INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ZAGADNIENIA MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

PROBLEMS OF FLUID-FLOW MACHINES

WYDAWNICTWO Z OKAZJI 40-LECIA
DZIAŁALNOŚCI NAUKOWEJ
PROFESORA ROBERTA SZEWALSKIEGO

JUBILEE EDITION COMMEMORATING
FORTY YEARS OF SCIENTIFIC ACTIVITY
OF PROFESSOR ROBERT SZEWALSKI

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – WARSZAWA 1968

Witold Nowacki*

Polska

TWIERDZENIA WARIACYJNE NIESYMETRYCZNEJ TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

W niniejszej pracy podano trzy twierdzenia niesymetrycznej termosprężystości, twierdzenie o minimum energii potencjalnej, twierdzenie o minimum pracy komplementarnej oraz rozszerzone na zagadnienia termosprężystości twierdzenie wariacyjne E. Reissnera.

Zasada prac wirtualnych doprowadziła do wydobycia analogii sił i momentów masowych. Analogie te wykorzystano dla wyprowadzenia twierdzenia o wzajemności prac.

Podano wreszcie twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania zagadnienia termosprężystego oraz uogólniono wzory Majziela na zagadnienia niesymetrycznej termosprężystości.

Pracę kończy się uwagami, dotyczącymi nader prostych stanów termosprężystej deformacji ciała

1. Wprowadzenie

W ostatnich latach obserwujemy wielki rozwój teorii niesymetrycznej sprężystości. Teoria ta zapoczątkowana przez W. Voigta [1] i rozszerzona przez braci E. i F. Cosseratów [2], bierze pod uwagę nie tylko działanie sił powierzchniowych, ale i obciążeń momentowych na powierzchni ciała odkształcalnego. Obok naprężeń powstają w ciele momenty naprężeniowe (couple-stresses), przy czym oba pola tensorowe są niesymetryczne. W teorii ośrodka Cosserat – przyjęto pewne ograniczenia, mianowicie założono, że wektor rotacji $\vec{\omega}$ związany jest z wektorem przemieszczenia $\vec{\mathbf{u}}$ zależnością: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{u}}$.

Truesdell i Toupin [3], a następnie Aero i Kuvshinski [4] dali w swych pracach współczesne sformułowanie teorii ośrodka Cosserat. Szereg twierdzeń i metod o podstawowym znaczeniu zawdzięczamy pracom Mindlina i Tierstena [5] oraz Grioli [6].

W ostatnich latach Aero i Kuvshinski [7] oraz Palmow [8] Eringen i Suhubi [9] rozwinęli teorię niesymetrycznej sprężystości na ośrodek sprężysty i jednorodny, odstępując od ograniczenia, wiążącego wektor przemieszczenia $\vec{\mathbf{u}}$ i wektor rotacji $\vec{\omega}$, traktując te dwa pola jako niezależne od siebie.

Rozszerzenie tej ostatniej teorii na zagadnienia sprzężonej i niesymetrycznej termosprężystości było przedmiotem rozważań autora niniejszej pracy [10, 11]. W pracach tych wyprowadzono równania konstytutywne oraz podstawowe równania niesymetrycznej termosprężystości, na bazie termodynamiki procesów nieodwracalnych. Wyprowa-

---

* Prof. dr inż., Uniwersytet Warszawski. Członek rzeczywisty PAN.

dzono również twierdzenie o pracy wirtualnej, twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań oraz twierdzenie o wzajemności dla zagadnienia dynamicznego.

W niniejszej pracy zajmiemy się w sposób szczegółowy twierdzeniami wariacyjnymi niesymetrycznej termosprężystości, ograniczonymi do przypadku statycznego, związanego z ustalonym przepływem ciepła. Wyprowadzimy twierdzenia o minimum energii potencjalnej, o minimum energii komplementarnej oraz rozszerzymy twierdzenie E. REISSNERA [12] na zagadnienie niesymetrycznej termosprężystości. Przedstawimy twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania problemu termosprężystości i na nowej drodze wyprowadzimy twierdzenia o wzajemności prac.

Zbierzmy pokrótce podstawowe związki i równania, wyprowadzone w pracach [10 i 11]. Energia F, odniesiona do jednostki objętości, ma postać

$$F=\mu\gamma_{(ij)}\gamma_{(ij)}+\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}\gamma_{\langle ij\rangle}+\gamma\kappa_{(ij)}\kappa_{(ij)}+\varepsilon\kappa_{\langle ij\rangle}\kappa_{\langle ij\rangle}+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn}+\frac{\beta}{2}\kappa_{kk}\kappa_{nn}-\nu\gamma_{kk}\theta-\frac{c_\varepsilon}{2T_0}\theta^2. \tag{1.1}$$

Tutaj jest

$$\gamma_{ji}=u_{i,j}-\varepsilon_{kji}\omega_k,\qquad \kappa_{ji}=\omega_{i,j},\qquad i,j,k=1,2,3. \tag{1.2}$$

Przez γ_{ij} oznaczamy niesymetryczny tensor odkształcenia, przez κ_{ji} niesymetryczny tensor skrętno-giętny. Symbole ( ) oraz $\langle\ \rangle$ odnoszą się do symetrycznej i skośno-symetrycznej części tensora. Przez u_i oznaczamy składowe wektora przemieszczenia, przez ω_i składowe wektora rotacji. W związku (1.1) wyprowadzono oznaczenie $\theta=T-T_0$, gdzie T jest temperaturą bezwzględną, a T_0 temperaturą stanu naturalnego, w którym naprężenia i odkształcenia są równe zeru. Stałe μ, λ są stałymi Lamé'go, α, γ, ε, β są dalszymi stałymi materiałowymi. Stałe te odnoszą się do stanu izotermicznego. Dalej $\gamma=3K\alpha_t$, gdzie $K=\lambda+\frac{2}{3}\mu$ jest modułem ściśliwości, a α_t współczynnikiem liniowej rozszerzalności termicznej. Energia swobodna jest formą kwadratową jej argumentów, dodatnio określoną. Stałe materiałowe spełniać winny następujące nierówności:

$$\mu>0,\quad \lambda>0,\quad \mu-\alpha>0,\quad \alpha>0,\quad 2\gamma+3\beta>0,\quad \gamma>0,\quad \varepsilon>0. \tag{1.3}$$

Ponieważ energia swobodna jest różniczką zupełną, zatem

$$\sigma_{ji}=\frac{\partial F}{\partial\gamma_{ji}},\qquad \mu_{ji}=\frac{\partial F}{\partial\kappa_{ji}},\qquad S=-\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Powyższe zależności prowadzą do następujących związków:

$$\sigma_{ji}=2\mu\gamma_{(ji)}+2\alpha\gamma_{\langle ji\rangle}+(\lambda\gamma_{kk}-\nu\theta)\delta_{ji}, \tag{1.4}$$

$$\mu_{ji}=2\gamma\kappa_{(ji)}+2\varepsilon\kappa_{\langle ji\rangle}+\beta\kappa_{kk}\delta_{ji}, \tag{1.5}$$

$$S=\nu\gamma_{kk}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta. \tag{1.6}$$

W związkach tych przez σ_{ji} oznaczono niesymetryczny tensor naprężenia, przez μ_{ji} niesymetryczny tensor naprężeń momentowych, S jest entropią odniesioną do jednostki objętości.

Jeśli wielkości σ_{ji} i μ_{ji} z (1.4) i (1.5) wstawimy do równań równowagi

$$\sigma_{ji,j}+X_i=0, \quad \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{ji,j}+Y_i=0, \tag{1.7}$$

a wielkości γ_{ji} i κ_{ji} wyrazimy przez przemieszczenia u_i i obroty ω_i, to w rezultacie otrzymamy układ sześciu równań wyrażonych w przemieszczeniach i obrotach

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\mathbf{u}}-(\mu+\alpha)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\mathbf{u}}+2\alpha\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{\omega}}+\vec{\mathbf{X}}=\nu\operatorname{grad}\theta, \\ (\beta+2\gamma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{\omega}}-(\gamma+\varepsilon)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{\omega}}+2\alpha\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{\omega}}-4\alpha\vec{\boldsymbol{\omega}}+\vec{\mathbf{Y}}=0.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Temperaturę θ występującą w pierwszym równaniu (1.8) wyznaczymy z równania przewodnictwa cieplnego

$$\nabla^2\theta=-W/k. \tag{1.9}$$

Tutaj W jest intensywnością źródła ciepła; ilością ciepła, wytworzoną w jednostce czasu i objętości, k jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego. Do równań (1.8) i (1.9) dodać należy warunki brzegowe.

