partial_1 \varphi_3 = \nu\, \partial_2 T , \\ &[(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha]\, \varphi_3 + 2\alpha\, (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = 0 . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Im „zweiten" ebenen Problem, das durch die Vektoren $\boldsymbol{u} \equiv (0, 0, u_3)$, $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, 0)$ charakterisiert ist, treten keine Temperaturglieder auf. Die Größen u_3, φ_1, φ_2 sind also nicht vom Temperaturfeld $T(x_1, x_2)$ abhängig.

Im Fall eines axialsymmetrischen Spannungs- und Deformationszustandes erhalten wir das folgende System von Differentialgleichungen der Thermoelastizität:

$$\begin{aligned} &(\mu + \alpha)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) u_r + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial e}{\partial r} - 2\alpha \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial z} = \nu \frac{\partial T}{\partial r} , \\ &(\mu + \alpha) \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial e}{\partial z} + 2\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\, \varphi_\theta) = \nu \frac{\partial T}{\partial z} , \\ &(\gamma + \varepsilon)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) \varphi_\theta + 2\alpha \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) - 4\alpha\, \varphi_\theta = 0 . \end{aligned} \tag{6.4}$$

In dem Gleichungssystem, in dem $\boldsymbol{u} \equiv (0, u_\theta, 0)$, $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_r, 0, \varphi_z)$ ist (siehe Gleichung (1.13)), treten keine thermischen Glieder auf. Die Größen u_θ, φ_r, φ_z sind nicht vom Temperaturfeld $T(r, z)$ abhängig.

7. Das ebene Problem der Thermoelastizität

Wir führen in das Gleichungssystem (6.3) die elastischen Potentiale Φ, Ψ ein, die durch die Beziehungen

$$u_1 = \partial_1 \Phi + \partial_2 \Psi\,, \qquad u_2 = \partial_2 \Phi - \partial_1 \Psi \tag{7.1}$$

definiert sind.

Wir erhalten als Ergebnis die folgenden CAUCHY-RIEMANNschen Relationen

$$\begin{aligned} &\partial_1 (\nabla_1^2 \Phi - m\,T) + \frac{2\,\mu}{\lambda + 2\,\mu} \partial_2 (l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3 = 0\,, \\ &\partial_2 (\nabla_1^2 \Phi - m\,T) - \frac{2\,\mu}{\lambda + 2\,\mu} \partial_1 (l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3 = 0\,, \qquad m = \frac{\nu}{\lambda + 2\,\mu}\,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Wir haben dabei die dritte Gleichung der Gruppe (6.3) benutzt, die unter Berücksichtigung von (7.1) die Form

$$\nabla_1^2 \psi = 2\,(\tau^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3\,, \qquad \tau^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\,\alpha} \tag{7.3}$$

annimmt.

Aus den Beziehungen (7.2) erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\nabla_1^2\,\nabla_1^2\,\Phi = m\,\nabla_1^2 T\,, \qquad \nabla_1^2\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3 = 0\,. \tag{7.4}$$

Die Lösung dieser Gleichungen kann durch

$$\Phi = \Phi' + \Phi''\,, \qquad \varphi_3 = \varphi_3' + \varphi_3'' \tag{7.5}$$

zusammengesetzt werden. Nehmen wir ferner an, daß $\varphi_3' = 0$ sowie daß Φ' ein partikuläres Integral der Gleichung

$$\nabla_1^2\,\Phi' - m\,T = 0 \tag{7.6}$$

ist. Wenn der Körper begrenzt ist, kann angenommen werden, daß auf dem Rande $\Phi' = 0$ ist. Mit der Funktion Φ' sind die Spannungen $\sigma_{ji}' \neq 0$, $\mu_{ji}' = 0$ verbunden, wobei die Spannungen σ_{ji}' einen symmetrischen Tensor bilden. Es gilt

$$\sigma_{ji}' = 2\,\mu\,(\Phi'_{,ij} - \delta_{ij}\,\Phi'_{,kk})\,, \qquad \mu_{ji}' = 0\,. \tag{7.7}$$