Załóżmy, że na części powierzchni A, oznaczonej przez A_u, zadane będą przemieszczenie $\hat{u}_i$ i obroty $\hat{\omega}_i$. Na części powierzchni $A_\sigma=A-A_u$ niech zadane będą obciążenia $\hat{p}_i$ i momenty $\hat{m}_i$. W ten sposób warunki brzegowe przyjmą następującą postać:

$$\begin{gathered}u_i=\hat{u}_i(\mathbf{x}), \quad \omega_i=\hat{\omega}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in A_u, \\ p_i=\sigma_{ji}n_j=\hat{p}_i(\mathbf{x}), \quad m_i=\mu_{ji}n_j=\hat{m}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in A_\sigma.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Przez n_i oznaczamy składowe wektora jednostkowego normalnej do powierzchni A, przy czym zwrot tego wektora kierujemy na zewnątrz powierzchni A. Warunek brzegowy dla równania przewodnictwa cieplnego może przyjąć rozmaitą postać. Najczęściej zakłada się, że na powierzchni zadana jest temperatura θ lub też przepływ ciepła $-\lambda_0\,\partial\theta/\partial n$.

2. Twierdzenie o minimum energii potencjalnej

Niech ciało znajduje się w stanie równowagi statycznej, pod działaniem obciążeń zewnętrznych i wzrostu temperatury. Niech na A_u zadane są przemieszczenia u_i i rotacje ω_i, a na A_σ obciążenia p_i i momenty m_i.

Załóżmy, że istnieje układ przemieszczeń u_i i rotacji ω_i spełniający równania równowagi (1.10). Rozpatrzmy przemieszczenia u_i i obroty ω_i zgodne z warunkami ograniczającymi ruch ciała. Wirtualne przemieszczenia δu_i i obroty $\delta\omega_i$ winny być funkcjami klasy $C^{(3)}$, przyjmującymi wartości zerowe na A_u, a dowolne na A_σ. Zasada prac wirtualnych przyjmuje postać [1, 2]

$$\int_V (X_i\,\delta u_i+Y_i\,\delta\omega_i)\,dV+\int_A (p_i\,\delta u_i+m_i\,\delta\omega_i)\,dA=\int_V (\sigma_{ji}\,\delta\gamma_{ji}+\mu_{ji}\,\delta\kappa_{ji})\,dV. \tag{2.1}$$

Głosi ona, że wirtualny przyrost pracy sił zewnętrznych jest równy wirtualnemu przyrostowi pracy sił wewnętrznych. Równanie to przekształcimy, zważywszy na (1.4) i (1.5) jak następuje

$$\int_V (X_i \delta u_i + Y_i \delta\omega_i)\, dV + \int_A (p_i \delta u_i + m_i \delta\omega_i)\, dA = \delta H_\varepsilon - \nu \int_V \theta \delta\gamma_{kk}\, dV. \tag{2.2}$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenie

$$\delta H_\varepsilon = \int_V [2\mu\gamma_{(ij)}\delta\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}\delta\gamma_{\langle ij\rangle} + 2\gamma\kappa_{(ij)}\delta\kappa_{(ij)} + 2\varepsilon\kappa_{\langle ij\rangle}\delta\kappa_{\langle ij\rangle} +$$
$$+ \lambda\gamma_{kk}\delta\gamma_{nn} + \beta\kappa_{kk}\delta\kappa_{nn}]\, dV,$$

które w przypadku zagadnienia izotermicznego odpowiada przyrostowi wirtualnemu pracy odkształcenia.

Ponieważ siły i momenty masowe oraz obciążenia i momenty powierzchniowe nie doznają wariacji, możemy równaniu (2.2) nadać następujący kształt

$$\delta\Gamma = 0, \tag{2.3}$$

gdzie

$$\Gamma = H_\varepsilon - \int_V (X_i u_i + Y_i \omega_i)\, dV - \int_{A_\sigma} (p_i u_i + m_i \omega_i)\, dA - \nu \int_V \theta\gamma_{kk}\, dV,$$

$$H_\varepsilon = \int_V [\mu\gamma_{(ij)}\gamma_{(ij)} + \alpha\gamma_{\langle ij\rangle}\gamma_{\langle ij\rangle} + \gamma\kappa_{(ij)}\kappa_{(ij)} + \varepsilon\kappa_{\langle ij\rangle}\kappa_{\langle ij\rangle} + \tag{2.4}$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn} + \frac{\beta}{2}\kappa_{kk}\kappa_{nn}]\, dV.$$

Wielkość Γ zwana energią potencjalną, staje się extremum. Postępując analogiczną drogą jak w teorii symetrycznej sprężystości, okazać można, że funkcjonał Γ jest absolutnym minimum.

Twierdzenie o minimum energii potencjalnej głosi, że ze wszystkich przemieszczeń u_i i obrotów ω_i, spełniających zadane warunki brzegowe, tylko jedno pole przemieszczeń czyni energię potencjalną minimum absolutnym, a mianowicie to pole przemieszczeń i obrotów, które ponadto spełnia warunki równowagi wewnątrz ciała.

Również udowodnić daje się bez trudu twierdzenie odwrotne, które głosi, że jeśli energia potencjalna posiada absolutne minimum, to przemieszczenia winny spełniać warunki brzegowe: $u_i = \hat{u}_i$, $\omega_i = \hat{\omega}_i$ na A_u oraz $p_i = \sigma_{ji} n_j = \hat{p}_i$ i $m_i = \mu_{ji} n_j = \hat{m}_i$ na A_σ oraz równania równowagi we wnętrzu ciała.

W szczególnym przypadku braku sił masowych oraz przy zadanych przemieszczeniach u_i i obrotach ω_i na powierzchni A_u, równanie (2.3) przechodzi na

$$\delta(H_\varepsilon - \nu \int_V \theta\gamma_{kk}\, dV) = 0. \tag{2.3'}$$

Twierdzenie o minimum energii potencjalnej znajdzie zastosowanie przy wyprowadzaniu równań różniczkowych przemieszczeniowych i związanych z nimi naturalnych warunków brzegowych dla zagadnienia zginania belek, płyt, membran, powłok, w których naprężenia σ_{ji} i naprężenia momentowe μ_{ji}, wywołane są działaniem pola temperatury. Wróćmy do równania (2.2) i przekształćmy ostatnią całkę, występującą po prawej stronie tego równania

$$\nu \int_V \theta \delta\gamma_{kk} dV = \nu \int_V \theta \delta u_{k,k} dV = \nu \int_A \theta n_k \delta u_k dA - \nu \int_V \theta_{,k} \delta u_k dV. \tag{2.5}$$

Po wstawieniu (2.5) do (2.2) otrzymamy

$$\delta H_\varepsilon = \int_V [(X_i - \nu\theta_{,i})\delta u_i + Y_i \delta\omega_i] dV + \int_A [(p_i + \nu\theta n_i)\delta u_i + m_i \delta\omega_i] dA. \tag{2.6}$$

Rozpatrzmy teraz to samo ciało (o tym samym kształcie i z tego samego materiału), ale znajdujące się w warunkach izotermicznych. Niech na ciało to działają siły masowe X_i^* oraz momenty masowe Y_i^*. Niech na A_σ zadane będą obciążenia p_i^* oraz momenty m_i^*, a na A_σ niech zadane będą przemieszczenia u_i^* i obroty ω_i^*.

Stawiamy sobie następujące pytanie. Jakie powinny być wielkości X_i^*, Y_i^* wewnątrz ciała oraz wielkości p_i^*, m_i^* na A_σ przy identycznych warunkach brzegowych na A_u, aby w zagadnieniu termosprężystym i izotermicznym uzyskać to samo pole przemieszczeń u_i i obrotów ω_i. Porównać należy (2.6) z równaniem pracy wirtualnej wypisanej dla stanu izotermicznego

$$\delta H_\varepsilon = \int_V (X_i^* \delta u_i + Y_i^* \delta\omega_i) dV + \int_A (p_i^* \delta u_i + m_i^* \delta\omega_i) dA. \tag{2.7}$$

Ze względu na identyczne pole przemieszczeń i obrotów u_i, ω_i dla obu ciał, lewe strony równań (2.6) i (2.7) winny być jednakowe. Otrzymamy zatem następujące związki

$$\begin{aligned} &X_i^* = X_i - \nu\theta_{,i}, \quad Y_i^* = Y_i, \quad \mathbf{x} \in V, \\ &p_i^* = p_i + \nu\theta n_i, \quad m_i^* = m_i, \quad \mathbf{x} \in A_\sigma, \\ &u_i^* = u_i, \quad \omega_i^* = \omega_i, \quad \mathbf{x} \in A_u. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Zależności (2.8) przedstawiają analogię sił i momentów masowych, przy pomocy których każde ustalone zagadnienie termosprężystości doprowadzić można do izotermicznego zagadnienia niesymetrycznej sprężystości.

3. Druga postać twierdzenia o minimum energii potencjalnej

Rozpatrzmy pole przemieszczeń u_i i pole obrotów ω_i i przyporządkowane im naprężenia σ_{ji} oraz momenty naprężeniowe μ_{ji} jak też odkształcenia γ_{ji} oraz składowe tensora skrętno-giętnego κ_{ji}.

Niech dla rozpatrywanych pól u_i, ω_i spełnione będą równania równowagi (1.7) oraz warunki brzegowe (1.10).

Oznaczmy teraz przez u_i^*, ω_i^* inne pole przemieszczeń i obrotów, różne od u_i, ω_i. Od funkcji u_i^*, ω_i^* żądamy jedynie spełnienia warunków kinematycznych na A_u

$$u_i^* = \hat{u}_i, \quad \omega_i^* = \hat{\omega}_i, \quad \mathbf{x} \in A_u. \tag{3.1}$$

Funkcjom u_i^*, ω_i^* przyporządkowane są tensory σ_{ji}^*, μ_{ji}^* oraz γ_{ji}^*, κ_{ji}^*. Naprężenia σ_{ji}^* oraz naprężenia momentowe μ_{ji}^* nie muszą spełniać równań równowagi.

Pomnóżmy pierwsze z równań równowagi (1.7) przez $u_i^*-u_i$ i scałkujmy je po obszarze ciała. Podobnie uczyńmy z drugim równaniem (1.7) pomnożonym przez $\omega_i^*-\omega_i$. Mamy zatem

$$\int_V (\sigma_{ji,j}+X_i)(u_i^*-u_i)\,dV=0\,, \tag{3.2}$$

$$\int_V (\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{j\,,j}+Y_i)(\omega_i^*-\omega_i)\,dV=0\,. \tag{3.3}$$

Po prostych przekształceniach doprowadzamy powyższe równania do postaci

$$\int_V X_i(u_i^*-u_i)\,dV+\int_{A_\sigma} p_i(u_i^*-u_i)\,dA=\int_V \sigma_{ji}(u_i^*-u_i)_{,j}\,dV\,, \tag{3.4}$$

$$\int_V Y_i(\omega_i^*-\omega_i)\,dV+\int_{A_\sigma} m_i(\omega_i^*-\omega_i)\,dA=\int_V [\mu_{ji}(\omega_i^*-\omega_i)_{,j}-\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}(\omega_i^*-\omega_i)]\,dV\,. \tag{3.5}$$

Wykorzystaliśmy tu następujące zależności występujące na A_u:

$$u_i^*-u_i=0\,,\qquad \omega_i^*-\omega_i=0,\qquad \mathbf{x}\in A_u\,.$$

Stąd też w całce powierzchniowej równań (3.4) i (3.5) występuje całkowanie po A_σ, a nie po całej powierzchni A. Zważywszy, że zgodnie ze związakmi (1.2) jest

$$u_{i,j}^*-u_{i,j}=\gamma_{ji}^*-\gamma_{ji}+\varepsilon_{kji}(\omega_k^*-\omega_k),$$

doprowadzamy układ równań (3.4) i (3.5) do jednego równania

$$\begin{aligned}\int_V [X_i(u_i^*-u_i)+Y_i(\omega_i^*-\omega_i)]\,dV+\int_{A_\sigma} [p_i(u_i^*-u_i)+m_i(\omega_i^*-\omega_i)]\,dA=&\\ =\int_V [\sigma_{ji}(\gamma_{ji}^*-\gamma_{ji})+\mu_{ji}(\kappa_{ji}^*-\kappa_{ji})]\,dV\,.&\end{aligned} \tag{3.6}$$

Oznaczmy przez $F(\gamma_{ji},\kappa_{ji},\theta)$ energię swobodną związaną z polem u_i, ω_i, przez $F^*(\gamma_{ji}^*, \kappa_{ji}^*,\theta)$ energią swobodną odpowiadającą polu u_i^*, ω_i^*. Wreszcie przez $F(\gamma_{ji}^*-\gamma_{ji},\kappa_{ji}^*-\kappa_{ji},\theta)$ oznaczmy energię swobodną związaną z przyrostami $u_i^*-u_i$, $\omega_i^*-\omega_i$. Zarówno $F(\gamma_{ji}, \kappa_{ji},\theta)$ jak i $F^*(\gamma_{ji}^*,\kappa_{ji}^*,\theta)$ oraz $F(\gamma_{ji}^*-\gamma_{ji},\kappa_{ji}^*-\kappa_{ji},\theta)$ są funkcjami dodatnio określonymi. Posługując się równaniem (1) znajdziemy, że

$$\begin{aligned}F(\gamma_{ji}^*-\gamma_{ji},\kappa_{ji}^*-\kappa_{ji},\theta)=F^*(\gamma_{ji}^*,\kappa_{ji}^*,\theta)-F(\gamma_{ji},\kappa_{ji},\theta)-&\\ -(\gamma_{ji}^*-\gamma_{ji})(\sigma_{ji}+\nu\delta_{ij}\theta)-(\kappa_{ji}^*-\kappa_{ji})\mu_{ji}-\frac{c_\varepsilon\theta^2}{2T_0}>0\,.&\end{aligned} \tag{3.7}$$

Całkując ten związek po obszarze ciała oraz wprowadzając wielkość $H_\varepsilon(\gamma_{ji},\kappa_{ji})$ ze wzoru (2.4), otrzymamy

$$\begin{aligned}H_\varepsilon(\gamma_{ji}^*-\gamma_{ji},\kappa_{ji}^*-\kappa_{ji})=H_\varepsilon^*(\gamma_{ji}^*,\kappa_{ji}^*)-H_\varepsilon(\gamma_{ji},\kappa_{ji})-&\\ -\int_V [(\gamma_{ji}^*-\gamma_{ji})(\sigma_{ji}+\nu\theta\delta_{ij})+(\kappa_{ji}^*-\kappa_{ji})\mu_{ji}]\,dV>0\,.&\end{aligned} \tag{3.8}$$

Łącząc ze sobą związki (3.6) i (3.8) otrzymamy następującą nierówność

$$H_\varepsilon^* - \int_V (X_i u_i^* + Y_i \omega_i^*)\, dV - \int_{A_\sigma} (p_i u_i^* + m_i \omega_i^*)\, dA - \nu \int_V \theta \gamma_{kk}^*\, dV >$$
$$> H_\varepsilon - \int_V (X_i u_i + Y_i \omega_i)\, dV - \int_{A_\sigma} (p_i u_i + m_i \omega_i)\, dA - \nu \int_V \theta \gamma_{kk}\, dV. \tag{3.9}$$

Zgodnie z oznaczeniami punktu 2 nierówność tę przedstawić możemy w postaci

$$\Gamma^* > \Gamma. \tag{3.10}$$

Nierówność ta wskazuje na to, że energia potencjalna pola u_i, ω_i, które spełnia wszystkie warunki brzegowe i równanie równowagi, jest mniejsza od energii potencjalnej pola u_i^*, ω_i^*, które spełnia jedynie warunki brzegowe na A_u, nie spełniając równań równowagi.

4. Twierdzenie o minimum energii komplementarnej

Rozwiążmy równanie (1.4) względem γ_{ji}, a równanie (1.5) względem κ_{ji}.

$$\gamma_{ij} = 2\mu' \sigma_{(ij)} + 2\alpha' \sigma_{\langle ij\rangle} + \lambda' \delta_{ij} \sigma_{kk} + \alpha_t \theta \delta_{ij}, \tag{4.1}$$

$$\kappa_{ij} = 2\gamma' \mu_{(ij)} + 2\varepsilon' \mu_{\langle ij\rangle} + \beta' \delta_{ij} \mu_{kk}. \tag{4.2}$$

Wprowadziliśmy tu następujące oznaczenia:

$$2\mu' = \frac{1}{2\mu}, \quad 2\alpha' = \frac{1}{2\alpha}, \quad 2\gamma' = \frac{1}{2\gamma}, \quad 2\varepsilon' = \frac{1}{2\varepsilon},$$

$$\lambda' = -\frac{\lambda}{6\mu K}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{6\gamma\Omega}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad \Omega = \gamma + \frac{2}{3}\beta.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\gamma_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ji}}, \quad \kappa_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \mu_{ji}} \tag{4.3}$$

jeśli F wyrazimy jako funkcję naprężeń σ_{ji}, naprężeń momentowych μ_{ji} oraz temperatury θ. Wprowadzimy oznaczenie

$$W_\sigma = \mu' \sigma_{(ij)} \sigma_{(ij)} + \alpha' \sigma_{\langle ij\rangle} \sigma_{\langle ij\rangle} + \gamma' \mu_{(ij)} \mu_{(ij)} + \varepsilon' \mu_{\langle ij\rangle} \mu_{\langle ij\rangle} + \frac{\lambda'}{2} \sigma_{kk} \sigma_{nn} + \frac{\beta'}{2} \mu_{kk} \mu_{nn}. \tag{4.4}$$