Die Funktionen Φ'' und φ_3'' müssen die homogenen Gleichungen

$$\nabla_1^2\,\nabla_1^2\,\Phi'' = 0\,, \qquad \nabla_1^2\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3 = 0 \tag{7.8}$$

sowie die CAUCHY-RIEMANNschen Relationen

$$\partial_1 \nabla_1^2\,\Phi'' + \frac{2\,\mu}{\lambda + 2\,\mu} \partial_2\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3'' = 0\,, \qquad \partial_2 \Delta_1^2\,\Phi'' - \frac{2\,\mu}{\lambda + 2\,\mu} \partial_1\,(l^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3'' = 0 \tag{7.9}$$

erfüllen. Die Gleichung (7.3) nimmt hier die Form

$$\nabla_1^2 \Psi'' = 2\,(\tau^2\,\nabla_1^2 - 1)\,\varphi_3'' \tag{7.10}$$

an. Wenn der Rand spannungsfrei sein soll, müssen die Bedingungen

$$(\sigma_{\beta\alpha}' + \sigma_{\beta\alpha}'')\,\eta_\beta = 0\,, \qquad (\mu_{\beta 3}' + \mu_{\beta 3}'')\,\eta_\beta = 0\,, \qquad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{7.11}$$

erfüllt werden.

Untersuchen wir nun den einfach zusammenhängenden Fall eines unendlich langen Zylinders, der auf der Randfläche erwärmt wird. Die Zylinderachse sei mit der Achse x_3 identisch.

Bei Voraussetzung eines stationären Wärmeflusses ist $\nabla^2 T = 0$. Die Gleichungen (7.4) werden homogen. Die Lösung des Gleichungssystems (7.4) führt bei homogenen Randbedingungen (7.11) nur dann zu der trivialen Lösung

$$\Phi \equiv 0\,, \qquad \varphi_3 \equiv 0\,, \qquad \Psi \equiv 0\,, \qquad x \in V\,, \tag{7.12}$$

wenn die Temperatur T im Zylinderquerschnitt konstant ist. In diesem Fall sind nämlich auch die Bedingungen (7.2) erfüllt. Die einzige von Null verschiedene Spannung ist die Spannung σ_{33}. Wir haben jetzt

$$\sigma_{33} = \lambda\,\gamma_{kk} - \nu\,T = \frac{2\,\nu\,T\,\lambda}{2\,(\lambda + \mu)} - \nu\,T = -\frac{\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)}{\lambda + \mu} \alpha_t\,T\,, \tag{7.13}$$

was mit dem in [8] erhaltenen Ergebnis bei Benutzung der AIRY-MINDLINschen Spannungsfunktion übereinstimmt.

Wir haben hier für den mikropolaren Körper eine bedeutende Einschränkung erhalten. Im HOOKEschen Körper genügt es nämlich, die homogene Wärmeleitungsgleichung zu erfüllen, damit die Spannungen σ_{ji} mit Ausnahme von σ_{33} gleich Null sind [5].

8. Axialsymmetrische Probleme der Thermoelastizität

Den Ausgangspunkt unserer Überlegungen bildet das System der Differentialgleichungen (6.4). Wenn wir wie in Abschnitt 4 verfahren, indem wir die Potentiale Φ, ψ und ϑ einführen, kommen wir zu dem Gleichungssystem

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = m\,\nabla^2 T\,, \tag{8.1}$$

$$\nabla^2\,(l^2\,\nabla^2 - 1)\,\vartheta = 0\,. \tag{8.2}$$

Die Funktionen ϑ und ψ sind durch die Gleichung

$$\nabla^2\psi = -2\,(\tau^2\,\nabla^2 - 1)\,\vartheta\,, \qquad \tau^2 = \frac{\gamma+\varepsilon}{4\,\alpha} \tag{8.3}$$

miteinander verbunden. Zu diesen Gleichungen müssen die Beziehungen

$$\begin{aligned} &\nabla^2\,\Phi - m\,T - \frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\,\frac{\partial}{\partial z}(l^2\,\nabla^2 - 1)\,\vartheta = 0\,,\\ &\frac{\partial}{\partial z}[\nabla^2\,\Phi - m\,T] + \frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(l^2\,\nabla^2 - 1)\,\vartheta = 0 \end{aligned} \tag{8.4}$$

hinzugefügt werden.

Die Lösung des Gleichungssystems (8.1), (8.2) stellen wir in der Form

$$\Phi = \Phi' + \Phi''\,, \qquad \vartheta = \vartheta' + \vartheta'' \tag{8.5}$$

dar.