Wtedy

$$\gamma_{ji} = \frac{\partial W_\sigma}{\partial \sigma_{ji}} + \alpha_t \theta \delta_{ij}, \quad \kappa_{ji} = \frac{\partial W_\sigma}{\partial \mu_{ji}}. \tag{4.5}$$

Rozpatrzmy całkę

$$I = \int_V (\gamma_{ji} \delta\sigma_{ji} + \kappa_{ji} \delta\mu_{ji})\, dV. \tag{4.6}$$

W wyrażeniu tym $\delta\sigma_{ji}$, $\delta\mu_{ji}$ oznaczają wirtualne przyrosty naprężeń i naprężeń momentowych. Przyrosty te traktujemy jako funkcje klasy $C^{(2)}$, wielkości bardzo małe i dowolne. Zważywszy na (4.5), mamy

$$\int_V (\gamma_{ji} \delta\sigma_{ji} + \kappa_{ji} \delta\mu_{ji})\, dV = \delta H_\sigma + \alpha_t \int_V \theta \delta\sigma_{kk}\, dV, \tag{4.7}$$

gdzie

$$\delta H_\varepsilon = \int_V \left(\frac{\partial W_\sigma}{\partial \sigma_{ji}} \delta\sigma_{ji} + \frac{\partial W_\sigma}{\partial \mu_{ji}} \delta\mu_{ji} \right) dV.$$

Przekształcając lewą stronę równania (4.7) i biorąc pod uwagę związek (1.2) oraz wprowadzając oznaczenia $\delta p_i = \delta\sigma_{ji} n_j$, $\delta m_i = \delta\mu_{ji} n_j$ otrzymamy

$$\int_A (u_i \delta p_i + \omega_i \delta m_i)\, dA - \int_V \{u_i \delta\sigma_{ji,j} + \omega_i [\varepsilon_{ijk} \delta\sigma_{jk} + \delta\mu_{ji,j}]\}\, dV = \delta H_\sigma + \alpha_t \int_V \theta \delta\sigma_{kk}\, dV. \quad (4.8)$$

Żądamy, aby naprężenia $\sigma_{ji} + \delta\sigma_{ji}$ oraz naprężenia momentowe $\mu_{ji} + \delta\mu_{ji}$ były statycznie możliwe. Oznacza to, że wewnątrz obszaru V spełnione winny być warunki równowagi

$$\sigma_{ji,j} + \delta\sigma_{ji,j} + X_i + \delta X_i = 0, \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{ijk}(\sigma_{jk} + \delta\sigma_{jk}) + \mu_{ji,j} + \delta\mu_{ji,j} + Y_i + \delta Y_i = 0, \quad (4.10)$$

a na powierzchni A_σ warunki brzegowe

$$\begin{aligned} p_i + \delta p_i &= (\sigma_{ji} + \delta\sigma_{ji})\, n_j, \\ m_i + \delta m_i &= (\mu_{ji} + \delta\mu_{ji})\, n_j. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Wielkości $\delta\sigma_{ji}$ i $\delta\mu_{ji}$ na A_u mogą być dowolne.

Ze względu na równanie równowagi (1.7) i warunki brzegowe (1.10) mamy

$$\delta\sigma_{ji,j} + \delta X_i = 0, \quad \varepsilon_{ijk} \delta\sigma_{jk} + \delta\mu_{ji,j} + \delta Y_i = 0, \quad \mathbf{x} \in V$$

oraz

$$\delta p_i = \delta\sigma_{ji} n_j, \quad \delta m_i = \delta\mu_{ji} n_j, \quad \mathbf{x} \in A_\sigma.$$

Ponieważ chcemy porównać wszelkie pola naprężeń i naprężeń momentowych spełniające równanie równowagi, ale nie koniecznie równania nierozdzielności, to przyjąć należy $\delta X_i = 0$, $\delta Y_i = 0$ w obszarze V oraz $\delta p_i = 0$, $\delta m_i = 0$ na powierzchni A_σ, pozostawiając przyrosty δp_i, δm_i jako dowolne na A_u.

Przy tych ograniczeniach równanie (4.8) przyjmie kształt

$$\int_{A_u} (u_i \delta p_i + \omega_i \delta m_i)\, dA = \delta H_\sigma + \alpha_t \int_V \theta \delta\sigma_{kk}\, dV. \quad (4.12)$$

Ponieważ przemieszczenia u_i, obroty ω_i i temperatura θ nie doznają wariacji, mamy

$$\delta \Pi = 0, \quad (4.1\ 3$$

gdzie

$$\Pi = H_\sigma + \alpha_t \int_V \theta \sigma_{kk}\, dV - \int_{A_u} (p_i u_i + m_i \omega_i)\, dA, \quad H_\sigma = \int_V W_\sigma\, dV. \quad (4.14)$$

Wyrażenie Π nazywamy pracą komplementarną. Podobnie jak w teorii symetrycznej termosprężystości, tak i tu dowieść można, że Π staje się absolutnym minimum. Równanie (4.13) jest rozszerzonym na zagadnienie teorii niesymetrycznej termosprężystości, twierdzeniem o minimum pracy komplementarnej. Twierdzenie to głosi, że ze wszystkich pól tensorowych σ_{ji}, μ_{ji} spełniających równania równowagi oraz warunki brzegowe zadane w obciążeniach p_i i momentach m_i, rzeczywiście występujący stan naprężenia jest ten, który sprowadza funkcjonał Π do minimum.

5. Druga postać twierdzenia o minimum pracy komplementarnej

Rozpatrzmy pole naprężeń σ_{ji}, μ_{ji}, które spełnia równania równowagi

$$\sigma_{ji,j}=0, \quad \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{ji,i}=0, \quad \mathbf{x}\in V \tag{5.1}$$

oraz warunki brzegowe

$$\begin{gathered} p_i=\sigma_{ji}n_j=\hat{p}_i, \quad m_i=\mu_{ji}n_j=\hat{m}_i, \quad \mathbf{x}\in A_\sigma, \\ u_i=f_i, \quad \omega_i=g_i, \quad \mathbf{x}\in A_u. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Odkształcenia γ_{ji} oraz składowe tensora κ_{ji} winny spełniać warunki nierozdzielności.

Wprowadzimy pole naprężeń σ^*_{ji}, μ^*_{ji} różne od pola σ_{ji}, μ_{ji}. Od pola naprężeń σ^*_{ji}, μ^*_{ji} żądamy spełnienia równań równowagi

$$\sigma^*_{ij,j}=0, \quad \varepsilon_{ijk}\sigma^*_{jk}+\mu^*_{ji,j}=0, \quad \mathbf{x}\in V \tag{5.3}$$

oraz warunków brzegowych A_σ (tych samych, jak dla pola σ_{ji}, μ_{ji})

$$p^*_i=\sigma^*_{ji}n_j=\hat{p}_i, \quad m^*_i=\mu^*_{ji}n_j=\hat{m}_i, \quad \mathbf{x}\in A_\sigma. \tag{5.4}$$

Nie żądamy spełnienia przez pole σ^*_{ji}, μ^*_{ji} warunków kinematycznych na A_u oraz warunków nierozdzielności.

Oznaczmy przez $F(\sigma_{ji}, \mu_{ji}, \theta)$ i $F^*(\sigma^*_{ji}, \mu^*_{ji}, \theta)$ energie swobodne związane z polem σ_{ji}, μ_{ji} oraz σ^*_{ji}, μ^*_{ji}, a przez $F(\sigma^*_{ji}-\sigma_{ji}, \mu^*_{ji}-\mu_{ji}, \theta)$ energię swobodną związaną z różnicą naprężeń $\sigma^*_i-\sigma_{ji}$ i $\mu^*_{ji}-\mu_{ji}$.

Wymienione trzy postacie energii stanowią formę kwadratową dodatnio zdefiniowaną swych argumentów. Dla energii swobodnej wyrażonej w członach naprężeń σ_{ji} i naprężeń momentowych μ_{ji} oraz temperatury θ otrzymamy następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} F(\sigma_{ji}, \mu_{ji}, \theta)=\mu'\sigma_{(ij)}\sigma_{(ij)}+\alpha'\sigma_{\langle ij\rangle}\sigma_{\langle ij\rangle}+\frac{\lambda'}{2}\sigma_{kk}\sigma_{nn}+ \\ +\gamma'\mu_{(ij)}\mu_{(ij)}+\varepsilon'\mu_{\langle ij\rangle}\mu_{\langle ij\rangle}+\frac{\beta'}{2}\mu_{kk}\mu_{nn}+\tfrac{1}{2}\alpha_t\theta\sigma_{kk}-m_0\theta^2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Łatwo sprawdzić słuszność następującego związku:

$$\begin{aligned} F(\sigma^*_{ji}-\sigma_{ji}, \mu^*_{ji}-\mu_{ji}, \theta)=F^*(\sigma^*_{ji}, \mu^*_{ji}, \theta)-F(\sigma_{ji}, \mu_{ji}, \theta)- \\ -(\sigma^*_{ji}-\sigma_{ji})(\gamma_{ji}-\alpha_t\theta\delta_{ij})-(\mu^*_{ji}-\mu_{ji})\kappa_{ji}-m_0\theta^2>0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nierówności tej można nadać postać

$$\begin{aligned} W_\sigma(\sigma^*_{ji}-\sigma_{ji}, \mu^*_{ji}-\mu_{ji})=W^*_\sigma(\sigma^*_{ji}, \mu^*_{ji})-W_\sigma(\sigma_{ji}, \mu_{ji})- \\ -(\sigma^*_{ji}-\sigma_{ji})(\gamma_{ji}-\alpha_t\theta\delta_{ij})-(\mu^*_{ji}-\mu_{ji})\kappa_{ji}>0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

gdzie przez W_σ oznaczamy pracę odkształcenia, wprowadzoną w punkcie 4. Scałkujmy powyższe wyrażenie po obszarze ciała. Otrzymamy

$$H^*_\sigma-H_\sigma-\int[(\sigma^*_{ji}-\sigma_{ji})(\gamma_{ji}-\alpha_t\theta\delta_{ij})+(\mu^*_{ji}-\mu_{ji})\kappa_{ji}]\,dV>0. \tag{5.8}$$

Wykorzystamy związki

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \varepsilon_{kji}\omega_k, \qquad \kappa_{ji} = \omega_{i,j}$$

i przekształcimy całkę występującą w nierówności (5.8). Ostatecznie otrzymamy następującą nierówność:

$$\begin{aligned} & H_\sigma^* - H_\sigma - \int_A [(p_i^* - p_i)u_i + (m_i^* - m_i)\omega_i]\, dA + \\ & + \int_V \{\sigma_{ji,j}^* u_i + (\mu_{ji,j}^* + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}^*)\omega_i - \sigma_{ji,j}u_i - (\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk})\omega_i\}\, dV > 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Całka objętościowa jest równa zeru, ze względu na równania równowagi (5.1) i (5.3). Ze względu na identyczność warunków brzegowych (5.2) i (5.4) na powierzchni A_σ, całka powierzchniowa w wyrażeniu (5.9) ograniczy się do powierzchni A_u.

Nierówności (5.9) możemy nadać postać

$$\begin{aligned} & H_\sigma^* - \int_{A_u} (p_i^* u_i + m_i^* \omega_i)\, dA + \alpha_t \int_V \theta \sigma_{kk}^*\, dV > \\ & > H_\sigma - \int_{A_u} (p_i u_i + m_i \omega_i)\, dA + \alpha_t \int_V \theta \sigma_{kk}\, dV. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Lewa strona tej nierówności przedstawia pracę komplementarną Π^* pola σ_{ji}^*, μ_{ji}^*; prawa — pracę komplementarną Π pola σ_{ji}, μ_{ji}

$$\Pi^* > \Pi. \tag{5.11}$$

Praca komplementarna Π odnosi się do stanu naprężeń, w którym spełnione są warunki równowagi, warunki brzegowe oraz warunki nierozdzielności, praca komplementarna Π^* do stanu naprężeń, w którym spełnione są warunki równowagi oraz część warunków brzegowych, mianowicie na brzegu A_σ.

Nierówność (5.11) wskazuje, że energia komplementarna Π stanu naprężenia, w którym spełnione są warunki równowagi i wszystkie warunki brzegowe jest mniejszą od energii komplementarnej stanu naprężenia, które spełnia równania równowagi i jedynie część warunków brzegowych.

6. Rozszerzone twierdzenie wariacyjne E. Reissnera

Bez trudu daje się rozszerzyć nader ogólne twierdzenie wariacyjne E. Reissnera [12] z teorii symetrycznej sprężystości na zagadnienia niesymetrycznej termosprężystości.

Rozpatrzmy następujący funkcjonał: $I(\gamma_{ji}, \kappa_{ji}, u_i, \omega_i, \sigma_{ji}, \mu_{ji})$, gdzie

$$\begin{aligned} I = & \int_V \{W_\varepsilon - \nu\theta\gamma_{kk} - X_i u_i - Y_i \omega_i - \sigma_{ji}[\gamma_{ji} - (u_{i,j} - \varepsilon_{kji}\omega_k)] - \mu_{ji}(\kappa_{ji} - \omega_{i,j})\}\, dV - \\ & - \int_{A_\sigma} (\hat{p}_i u_i + \hat{m}_i \omega_i)\, dA - \int_{A_u} [p_i(u_i - \hat{u}_i) + m_i(\omega_i - \hat{\omega}_i)]\, dA. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Tutaj

$$W_\varepsilon = \mu\gamma_{(ij)}\gamma_{(ij)} + \alpha\gamma_{\langle ij\rangle}\gamma_{\langle ij\rangle} + \gamma\kappa_{(ij)}\kappa_{(ij)} + \varepsilon\kappa_{\langle ij\rangle}\kappa_{\langle ij\rangle} + \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn} + \frac{\beta}{2}\kappa_{kk}\kappa_{nn}. \tag{6.2}$$

Tutaj $\hat{p}_i$ i $\hat{m}_i$ są zadanymi siłami i momentami na A_σ, $\hat{u}_i$, $\hat{\omega}_i$ – składowymi wektora przemieszczenia $\vec{u}$ i wektora obrotu $\vec{\omega}$ na A_u.

Rozpatrzmy warunki konieczne na to, aby funkcjonał I był stacjonarny. Przyrównując pierwszą wariację I do zera i uwzględniając to, że funkcje γ_{ji}, κ_{ji}, u_i, ω_i, σ_{ji}, μ_{ji} doznają wirtualnych przyrostów w obszarze V, podczas gdy przyrosty funkcji u_i, ω_i mogą być dowolne na A_σ, a przyrosty wirtualne funkcji p_i, m_i mogą być dowolne na A_u, otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\delta I = 0 = \int_V \Big\{ & \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \gamma_{ji}} \delta\gamma_{ji} + \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \kappa_{ji}} \delta\kappa_{ji} - \nu\theta\delta_{ij}\delta\gamma_{ji} - X_i \delta u_i - Y_i \delta\omega_i - \\
& - \delta\sigma_{ji}[\gamma_{ji} - (u_{i,j} - \varepsilon_{ijk}\omega_i)] - \sigma_{ji}[\delta\gamma_{ji} - (\delta u_{i,j} - \varepsilon_{ijk}\delta\omega_i)] - \delta\mu_{ji}(\kappa_{ji} - \omega_{i,j}) - \\
& - \mu_{ji}(\delta\kappa_{ji} - \delta\omega_{i,j}) \Big\} dV - \int_{A_\sigma} (\hat{p}_i \delta u_i + \hat{m}_i \delta\omega_i)\, dA - \int_{A_u} [\delta p_i (u_i - \hat{u}_i) + \\
& + \delta m_i(\omega_i - \hat{\omega}_i)]\, dA
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

Dokonując całkowania przez części, wykorzystując przekształcenie Gauss'a oraz odpowiednio grupując otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\int_V \Big[& \Big(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \gamma_{ji}} - \sigma_{ji} - \delta_{ij}\nu\theta\Big)\delta\gamma_{ji} + \Big(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \kappa_{ji}} - \mu_{ji}\Big)\delta\kappa_{ji} - (X_i + \sigma_{ji,j})\delta u_i - \\
& - (Y_i + \mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk})\delta\omega_i + (\gamma_{ji} - u_{i,j} + \varepsilon_{kji}\omega_k)\delta\sigma_{ji} + \\
& + (\kappa_{ji} - \omega_{i,j})\delta\mu_{ji} \Big\} dV - \int_{A_\sigma} [(p_i - \hat{p}_i)\delta u_i + (m_i - \hat{m}_i)\delta\omega_i]\, dA - \\
& - \int_{A_u} [(u_i - \hat{u}_i)\delta p_i + (\omega_i - \hat{\omega}_i)\delta m_i]\, dA.
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