Für die Funktionen Φ', ϑ' nehmen wir derart an, daß

$$\nabla^2\Phi' - m\,T = 0\,, \qquad \vartheta' = 0 \tag{8.6}$$

gilt. Durch diese Annahme sind die Gleichungen (8.1), (8.2) sowie die Beziehungen (8.4) erfüllt. Die Funktion Φ' wird zum partikulären Integral der Gleichung (8.1). Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sigma'_{rr} = 2\,\mu\,\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \lambda\,e' - \nu\,T = 2\,\mu\left(\frac{\partial^2\Phi'}{\partial r^2} - \nabla^2\Phi'\right),\\ &\sigma'_{\theta\theta} = 2\,\mu\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi'}{\partial r} - \nabla^2\Phi'\right) \qquad \sigma'_{zz} = 2\,\mu\left(\frac{\partial^2\Phi'}{\partial z^2} - \nabla^2\Phi'\right), \qquad \sigma'_{rz} = \sigma'_{zr} = 2\,\mu\,\frac{\partial^2\Phi'}{\partial r\,\partial z}\,,\\ &\mu'_{r\theta} = \mu'_{\theta r} = \mu'_{\theta z} = \mu'_{z\theta} = 0\,. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Die Funktionen ϑ'', Φ'' bestimmen wir aus der Lösung der homogenen Gleichungen

$$\nabla^2\nabla^2\Phi'' = 0\,, \qquad \nabla^2\,(l^2\,\nabla^2 - 1)\,\vartheta'' = 0\,. \tag{8.8}$$

Wir berücksichtigen bei unseren weiteren Überlegungen die Beziehung

$$\nabla^2\,\psi'' = -2\,(\tau^2\,\nabla^2 - 1)\,\vartheta'' \tag{8.9}$$

sowie die Beziehungen

$$\nabla^2\Phi'' - \frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\,\frac{\partial}{\partial z}(l^2\,\nabla^2 - 1)\,\vartheta'' = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\Phi'' + \frac{2\,\mu}{\lambda+2\,\mu}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(l^2\,\nabla^2 - 1)\,\vartheta'' = 0\,. \tag{8.10}$$

Wenn wir beispielsweise das Problem des elastischen Halbraums $z \geqq 0$ untersuchen, der in der Ebene $z = 0$ erwärmt ist, so gelten die Randbedingungen

$$T(r,0) = f(r)\,, \qquad \sigma_{zz}(r,0) = 0\,, \qquad \sigma_{zr}(r,0) = 0\,, \qquad \mu_{z\theta}(r,0) = 0\,. \tag{8.11}$$

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\nabla^2 T = 0$ unter der Randbedingung (8.11) ist die Funktion

$$T(r,z) = \int\limits_0^\infty \tilde{f}(\zeta)\,e^{-\zeta z}\,\zeta\,J_0(\zeta\,r)\,d\zeta\,, \qquad \tilde{f}(\zeta) = \int\limits_0^\infty f(r)\,r\,J_0(\zeta\,r)\,dr\,. \tag{8.12}$$

Die Lösung der Gleichung (8.6) — der Einfachheit halber unter Berücksichtigung der Randbedingung $\left.\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$ — ist die Funktion

$$\Phi' = -\frac{m}{2}\int_0^\infty \frac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta}(1+\zeta z)\, e^{-\zeta z} J_0(\zeta r)\, d\zeta\,. \tag{8.13}$$

Aus den Formeln (8.7) berechnen wir die Spannungen σ'_{ji}. Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma'_{zz} &= -\mu m \int_0^\infty \zeta \tilde{f}(\zeta)\,(1+\zeta z)\, e^{-\zeta z} J_0(\zeta r)\, d\zeta\,, \\ \sigma'_{zr} &= -\mu m z \int_0^\infty \zeta^2 \tilde{f}(\zeta)\, e^{-\zeta z} J_1(\zeta r)\, d\zeta \qquad \text{usw.}\,, \\ \mu'_{z\theta} &= \mu'_{\theta z} = \mu'_{r\theta} = \mu'_{\theta r} = 0\,. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Die Gleichungen (8.8) müssen unter den Randbedingungen