Z równania (6.4) otrzymujemy w wyniku niezależności od siebie poszczególnych przyrostów $\delta\gamma_{ji}$ $\delta\kappa_{ji}$, δu_i, $\delta\omega_i$, $\delta\sigma_{ji}$, $\delta\mu_{ji}$ następujący układ równań Eulera problemu wariacyjnego:

$$
\begin{aligned}
& \sigma_{ji,j} + X_i = 0, \quad \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \\
& \gamma_{ji} = u_{i,j} - \varepsilon_{ijk}\omega_i, \quad \kappa_{ji} = \omega_{i,j}, \quad \mathbf{x} \in V, \\
& \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \gamma_{ji}} = \sigma_{ji} + \delta_{ij}\nu\theta, \quad \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \kappa_{ji}} = \mu_{ji}, \quad \mathbf{x} \in V,
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

$$
\begin{aligned}
& p_i = \hat{p}_i, \quad m_i = \hat{m}_i, \quad \mathbf{x} \in A_\sigma, \\
& u_i = \hat{u}_i, \quad \omega_i = \hat{\omega}_i, \quad \mathbf{x} \in A_u.
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

Jest to podstawowy układ równań teorii niesymetrycznej termosprężystości. Rozszerzone na zagadnienie niesymetrycznej termosprężystości twierdzenie E. Reissnera głosi, że ze wszystkich stanów naprężenia σ_{ji} stanów naprężeń momentowych μ_{ji}, stanów przemieszczeń u_i i obrotów ω_i, spełniających warunki brzegowe (6.6) i równania równowagi (6.5) w rzeczywistości wystąpi ten, który wprowadza funkcjonał I do minimum.

7. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań zagadnień termosprężystości

Rozpatrzmy ciało jednospójne V, obciążone siłami zewnętrznymi i poddane działaniu pola temperatury. Niech we wnętrzu ciała działają siły i momenty masowe oraz źródła ciepła. Niech na A_u zadane będą przemieszczenia u_i i obroty ω_i, a na A_σ obciążenie p_i i momenty m_i.

We wnętrzu ciała obowiązują równania równowagi, wyrażone przez przemieszczenia u_i i obroty ω_i, zatem równania (1.8). Warunki brzegowe podane są wzorami (1.10). Załóżmy teraz, że istnieją dwa różne rozwiązania u_i', ω_i' oraz u_i'', ω_i'' równań (1.8). Tym samym mamy dwa różne pola naprężeń σ'_{ji}, μ'_{ji} oraz σ''_{ji}, μ''_{ji}, jak i różne pola odkształceń γ'_{ji}, κ'_{ji} i γ''_{ji}, κ''_{ji}.

Wprowadzamy oznaczenia

$$u_i^* = u_i' - u_i'', \quad \omega_i^* = \omega_i' - \omega_i'', \quad \gamma_{ji}^* = \gamma'_{ji} - \gamma''_{ji}, \quad \kappa_{ji}^* = \kappa'_{ji} - \kappa''_{ji}, \tag{7.1}$$
$$\sigma_{ji}^* = \sigma'_{ji} - \sigma''_{ji}, \quad \mu_{ji}^* = \mu'_{ji} - \mu''_{ji}.$$

Widoczne jest, że naprężenia σ_{ji}^*, μ_{ji}^* spełniają jednorodne równania równowagi

$$\sigma_{ji,j}^* = 0, \quad \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}^* + \mu_{ji,j}^* = 0, \quad \mathbf{x} \in V. \tag{7.2}$$

Odkształcenia i naprężenia wyrażają się wzorami

$$\gamma_{ji}^* = u_{i,j}^* - \varepsilon_{kji}\omega_k^*, \quad \kappa_{ji}^* = \omega_{i,j}^*, \quad \mathbf{x} \in V + A, \tag{7.3}$$

$$\sigma_{ij}^* = 2\mu\gamma_{(ij)}^* + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}^* + \lambda\gamma_{kk}^*\delta_{ij}, \quad \mathbf{x} \in V + A, \tag{7.4}$$

$$\mu_{ij}^* = 2\gamma\kappa_{(ij)}^* + 2\varepsilon\kappa_{\langle ij\rangle}^* + \beta\kappa_{kk}^*\delta_{ij}, \quad \mathbf{x} \in V + A. \tag{7.5}$$

Równania różniczkowe termosprężystości (1.8) stają się dla u_i^*, ω_i^* równaniami jednorodnymi. Również przynależne tym równaniom warunki brzegowe (1.10) stają się jednorodnymi. Mamy zatem układ równań różniczkowych

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{\mathbf{u}}^* - (\mu + \alpha)\,\mathrm{rot\,rot}\,\vec{\mathbf{u}}^* + 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}^* = 0, \tag{7.6}$$

$$(\beta + 2\gamma)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}^* - (\gamma + \varepsilon)\,\mathrm{rot\,rot}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}^* + 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{u}}^* - \varphi\alpha\vec{\boldsymbol{\omega}}^* = 0, \quad \mathbf{x} \in V \tag{7.7}$$

oraz warunki brzegowe

$$u_i^* = 0, \quad \omega_i^* = 0, \quad \mathbf{x} \in A_u, \tag{7.8}$$

$$p_i^* = \sigma_{ji}^* n_j = 0, \quad m_i^* = \mu_{ji}^* n_j = 0, \quad \mathbf{x} \in A_\sigma. \tag{7.9}$$

Równania (7.2), (7.6)$\div$(7.9) odpowiadają ciału, w którym brak sił i momentów masowych oraz, w którym temperatura jest równa zeru. Rozpatrzmy całkę

$$I = \int_V (\sigma_{ji}^*\gamma_{ji}^* + \mu_{ji}^*\kappa_{ji}^*)\, dV. \tag{7.10}$$

Zważywszy na związki (7.4) i (7.5) przedstawić możemy ją w postaci

$$I = 2\int_V \Big(\mu\gamma_{(ji)}^*\gamma_{(ji)}^* + \alpha\gamma_{\langle ij\rangle}^*\gamma_{\langle ij\rangle}^* + \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}^*\gamma_{nn}^* + \tag{7.11}$$
$$+ \gamma\kappa_{(ij)}^*\kappa_{(ij)}^* + \varepsilon\kappa_{\langle ij\rangle}^*\kappa_{\langle ij\rangle}^* + \frac{\beta}{2}\kappa_{kk}^*\kappa_{nn}\Big)\, dV.$$

Wyrażenie podcałkowe wyraża podwójną pracę odkształcenia, odniesioną do jednostki objętości ciała. Wielkość ta jest stale dodatnia. Całkę (7.10) przekształcimy wykorzystując zależności (7.3)

$$
\begin{aligned}
I = & \int_V [(\sigma^*_{ji} u^*_i)_{,j} + (\mu^*_{ji} \omega^*_i)_{,j}]\, dV - \\
& - \int_V [\sigma^*_{ji,j} u^*_i + (\varepsilon_{ijk} \sigma^*_{jk} + \mu^*_{ji,j})]\, dV .
\end{aligned} \tag{7.12}
$$

Ostatnia całka po prawej stronie jest równa zeru ze względu na równania równowagi (7.2). Do pierwszej całki zastosujemy przekształcenie Gaussa. Założyć tu winniśmy, że funkcje σ^*_{ji}, μ^*_{ji}, γ^*_{ji}, κ^*_{ji} są funkcjami ciągłymi i ograniczonymi klasy $C^{(1)}$, oraz że mamy do czynienia z obszarem jednospójnym. W rezultacie otrzymamy z (7.12)

$$
I = \int_A (p^*_i u^*_i + m^*_i \omega^*_i)\, dA . \tag{7.13}
$$

Ze względu na jednorodność warunków brzegowych (7.8) i (7.9) na A_u i A_σ całka powierzchniowa przyjmie wartość równą zeru. Ponieważ $I \equiv 0$ w całym obszarze, a wyrażenie podcałkowe w wyrażeniu (7.11) jest funkcją kwadratową dodatnio określoną jego argumentów, to

$$
\gamma^*_{ji} = 0 , \quad \kappa^*_{ji} = 0 , \quad \mathbf{x} \in V . \tag{7.14}
$$

Ze względu na związki (7.4) i (7.5) jest również

$$
\sigma^*_{ji} = 0 , \quad \mu^*_{ji} = 0 , \quad \mathbf{x} \in V . \tag{7.15}
$$

Mamy zatem do czynienia z jednoznacznością odkształceń i naprężeń

$$
\gamma'_{ji} = \gamma''_{ji} , \quad \kappa'_{ji} = \kappa''_{ji} , \quad \sigma'_{ji} = \sigma''_{ji} , \quad \mu'_{ji} = \mu''_{ji} . \tag{7.16}
$$

Wstawiając $\gamma^*_{ji} = 0$, $\kappa^*_{ji} = 0$ do związków (7.3) otrzymamy układ równań różniczkowych cząstkowych. Rozwiązanie tego równania doprowadza do równości

$$
u'_i = u''_i , \quad \omega'_i = \omega''_i \tag{7.17}
$$

jeśli ciało jest na A_u podparte. Jeśli ciało znajduje się w równowadze pod wpływem sił zewnętrznych rozłożonych na powierzchni ciał, to otrzymamy

$$
u'_i = u''_i + \text{człon liniowy} , \quad \omega'_i = \omega''_i + \text{człon liniowy} . \tag{7.18}
$$

Człony liniowe wyrażają tu przesunięcie i obrót ciała jako całości, jako bryły sztywnej.

8. Twierdzenie o wzajemności prac

Twierdzenie to dla ogólniejszego, dynamicznego zagadnienia niesymetrycznej termosprężystości wyprowadzono w pracy [10]. Tutaj dla zagadnienia ustalonego podamy inny tok wyprowadzenia, oparty na analogii sił masowych.

Równanie o wzajemności dla zagadnienia izotermicznego ma postać

$$\int_V (X_i^* u_i' + Y_i^* \omega_i')\, dV + \int_A (p_i^* u_i' + m_i^* \omega_i')\, dA =$$

$$= \int_V (X_i'^* u_i + Y_i'^* \omega_i)\, dV + \int_A (p_i'^* u_i + m_i'^* \omega_i)\, dA\,. \tag{8.1}$$

Tutaj $X_i^*, Y_i^*, p_i^*, m_i^*$ odnoszą się do pierwszego stanu obciążeń, wywołującego przemieszczenia u_i i obroty ω_i; $X_i'^*$, $Y_i'^*$, $p_i'^*$, $m_i'^*$ do drugiego stanu obciążeń, którego wynikiem jest powstanie pola przemieszczeń u_i' i obrotów ω_i'.

Rozpatrzmy teraz ciało, w którym jako pierwszy stan obciążeń występują X_i, Y_i, p_i, m_i oraz temperatura θ, które powodują pole przemieszczeń u_i i obrotów ω_i. Drugi stan przyczyn i skutków oznaczymy „primami".

Wykorzystując analogię sił masowych (2.8) dla obu układów przyczyn i skutków, otrzymamy

$$\int_V [(X_i - \nu\theta_{,i})\, u_i' + Y_i \omega_i']\, dV + \int_A [(p_i + \nu n_i \theta)\, u_i' + m_i \omega_i']\, dA =$$

$$= \int_V [(X' - \nu\theta'_{,i})\, u_i + Y_i' \omega_i]\, dV + \int_A [(p_i' + \nu n_i \theta')\, u_i + m_i' \omega_i]\, dA\,. \tag{8.2}$$

Przekształcenie tego równania prowadzi do związku

$$\int_V (X_i u_i' + Y_i \omega_i')\, dV + \int_A (p_i u_i' + m_i \omega_i')\, dA + \nu \int_V \theta \gamma_{kk}'\, dV =$$

$$= \int_V (X_i' u_i + Y_i' \omega_i)\, dV + \int_A (p_i' u_i + m_i' \omega_i)\, dA + \nu \int_V \theta' \gamma_{kk}\, dV\,. \tag{8.3}$$

Równanie to przedstawia twierdzenie o wzajemności prac, rozszerzone za zagadnienia niesymetrycznej termosprężystości.

Rozważmy ciało V, wolne od sił masowych ($X_i = 0$) i momentów masowych ($Y_i = 0$), dalej swobodne od obciążeń na A_σ ($p_i = 0$, $m_i = 0$) oraz utwierdzone zupełnie na A_u ($u_i = 0$, $\omega_i = 0$). Poszukujemy składowych u_i i ω_i w punkcie (ξ) ciała, wywołanych działaniem pola temperatury $\theta(\mathbf{x})$.

Jako drugi układ sił przyjmiemy działanie siły skupionej $X_i' = \delta(\mathbf{x} - \xi)\delta_{ik}$ zaczepionej w punkcie (ξ) i skierowanej w kierunku osi x_k. Przyjmiemy zatem, że $Y_i' = 0$, $\theta' = 0$, $\mathbf{x} \in V$. Zakładamy dalej, że składowe u_i' i ω_i' są równe zeru na A_u, oraz że obciążenia p_i' i momenty m_i' są równe zeru na A_σ. Działanie siły skupionej $X_i' = \delta(\mathbf{x} - \xi)\delta_{ik}$ wywoła w ciele przemieszczenia $U_i^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)$ oraz obroty $\Omega_i^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)$. Zakładamy, że funkcje te otrzymamy z rozwiązania równań (1.8), tak że w dalszych rozważaniach przyjmiemy, że funkcje te są znane. Stosując do obu układów obciążeń twierdzenie o wzajemności otrzymamy

$$\nu \int_V \theta(\mathbf{x})\, \gamma_{nn}'^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)\, dV(\mathbf{x}) = \int_V \delta(\mathbf{x} - \xi)\, \delta_{ik} u_i(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x})\,,$$

skąd

$$u_k(\xi) = \nu \int_V \theta(\mathbf{x})\, U_{j,j}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)\, dV(\mathbf{x})\,. \tag{8.4}$$

Tutaj przez $\gamma_{nn}'^{(k)} = U_{j,j}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)$ oznaczono dylatację w punkcie $(\mathbf{x})$, wywołaną działaniem siły $X_i' = \delta(\mathbf{x}-\xi)\delta_{ik}$, umieszczonej w punkcie (ξ). Rozpatrzmy nasze ciało nie zmieniając pierwszego układu obciążeń. Stawiamy sobie jednak inne zadanie, mianowicie wyznaczenia wielkości ω_i w punkcie (ξ), wywołanych działaniem pola temperatury.

Jako drugi układ obciążeń (układ z „primami") przyjmujemy działanie momentu masowego $Y_i' = \delta(\mathbf{x}-\xi)\delta_{ik}$ o wektorze skierowanym w kierunku osi x_k. Zakładamy dalej, że $X_j'=0$, $\theta'=0$ oraz że na A_u jest: $u_i'=0$, $\omega_i'=0$ i że na A_σ jest: $p_i'=0$, $m_i'=0$.

Moment masowy $Y_i' = \delta(\mathbf{x}-\xi)\delta_{ik}$ wywołuje w ciele przemieszczenia $u_i' = V_i^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)$ oraz obroty $\omega_i' = A_i^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)$. Funkcje te znajdziemy z rozwiązania układu równań (1.8). Stosując do wyżej omówionych stanów twierdzenie o wzajemności (8.3) otrzymamy

$$\nu \int_V \theta(\mathbf{x}) V_{j,j}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)\, dV(\mathbf{x}) = \int_V \delta(\mathbf{x}-\xi)\,\delta_{ik}\,\omega_i(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}),$$

skąd

$$\omega_k(\xi) = \nu \int_V \theta(\mathbf{x}) V_{j,j}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)\, dV(\mathbf{x}). \tag{8.5}$$

Związki (8.4) i (8.5) stanowią uogólnienie twierdzeń N. M. Majziela [13] na zagadnienia niesymetrycznej termosprężystości. Przy przejściu do symetrycznej termosprężystości należy w równaniu (8.3) przyjąć, że $\omega_i=\omega_i'=0$, $Y_i=Y_i'=0$, $m_i=m'=0$. Równanie Majziela redukuje się do równania (8.4), w którym przemieszczenie $U_i^{(k)}(\mathbf{x}, \xi)$ wyznacza się z równań przemieszczeniowych symetrycznej termosprężystości.

9. Uwagi końcowe

Wyprowadzone tu twierdzenia odnoszą się do przestrzennego stanu naprężenia ciała. Można by je oczywiście formułować dla prostszych stanów naprężenia, na przykład dla płaskiego stanu odkształcenia (gdy wszelkie wielkości deformacji i naprężeń zależą jedynie od dwu zmiennych) względnie dla uogólnionego stanu naprężenia (w płytach). Nie czynimy tu tego ze względu na ograniczoną objętość pracy. Należy jednak zwrócić uwagę na kilka nader prostych stanów deformacji, dających pewien wgląd w pracę układu.

Pierwsza uwaga odnosi się do nader prostego stanu. Mianowicie załóżmy, że ciało jest na swej powierzchni zupełnie utwierdzone, a temperatura jest stała w obszarze ciała. W tym przypadku równania różniczkowe (1.8) stają się jednorodne, przy jednoczesnej jednorodności warunków brzegowych ($u_i=0$, $\omega_i=0$ na A).