$$\sigma'_{zz} + \sigma''_{zz} = 0\,, \qquad \sigma'_{zr} + \sigma''_{zr} = 0\,, \qquad \mu'_{z\theta} + \mu''_{z\theta} = 0 \qquad \text{für } z = 0 \tag{8.15}$$

gelöst werden. Nach Durchführung der zu diesen Randbedingungen gehörigen HANKELschen Transformation haben wir

$$\tilde{\sigma}''_{zz} = \mu m \tilde{f}\,, \qquad \tilde{\sigma}''_{zr} = 0\,, \qquad \tilde{\mu}''_{z\theta} = 0 \qquad \text{für } z = 0\,. \tag{8.16}$$

Diese Aufgabe wurde schon in Abschnitt 4 gelöst. Wenn wir die Formeln (4.15)

$$\tilde{p} = -\mu m \tilde{f}$$

einsetzen und die Spannungen σ'_{ji}, μ'_{ji} zu den Spannungen $\sigma''_{ji}, \mu''_{ji}$ hinzufügen, erhalten wir schließlich die Spannungsausdrücke

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -\mu m \int_0^\infty \zeta \tilde{f}(\zeta)\left[\left(1-\frac{1}{\Delta_0}\right)(1+\zeta z)\, e^{-\zeta z} - \frac{2a_0}{\Delta_0}\zeta^2\left(e^{-\eta z} - \frac{\zeta}{\eta} e^{-\zeta z}\right)\right] J_0(\zeta r)\, d\zeta\,, \\ \sigma_{zr} &= -\mu m \int_0^\infty \zeta \tilde{f}(\zeta)\left[\left(1-\frac{1}{\Delta_0}\right)\zeta z\, e^{-\zeta z} - \frac{2a_0}{\Delta_0}\zeta^2 \frac{\zeta}{\eta}\left(e^{-\eta z} - e^{-\zeta z}\right)\right] J_1(\zeta r)\, d\zeta\,, \\ \mu_{z\theta} &= 2a_0 \mu m \int_0^\infty \frac{\zeta^2 \tilde{f}(\zeta)}{\Delta_0(\zeta)}\left(e^{-\zeta z} - e^{-\eta z}\right) J_1(\zeta r)\, d\zeta \qquad \text{usw.} \end{aligned} \tag{8.17}$$

Wir haben Lösungen erhalten, die mit denen von P. PURI [9] und R. S. DHALIWAL [10] auf anderem Wege erhaltenen Lösungen übereinstimmen.

Es sei noch vermerkt, daß beim Übergang zum HOOKEschen Körper (bei $\alpha = 0$, $\eta = \zeta$, $\Delta_0 = 1$) die Spannungen σ_{zz} und σ_{zr} verschwinden [11]. Der Spannungszustand nimmt eine ebene Form an. Die Momentenspannungen sind gleich Null.

Literatur

1 KUVSHINSKI, E. V., AERO, E. L., Fiz. Tword. Tieła, 5 (1963).
2 PALMOV, M. A., Prikł. Mat. Mech. 28 (1964).
3 ERINGEN, A. C., SUHUBI, E. S., Int. J. Eng. Sci. 2, 189, 389 (1964).
4 NOWACKI, W., Teoria niesymetrycznej sprężystości (Theorie der asymmetrischen Elastizität), PWN, Warszawa 1971.
5 MUSKELISHVILI, I. N., Einige grundlegende Aufgaben der mathematischen Elastizitätstheorie (in russischer Sprache) Moskau 1949, Verlag der Akademie der Wissenschaften.
6 SAVIN, G. N., Grundlagen einer Momentenspannungstheorie der ebenen Elastizität (in russischer Sprache), Kiew 1966.
7 NOWACKI, W., Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. 14, 505 (1966).
8 NOWACKI, W., Arch. Mech. Stos. 22, 1 (1970).
9 PURI, P., Arch. Mech. Stos. 4, 479 (1970).
10 DHALIWAL, R. S., Arch. Mech. Stos. (im Druck).
11 STERNBERG, E., DOWELL, E. L., Mc., Quart. Appl. Math. 14, 4 (1957).

Anschrift: Prof. Dr. W. NOWACKI, Universität Warschau, Inst. für Mechanik, Warszawa/VR Polen, ul. Wiejska 18m8