Rozwiązaniem układu równań (1.8) może być jedynie $u_i\equiv 0$, $\omega_i\equiv 0$ w całym obszarze V. W konsekwencji mamy $\gamma_{ji}\equiv 0$, $\kappa_{ji}\equiv 0$, $x\in V$. Ze związków (1.4) i (1.5) wynika, że $\mu_{ji}\equiv 0$, $\mathbf{x}\in V$, oraz że

$$\sigma_{ji} = -\nu\theta\delta_{ij}. \tag{9.1}$$

W ciele występują stałe naprężenia ściskające (jeśli $\theta>0$). Tensor σ_{ji} jest w tym przypadku symetryczny.

Druga uwaga odnosi się do ciała jednospójnego, w którym istnieje pole temperatury $\theta(\mathbf{x})$. Zapytujemy się jaki powinien być rozkład temperatury, aby w ciele nie powstały ani naprężenia σ_{ji}, ani naprężenia momentowe μ_{ji}. Przyrównując do zera wielkości σ_{ji} i μ_{ji}

w związkach (4.1) i (4.2) otrzymamy

$$\kappa_{ji}=0\,, \qquad \gamma_{ji}=\gamma_{(ij)}=\alpha_t\delta_{ij}\theta\,. \tag{9.2}$$

Zakładając, że ciało na swej powierzchni jest wolne od obciążeń, a wewnątrz ciała brak sił masowych, stwierdzamy, że równania równowagi są spełnione.

Pozostaje jeszcze spełnić równania nierozdzielności

$$\varepsilon_{kih}\kappa_{lk}-\varepsilon_{kil}\kappa_{hk}-\gamma_{li,h}-\gamma_{hi,l}=0\,, \qquad \kappa_{ij,l}=\kappa_{lj,i}\,. \tag{9.3}$$

Drugi układ równań jest od razu spełniony, a pierwszy prowadzi do układu równań

$$\theta_{,ij}=0 \quad (\text{nie sumować gdy } i=j)\,. \tag{9.4}$$

Równania (9.4) będą spełnione, gdy rozkład temperatury będzie liniowy

$$\theta=a_0+a_ix_i\,.$$

Trzecia uwaga odnosi się do zmiany objętości ciała, wywołanej działaniem pola temperatury. Zakładamy, że ciało jest jednospójne, a powierzchnia A wolna od obciążeń. Zatem $X_i=Y_i=0$, $\mathbf{x}\in V$ oraz $p_i=0$, $m_i=0$, $\mathbf{x}\in A$.

Przyjmijmy teraz drugi układ przyczyn i skutków w tym samym ciele. Przyjmijmy, że w ciele panuje stan izotermiczny ($\theta'=0$) oraz że brak sił masowych ($X_i'=Y_i'=0$). Załóżmy dalej, że powierzchnia A jest wolna od momentów ($m_i=0$), a jedynym obciążeniem działającym na ciało, to wszechstronne jednostkowe rozciąganie. Stan wszechstronnego rozciągania ciała powoduje powstanie w nim naprężeń normalnych $\sigma'_{ji}=\delta_{ij}$. Na powierzchni A działać będą obciążenia $p_i'=\sigma'_{ji}n_j=\delta_{ij}n_j=n_i$. Dla opisanych tu dwu układów przyczyn skutków zastosujemy twierdzenie o wzajemności w postaci (8.3)

$$\int_A n_iu_i\,dA=\nu\int_V \theta\gamma'_{kk}\,dV\,. \tag{9.5}$$

Całka powierzchniowa oznacza przyrost objętości ΔV. Ponieważ między dylatacją γ'_{kk} a inwariantem stanu naprężenia σ'_{kk} istnieje związek

$$\sigma'_{kk}=3K\gamma'_{kk}\,, \tag{9.6}$$

zatem

$$\Delta V=3\alpha_t\int_V \theta\,dV\,. \tag{9.7}$$

Przyrost objętości otrzymamy drogą całkowania rozkładu temperatury po objętości ciała.

Pole temperatury wywoła w ciele symetryczny tensor naprężenia, naprężenia momentowe będą równe zeru.

Mnożąc równanie równowagi $\sigma_{ji,j}=0$ przez x_i i całkując po V, otrzymamy

$$\int_V x_i\sigma_{ji,j}\,dV=\int_V[(\sigma_{ji}x_i)_{,j}-\delta_{ij}\sigma_{ij}]\,dV=0$$

albo

$$\int_A \sigma_{ji}n_jx_i\,dA=\int_V \sigma_{kk}\,dV\,. \tag{9.8}$$

Całka powierzchniowa jest równa zeru, gdyż założyliśmy, że na A brak obciążeń. W rezultacie otrzymamy interesujący związek

$$\int_V \sigma_{kk}\, dV = 0 . \tag{9.9}$$

Zauważmy, że wszelkie tu przedstawione proste rozwiązania szczególne są wspólne dla symetrycznej i niesymetrycznej termosprężystości.

Ostatnia uwaga odnosi się do ciała nieograniczonego, w którym działają źródła ciepła. Przy założeniu braku sił masowych całką szczególną równań (1.8) będzie

$$u_i = \Phi_{,i} . \tag{9.10}$$

Jeśli wstawić (9.10) do (1.8), to równania te będą spełnione, gdy

$$\omega_i = 0 , \quad \nabla^2 \Phi = m\theta , \quad m = \nu(\lambda + 2\mu)^{-1} . \tag{9.11}$$

W tym przypadku jest $\mu_{ji} = 0$, $\kappa_{ji} = 0$, $\omega_i = 0$ oraz

$$\begin{aligned} \gamma_{ji} = \gamma_{(ij)} = \Phi_{,ij} , \quad \gamma_{kk} = \Phi_{,kk} , \\ \sigma_{ij} = \sigma_{(ij)} = 2\mu(\Phi_{,ij} - \delta_{ij}\, \Phi_{,kk}) . \end{aligned} \tag{9.12}$$

W przestrzeni nieskończonej powstaną jedynie symetryczne części tensora naprężenia i odkształcenia. Uzyskane wyniki (9.11), (9.12) są identyczne z wynikami otrzymanymi w ramach symetrycznej termosprężystości.

Praca wpłynęła 30 listopada 1966 r.

LITERATURA

[1] W. Voigt, *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle*. Abh. Ges. Wiss Gettingen, 34 (1877).

[2] E. et. F. Cosserat, *Theorie des corps deformables*. A. Herrmann et Fils, Paris 1909.

[3] C. Truesdell, R. A. Toupin, *The classical field theories*. Encyclopedia of Physics, V. III/1, ser. 200, 203, 205, Springer, Berlin 1960.

[4] A. L. Aero, E. W. Kuvshinski, *Osnownyje urawnjenia tieorii uprugosti śred z wraszczetielnym wzaimodziejstwem czastic*. Fiz. Twierd. Tieło, V. 2, a. 7, 1960.

[5] R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*. Arch Rat. Mech. Anal. V. 11, 415 (1962).

[6] G. Grioli, *Elasticita asimetrica*. Ann. di Mat. pura ed. appl. Ser. IV, 50, 389 (1960).

[7] E. W. Kuvshinski, E. L. Aero, *Kontynualnaja tieoria asimmetriczeskoj uprugosti. Uczet „wnutrennogo" wraszczenja*. Fiz. Twierd. Tieła, V. 5, a. 9 (1963).

[8] W. A. Palmow, *Osnownyje uprawnjenia tieorii niesimmetricznoj uprugosti*. Prikł. Matem. i Mech. V. 28 (1964).

[9] A. C. Eringen, E. S. Suhubi, *Nonlinear theory of micro-elastic solids*. Part I — Int. J. Eng. Sci. 2, 189 (1964), part II — Int. J. Eng. Sci. 2, 389 (1964).

[10] W. Nowacki, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity III*. Bull. L'Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. V. 14, no (1966).

[11] W. Nowacki, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*. Proceedings of IUTAM-Symposium on "Irreversible aspects of continuum mechanics", Vienna 1966.

[12] E. Reissner, *On variational theorem in elasticity*. J. Math. and Physics, V. 29 (1950).

[13] W. M. Majziel, *Temperaturnaja zadacza tieorii uprugosti*. Kijów, Izd. AN USSR, 1951.

VARIATIONAL THEOREMS OF ASYMMETRIC THERMOELASTICITY

Summary

In this paper the author presents three theorems of non-symmetric thermo-elasticity, a theorem of minimum potential energy, a theorem of minimum complementary work, and variational theorems of E. Reissner as extended to thermo-elasticity.

The principle of virtual work led to analogues of forces and mass moments. These analogues have in turn been used to derive a theorem of work reciprocity.

Finally, the paper gives a theorem of unicity of the solutions of thermoelastic problems and generalized Majziel formulae for problems of assymmetric thermo-elasticity.

In conclusion, there are remarks on extremely simple states of thermo-elastic deformation of a solid body.